А.О.Камінський[1], М.В.Дудик[2]

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ (ОГЛЯД)

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: dfm11@ukr.net
[2]Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна; e-mail: dudik_m@hotmail.com

Abstract. The article reviews analytical models of the process zone near the tip of an interface crack in a piecewise-homogeneous elastic-brittle body in connection with the study of crack kinking from the interface of joined materials. They are based on the complex model of an interface crack, which assumes the presence of a faces contact area and a small-scale process zone with the near-tip area of material destruction in the vicinity of the crack tip. Main principles of the analytical method of taking into account a small-scale process zone near the tip of an interface crack are formulated, which allow us to reduce the original nonlinear problem of fracture mechanics to the solution of boundary value problem of the elasticity theory about the discontinuity line of displacement, which emanates from the tip of the crack into a less crack-resistant material. The Wiener-Hopf method in combination with the Mellin integral transformation is a mathematical apparatus for the analytical solution of boundary value problems of the analysed models. Variants of the implementation of a complex model of an interface crack for the cases of prevailing tensile or shear loadings are considered. Numerical analysis of the parameters of the process zone, the faces contact area and the destruction zone for various loading conditions was carried out. Comparison of the model's predictions with the experimental results of interface crack kinking studies was performed. Mechanism of the opening of an initially closed crack due to the formation of a destruction zone is described. Analysis of the results of approximate analytical solution of the problem of complex model of an interface crack under loadings that provide commensurate zones of process and of the faces contact was carried out. Mutual influence of the faces contact and the process zone on their parameters and the angle of crack kinking has been established.

Key words: interface crack, complex model, process zone, destruction zone, contact of the faces, crack kinking.

Вступ.

Проблема повороту міжфазної тріщини активно досліджується впродовж кількох останніх десятиліть, але інтерес до неї досі не спадає. Актуальність цієї проблеми залишається високою внаслідок значного застосування у сучасному виробництві композитних матеріалів, ламінатів та інших типів кусково-однорідних тіл, що призводить до питань щодо зародження та подальшої еволюції в них міжфазних тріщин.

Дослідження міжфазних тріщин розпочались у другій половині минулого століття з визначення локального поля напружень і переміщень в околі її вершин. В теорії міжфазних тріщин найбільшої популярності набули модель розкритої тріщини-розрізу з вільними від напружень берегами [28, 29, 54, 60] та модель М. Комніноу [17 – 20, 27], яка постулює наявність контакту берегів біля вершини тріщини. Проте, жодна з вказаних моделей не є у повній мірі задовільною. Модель розкритої тріщини призводить до осциляційної особливості напружень і деформацій при наближенні до вершини,

наслідком якої є фізично неможливий взаємний перетин берегів. З іншого боку, контактна модель за певних умов навантаження (наприклад, при переважаючих відривних навантаженнях) передбачає екстремально малі розміри області контакту берегів, що ставить під сумнів існування контакту. Відповідно, вибір базової моделі міжфазної тріщини для прогнозування напрямку її поширення повинен у першу чергу визначатись умовами навантаження кусково-однорідного тіла, що, відповідно, впливатиме на постановку задачі про поворот тріщини.

Стандартний метод розрахунку кута повороту тріщини зводиться до розв'язання задачі про маломасштабну тріщину, яка поширюється з вершини початкової міжфазної тріщини в один з матеріалів композитного з'єднання [34]. До отриманого розв'язку застосовується той чи інший критерій вибору орієнтації повернутої тріщини, серед яких найбільш вживаними і ефективними та близькими за прогнозованими значеннями кутів повороту є умова максимуму швидкості вивільнення енергії і принцип локальної симетрії (локальний коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини вторинної бічної тріщини $k_{11} = 0$) [62].

Зазначений вище метод базується на дослідженні виключно останнього етапу повороту тріщини, коли поворот вже відбувся. Він не враховує процеси деструкції матеріалу, які передують утворенню повернутої тріщини, не пояснює механізм розкриття початково закритої міжфазної тріщини в рамках моделі з контактуючими берегами. У зв'язку з цим очікується, що розгляд початкового етапу повороту тріщини, який полягає в утворенні в околі її вершин, як концентраторів напружень, зон передруйнування у матеріалі, в який відбувається поворот, дозволить краще зрозуміти особливості процесу повороту тріщини за різних умов навантаження та уточнити умови зрушення і передбачувані значення кутів відхилення тріщини від межі поділу.

Через математичну складність кількість робіт, присвячених привершинним зонам передруйнування біля міжфазних тріщин та їх впливу на поворот тріщин, є досить малою, причому розрахунки параметрів зон виконувались переважно чисельними методами [13, 52]. Виняток складає цикл досліджень [2, 3, 22 – 24, 36, 38, 39, 41] маломасштабних зон передруйнування, виконаних авторами даної публікації за активної участі одного з натхненників цих досліджень професора Л.А. Кіпніса та ряду інших його колег. Модельне представлення в них зон передруйнування математичним розрізом (лінією розриву переміщення) з певним законом взаємодії його берегів дозволило авторам звести вихідну задачу про поворот міжфазної тріщини при різних умовах навантаження до відповідних крайових задач теорії пружності, розв'язаних аналітично за допомогою методу Вінера – Гопфа [49].

