А.О.Камінський[1], М.В.Дудик[2]

РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ

[1]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: dfm11@ukr.net
[2]Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини,
вул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна; e-mail: dudik_m@hotmail.com

Abstract. A calculation of the thin small-scale plastic zone in the elastic-plastic piecewise homogeneous body under the shear near the tip of the interface crack is carried out by the Wiener-Hopf method for the plane strain conditions. The crack faces are in contact with the friction. The plastic zone going out of the crack tip at an angle to the plane interface is modelled as a straight line of a displacement discontinuity, which consists of two parts. In the adjacent part to the crack tip modelling a process zone, the tangential and normal displacement discontinuity is assumed. A tangential displacement discontinuity only takes place in the rest part. An inclination angle between the plastic zone and the interface is determined by the criterion of energy dissipation rate maximum. The dimensions of the entire plastic zone, destruction zone, and shear opening of the crack at its tip are determined. An influence of the crack faces friction, load, mechanical characteristics of the material on the parameters of the plastic zone, and the stress-strain state near the crack tip is studied.

Key words: interfacial crack, contact of the crack faces, plastic zone, destruction zone.

Вступ.

Концентрація напружень біля вершини тріщини у квазікрихких і пластичних матеріалах є джерелом розвитку пластичної зони у тілі, яка суттєво впливає на його напружено-деформований стан (НДС). У випадку тріщини на межі розділу різних матеріалів існують додаткові фактори, які необхідно враховувати при розрахунках НДС. Зокрема, при дії зсувних навантажень на кусково-однорідне тіло з міжфазною тріщиною біля однієї з вершин тріщини відбувається контакт берегів, який охоплює область, співрозмірну з довжиною тріщини. Опис цього явища здійснюється в рамках контактної моделі міжфазної тріщини, запропонованої Комніноу [7, 8] та розвинутої у численних публікаціях [1, 4, 9, 14, 15, 21, 28, 33]. При цьому контакт берегів тріщини не усуває концентрацію напружень в околі вершини, а отже, і появу пластичної зони.

Розрахунок параметрів пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини є складною математичною проблемою, яку розв'язували переважно чисельними методами. Зокрема, Shih і Asaro в [35] за допомогою методу скінченних елементів виконали числовий розрахунок пружно-пластичного поля в умовах маломасштабної текучості біля вершини розкритої міжфазної тріщини на межі розділу пружно-пластичного і лінійно-пружного матеріалів під дією змішаного зовнішнього навантаження. Було виявлено, що зі збільшенням навантаження пластична зона витягується переважно у напрямку результуючого вектора зовнішніх зусиль та встановлено утворення контактної зони, яка необов'язково прилягає до вершини тріщини. Також метод скінченних елементів використали Aravas і Sharma для розв'язання задачі про пластичну зону біля вершини

тріщини, що лежить на межі пружно-пластичного матеріалу і жорсткої підкладки, за наявності безфрикційного контакту її берегів і дії розтягувального зовнішнього навантаження в умовах плоскої деформації [2] та плоского напруженого стану [3]. Деформація нелінійно зміцнюваного пружно-пластичного матеріалу описувалась рівнянням Рамберга – Осгуда деформаційної теорії пластичності. Виконані числові розрахунки НДС виявили відхилення напружень від пружного розв'язку за моделлю Комніноу. Встановлено, що внаслідок контакту берегів маломасштабна пластична зона прилягає до контактуючої частини берегів і витягнута вздовж межі розділу. Nakatani та ін. в [30] в рамках континуальної теорії з лініями ковзання та дискретної дислокаційної теорії пластичності чисельними методами дослідили в умовах плоскої деформації маломасштабну пластичну течію біля вершини стаціонарної тріщини на межі розділу пластичного монокристалу і жорсткого матеріалу. Виявлено утворення двох смуг ковзання, які в умовах двовісного розтягу поширюються з вершини тріщини під гострим і тупим кутом до межі розділу.

Експериментальні дослідження процесів руйнування в твердих тілах показали, що пластична зона безпосередньо біля вершини тріщини містить порівняно малу область деструкції матеріалу з дуже високим рівнем деформацій [17, 24, 25]. Цей фактор також потребує врахування при дослідженні НДС біля вершини міжфазної тріщини. Одним із шляхів розв'язання даної проблеми є адаптація до її завдань основних положень комплексної моделі міжфазної тріщини, розвинутої для дослідження зони передруйнування у менш тріщиностійкому матеріалі композитного з'єднання [19, 23]. В ній зона передруйнування моделюється лінією розриву переміщення, що складається з двох частин. У першій з них зона передруйнування моделюється відрізком, на якому зазнає розриву нормальне переміщення. У частині цього відрізка, прилеглій до вершини тріщини, додатково вводиться розрив дотичного переміщення, моделюючи в такий спосіб зону деструкції.

Метою даної роботи є розвиток моделі пластичної зони в кінці міжфазної тріщини з контактуючими берегами на початковому етапі розвитку зони, коли її довжина значно менша порівняно з довжиною області контакту. По аналогії з комплексною моделлю міжфазної тріщини в [19, 23] передбачається, що розвиток зони відбувається у два етапи. На першому етапі після навантаження тіла і утворення контактної зони у більш пластичному матеріалі композитного з'єднання виникає вузька пластична зона. Оскільки її поява не усуває концентрацію напружень біля вершини тріщини, це призводить на другому етапі розвитку до зародження у прилеглій до вершини тріщини частині пластичної зони області підвищеної деформації матеріалу – області деструкції. В даній роботі визначення їх параметрів в умовах плоскої деформації базується на використанні елементів моделей Дагдейла [11] і Леонова – Панасюка [27] та зводиться до розв'язання наступних двох задач.

У першій задачі за допомогою методу Вінера – Гопфа виконано розрахунок параметрів початкової пластичної зони, яка моделювалася бічною лінією розриву дотичного переміщення, що виходить з вершини міжфазної тріщини з берегами, взаємодіючими за законом сухого тертя. Умови навантаження і конфігурація тіла враховувалися через коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини, який передбачався відомим. Орієнтація пластичної зони визначалась з умови максимуму швидкості дисипації енергії в зоні [5]. Отримані результати використано при розв'язанні другої задачі – про область деструкції, яка моделювалась додатковим розривом нормального переміщення у прилеглій до вершини тріщини частині пластичної зони.

У завершальній частині роботи подано результати числових розрахунків параметрів пластичної зони з внутрішньою зоною деструкції в частинному випадку кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною скінченної довжини, навантаженої на нескінченності однорідним зсувним навантаженням.

1. Визначення параметрів початкової пластичної зони.

В умовах плоскої деформації розглядається задача про початковий етап розвитку пластичної зони з вершини тріщини, розташованої у кусково-однорідному тілі на плоскій межі розділу двох різних ізотропних пружно-пластичних матеріалів з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2, що перебувають під дією зсувного навантаження. Даний етап полягає в утворенні біля вершини вузької пластичної зони-смуги у матеріалі з пружними сталими G_1, ν_1, який припускається більш пластичним. Пружно-пластичність матеріалів передбачає їх лінійну пружність всюди, крім пластичної зони.

Пластичну зону моделюємо прямою лінією розриву дотичного переміщення [34], що виходить з вершини тріщини під кутом α до межі розділу матеріалів. На лінії розриву, у відповідності з критерієм пластичності Треска – Сен-Венана, дотичне напруження дорівнює границі текучості першого матеріалу τ_{1s}.

У випадку дії на кусково-однорідне тіло з внутрішньою міжфазною тріщиною модель Комніноу передбачає велику і дуже малу за розмірами області контакту берегів біля протилежних вершин тріщини. Для визначеності приймаємо, що $G_1 < G_2$, а зсувне навантаження τ_{xy} діє у напрямку, вказаному на рис. 1. Тоді, згідно з висновками [1, 7, 9, 14, 33], довжина s контактної зони біля вершини O тріщини буде співрозмірною з довжиною тріщини L і значно більшою (при належному рівні навантаження) за довжину l пластичної зони на досліджуваному початковому етапі розвитку. Зауважимо, що для протилежного напрямку зсувних навантажень біля вершини O передбачаються екстремально малі розміри контактної зони, що призводить до задачі про маломасштабну пластичну зону біля вершини розкритої міжфазної тріщини, розв'язаної у [18].