Метою даної публікації є огляд розвинутих авторами аналітичних моделей привершинних зон передруйнування і перспектив їх подальшого удосконалення та обґрунтування можливостей їх використання у зв'язку з поворотом міжфазної тріщини. Різноманітність і чисельність аналізованих моделей обумовлена, з одного боку, суттєвим впливом характеру зовнішнього навантаження на можливі співвідношення розмірів зон передруйнування і області контакту берегів, що призводить до мультимасштабності структурних елементів моделей і створює труднощі для побудови однієї універсальної моделі, а з іншого боку пов'язана зі спробою врахування наявності досить малої області деструкції матеріалу в частині зони передруйнування, прилеглої до вершини тріщини, яка характеризується підвищеним рівнем деформацій.

§1. Основні положення методу врахування маломасштабних зон передруйнування в теорії міжфазних тріщин.

Метод врахування впливу маломасштабних зон передруйнування на напружено-деформований стан в околі гострокінцевих концентраторів напружень в плоских задачах механіки руйнування, який використано у наступних розділах статті, вперше був реалізований Черепановим у роботі [16] при розрахунку параметрів пластичної зони біля вершини тріщини нормального відриву в однорідному пружно-пластичному матеріалі. Метод базується на наступних вихідних положеннях:

1). *Розкладання вихідної задачі про визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування (ЗП) і напружено-деформованого стану (НДС) в околі вершини гострокінцевого концентратора напружень на зовнішню задачу, яка описує НДС досліджуваного тіла без ЗП, і внутрішню задачу, метою якої є визначення параметрів ЗП і НДС біля вершини.*

Розкладання вихідної задачі на зовнішню і внутрішню у випадку маломасштабних ЗП дає можливість їх незалежного розв'язування. Це важливо, оскільки розв'язування зовнішньої задачі суттєво ускладнюється у випадку нетривіальної будови досліджуваного тіла і складної конфігурації зовнішнього навантаження, тоді як внутрішня задача може бути розв'язана окремо в рамках лінійної механіки руйнування лише за відомого асимптотичного розв'язку зовнішньої задачі.

2). *Використання «принципу мікроскопа»* [11] *для опису локального поля напружень і переміщень біля вершини концентратора.*

Для розв'язання внутрішньої задачі у випадку маломасштабних ЗП достатньо знати локальне поле напружень біля вершини концентратора напружень як асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі. «Принцип мікроскопа» дозволяє звести пошук асимптотичної частини розв'язку зовнішньої задачі до розв'язання відповідної однорідної канонічної сингулярної крайової задачі теорії пружності для особливих точок, якими є гострокінцеві концентратори, зокрема, вершини тріщин. Побудова розв'язку цієї задачі здійснюється за допомогою методу Віґхардта – Вільямса розвинення розв'язку за власними функціями [58, 59]. В рамках методу Віґхардта – Вільямса асимптотичний розв'язок подається у вигляді суперпозиції частинних розв'язків

$$\sigma_{jk}(r,\theta) \sim \sum_i C_i F_{jk}\left(\lambda_i,\theta\right) r^{\lambda_i} \quad (r \to 0) \tag{1.1}$$

(r,θ – координати в полярній системі з початком у вершині концентратора напружень), вклад кожного з яких визначається:

– коефіцієнтами C_i, що залежать від будови тіла і зовнішнього навантаження та розраховуються чисельними або ж, при можливості, аналітичними методами з розв'язку зовнішньої задачі. За фізичним змістом C_i відповідають коефіцієнтам інтенсивності напружень. Важливо, що в процесі розв'язання внутрішньої задачі не виникає потреби у визначенні коефіцієнтів C_i: на даному етапі достатньо вважати їх заданими за умовою і тільки для чисельного дослідження отриманого розв'язку потрібні їх числові значення для конкретного тіла і конкретного навантаження, які підставлятимуться в кінцеві формули розв'язку;

– коренями $\lambda_i (\mathrm{Re}\,\lambda_i > -1)$ характеристичного рівняння задачі, які пов'язані з локальною структурою привершинної області і у випадку від'ємних значень їх дійсних частин є показниками сингулярності напружень. Обмеження $\mathrm{Re}\,\lambda_i > -1$ обумовлене вимогою скінченності переміщень при $r > 0$;

– функціями $F_{jk}(\lambda_i, \theta)$, які, як і показники сингулярності λ_i, визначаються локальною геометрією і пружними характеристиками матеріалів у привершинній області.

3). *Використання моделей типу Леонова – Панасюка* [6, 7] *і Дагдейла* [26] *для зведення внутрішньої задачі про розрахунок параметрів ЗП до статичної крайової задачі теорії пружності про лінію розриву переміщення як математичного розрізу, що виходить з вершини концентратора, з заданим законом взаємодії його берегів, який відповідає певному критерію міцності матеріалу.*

Визначення форми і розмірів зони передруйнування в рамках нелінійної механіки руйнування передбачає розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з крайовими умовами на заздалегідь невідомій границі, яка розмежовує ЗП та решту матеріалу, що перебуває у пружному стані і задовольняє рівнянням теорії пружності. На сьогоднішній день через відсутність дієвих методів аналітичного розв'язання таких нелінійних задач їх розв'язки знаходяться переважно чисельно. Проте,