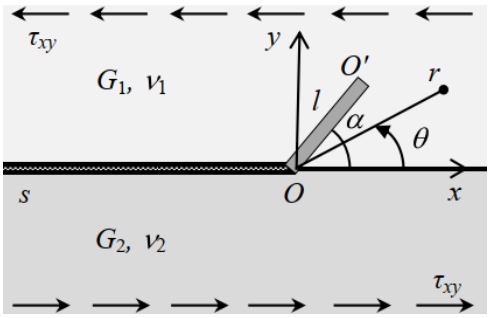


Рис. 1

Оскільки визначення параметрів пластичної зони вимагає дослідження НДС лише в її околі, як розв'язок відповідної крайової задачі теорії пружності будемо розглядати розв'язок задачі для кусково-однорідної ізотропної пружної площини, яка містить напівнескінченну міжфазну тріщину з контактуючими берегами, що взаємодіють за законом сухого тертя, і лінію розриву дотичного переміщення скінченної довжини, яка виходить з вершини тріщини у перший матеріал під кутом α до межі розділу матеріалів. Користуючись методом Прандтля зрощування асимптотичних розвинень [31], умову на нескінченності формулюємо у вигляді вимоги зшивання на відстанях $l << r << s$ шуканого розв'язку задачі, яка зображена на рис. 1, з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності про міжфазну тріщину з контактною зоною біля її вершини за відсутності бічної лінії розриву, відомим, зокрема, з робіт [1, 7, 9, 33]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами у вигляді (рис. 1):

$$\theta = 0;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ <u_\theta> = <u_r> = 0;$$

$$\theta = \alpha;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ <u_\theta> = 0; \tag{1}$$

$$\theta = \pm\pi;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ <u_\theta> = 0;\ \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta;$$

$$\theta = \alpha;\ r < l;\ \tau_{r\theta} = \tau_1;\ \theta = \alpha;\ r > l;\ <u_r> = 0; \tag{2}$$

$$\theta = \alpha;\ r \to \infty;\ \tau_{r\theta} = k_{II} F(\alpha) r^\lambda + o(1/r); \tag{3}$$

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{2}\left\{\left[2 + \lambda(1+\beta)\right]\cos(2+\lambda)\alpha - \lambda(1+\beta)\cos\lambda\alpha\right\};$$

$$\beta=\frac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)};\ e=\frac{G_1}{G_2}\ \ (G_1<G_2);\ \kappa_{1(2)}=3-4\nu_{1(2)}.$$

Тут $< f >$ – стрибок величини f; $\tau_1=\tau_{1s}\operatorname{sgn}\left(k_{II}F(\alpha)\right)$; μ – коефіцієнт тертя між берегами тріщини; β – так званий другий параметр Дундурса [12], який є мірою відмінності пружних властивостей з'єднаних матеріалів $|\beta|\le 0{,}5$; λ – дійсний корінь рівняння $\operatorname{ctg}\lambda\pi+\mu\beta=0$ на інтервалі (–1, 0), який є показником сингулярності напружень біля вершини тріщини з контактуючими берегами. При зсуві верхнього матеріалу в напрямку $\theta=\pi$ (рис. 1) коефіцієнт тертя повинен бути від'ємним. Коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці міжфазної тріщини k_{II} залежить від конфігурації досліджуваного тіла і прикладеного навантаження та вважається заданим за умовою. Для забезпечення стискувального напруження на берегах тріщини в контактній зоні $\theta=\pi, \sigma_\theta<0$ на k_{II} накладається умова $\beta k_{II}>0$ [26].

В кінці O' лінії розриву згідно з загальними положеннями про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл [6] реалізується асимптотика, яка є асимптотичним розв'язком однорідної задачі теорії пружності для площини з напівнескінченною лінією розриву дотичного переміщення. Зокрема, мають місце наступні асимптотики

$$\theta=\alpha;\ r\to l+0;\ \tau_{r\theta}\sim\frac{k}{\sqrt{2\pi(r-l)}};$$

$$\theta=\alpha;\ r\to l-0;\ \tau_{r\theta}\sim-\frac{2(1-\nu_1)}{G_1}\frac{k}{\sqrt{2\pi(l-r)}}, \tag{4}$$

де k – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який буде визначено в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що в (2) замість першої умови покладаємо

$$\theta=\alpha;\ r<l;\ \tau_{r\theta}=\tau_1-k_{II}F(\alpha)r^{\lambda}, \tag{5}$$

а на нескінченності напруження затухають як $o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [1, 7, 9, 33], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і крайових умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [36] і враховуючи другу умову (2) і умову (5), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа першої задачі у смузі $-\delta_1<\operatorname{Re}p<\delta_2$ (δ_1, δ_2 – достатньо малі додатні числа):

$$\Phi^+(p)+\frac{\tau_1}{p+1}+\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}=\operatorname{ctg}p\pi\cdot G(p)\Phi^-(p); \tag{6}$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty\tau_{r\theta}(\rho l,\alpha)\rho^p d\rho;\ \Phi^-(p)=\frac{G_1}{2(1-\nu_1)}\int_0^1\left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=\alpha}}\rho^p d\rho;$$

$$\tau_2=-k_{II}F(\alpha)l^{\lambda};\ G(p)=\frac{D_1(p)}{\cos^2 p\pi D_0(p)};$$

$$D_0(p)=2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\left[(e+\kappa_1)+(1+e\kappa_2)\right]\{1-\mu\beta\operatorname{tg}p\pi\};$$

$$D_1(p)=D_{10}(p)+\mu D_{11}(p);$$

$$D_{10}(p)=(1+\kappa_1)^2\left[(1+\kappa_1)\delta_1(p)+e(1+\kappa_2)\delta_2(p)+(1-e)\delta_3(p)\right]+$$

$$+(1+\kappa_1)\left[(1-e)^2\delta_4(p)+e^2(1+\kappa_2)^2\delta_5(p)\right]+$$

$$+e(1+\kappa_2)(1-e)\left[(1+e\kappa_2)\delta_6(p)+(1+\kappa_1)\delta_7(p)\right];$$

$$\delta_1(p)=\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha);$$

$$\delta_2(p)=p\sin 2\alpha\sin 2p\alpha+2\left(\sin^2\alpha\cos 2p\alpha+\sin^2 p\alpha-\sin^2 p\pi\right);$$

$$\delta_3(p)=\sin 2p\alpha\left[p\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\right]-4\sin^2 p\alpha\delta_1(p);$$

$$\delta_4(p)=4\left[\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha+\sin p\alpha\sin p(\pi-\alpha)\cos p\pi-\right.$$

$$\left.-p^2\sin^2\alpha\cos^2 p(\pi-\alpha)\right]-p\sin 2\alpha\left[\sin 2p\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\right];$$

$$\delta_5(p)=\sin^2\alpha\left(1-4p^2\sin^2 p\alpha\right)+p\sin 2\alpha\sin 2p\alpha-$$

$$-\sin p(\pi-\alpha)\left[\sin p(\pi+\alpha)+2\cos p\pi\sin p\alpha\right];$$

$$\delta_6(p)=2\cos p\pi\left[2\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha+p\sin 2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)-\right.$$

$$\left.-2p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha)\right];$$

$$\delta_7(p)=4\sin^2\alpha\left[\left(1-p^2\right)\sin^2 p\alpha-p^2\cos^2 p(\pi-\alpha)\right]+p\sin 2\alpha\sin 2p(\pi-\alpha);$$

$$D_{11}(p)=-(1+\kappa_1)\bar{D}_{11}(p)-2(1-e)\tilde{D}_{11}(p);$$

$$\bar{D}_{11}(p)=(1+\kappa_1)^2\bar{\delta}_1+e^2(1+\kappa_2)^2\bar{\delta}_2+4(1-e)^2\sin p\pi\bar{\delta}_3+$$

$$+(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)2\bar{\delta}_4+(1-e)(1+\kappa_1)2\bar{\delta}_5+e(1+\kappa_2)(1-e)\bar{\delta}_6;$$

$$\tilde{D}_{11}(p)=(1+\kappa_1)^2\tilde{\delta}_1+\left[e^2(1+\kappa_2)^2+2(1-e)^2+3e(1+\kappa_2)(1-e)\right]\sin p\pi\tilde{\delta}_2+$$

$$+(1+\kappa_1)\left[e(1+\kappa_2)\tilde{\delta}_3+2(1-e)\tilde{\delta}_4\right];$$

$$\bar{\delta}_1(p)=0{,}5\left[\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\right];$$

$$\bar{\delta}_2(p)=2p^2\sin^2\alpha\sin 2p\alpha+(1-2p\cos 2p\alpha)\sin\alpha\cos\alpha+$$

$$+\sin p(\pi-\alpha)\left[\cos p(\pi+\alpha)-2\sin p\pi\sin p\alpha\right];$$

$$\bar{\delta}_3(p)=p\sin\alpha\left[2p\sin\alpha\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha-\cos p\alpha\sin\left(p(\pi-\alpha)-\alpha\right)\right]+$$

$$+\sin p\alpha\left[\sin\alpha\cos\left(p\left(\pi-\alpha\right)+\alpha\right)-\sin p\left(\pi-\alpha\right)\right];$$

$$\overline{\delta}_4\left(p\right)=-p\sin\alpha\left(\cos\alpha+\sin\alpha\sin 2p\alpha\right)+\sin\alpha\cos\alpha\cos 2p\alpha+$$

$$+2\sin p\alpha\sin p\pi\sin p\left(\pi-\alpha\right);$$

$$\overline{\delta}_5\left(p\right)=-p\sin\alpha\left[\sin\alpha\sin 2p\alpha+\sin p\left(\pi-\alpha\right)\sin\left(p\left(\pi-\alpha\right)+\alpha\right)\right]-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha+$$

$$+\sin p\left(\pi-\alpha\right)\left[2\sin p\alpha\sin p\pi+\sin\alpha\sin\left(p\left(\pi-\alpha\right)+\alpha\right)\right];$$

$$\overline{\delta}_6\left(p\right)=2p^2\sin^2\alpha\sin p\alpha\left[2\cos p\alpha-\cos p\left(2\pi-\alpha\right)\right]+$$

$$+p\sin\alpha\left[2\cos\alpha\left(\sin^2 p\alpha-\sin^2 p\left(\pi-\alpha\right)\right)-\sin p\left(\pi+\alpha\right)\sin\left(p\left(\pi-\alpha\right)-\alpha\right)\right]+$$

$$+\sin\alpha\left[\cos\alpha-\cos\left(p\left(\pi-\alpha\right)+\alpha\right)\right]-4\sin p\alpha\sin p\pi\sin p\left(\pi-\alpha\right);$$

$$\tilde{\delta}_1\left(p\right)=\cos\left(p\left(\pi-\alpha\right)+\alpha\right)\left[\cos\alpha\sin p\left(\pi-\alpha\right)-p\sin\alpha\cos p\left(\pi-\alpha\right)\right];$$

$$\tilde{\delta}_2\left(p\right)=p\sin 2\alpha\sin p\left(\pi-2\alpha\right)-2p^2\sin^2\alpha\cos p\left(\pi-2\alpha\right)+2\sin p\alpha\sin p\left(\pi-\alpha\right);$$

$$\tilde{\delta}_3\left(p\right)=+p\sin\alpha\left[2\cos\alpha\sin^2 p\alpha-\cos p\left(\pi+\alpha\right)\cos\left(p\left(\pi-\alpha\right)-\alpha\right)\right]+p^2\sin^2\alpha\times$$

$$\times\left(\sin 2p\alpha+\sin 2p\pi\right)+\sin p\left(\pi-\alpha\right)\left[\cos\alpha\cos\left(p\left(\pi+\alpha\right)+\alpha\right)-2\sin p\pi\sin p\alpha\right];$$

$$\tilde{\delta}_4\left(p\right)=0,5p^2\sin^2\alpha\left(\sin 2p\alpha+\sin 2p\pi\right)+p\sin\alpha\left[\cos p\pi\sin p\left(\pi-\alpha\right)\sin\left(p-1\right)\alpha+\right.$$

$$\left.+2\cos\alpha\sin^2 p\alpha\right]-\sin p\left(\pi-\alpha\right)\sin p\alpha\left[\sin p\pi+\cos\alpha\sin\left(p\pi+\alpha\right)\right].$$

Функція $G(it)\,(-\infty<t<\infty)$ для $\mu\operatorname{ctg}\alpha<1$ має парну додатну дійсну і непарну уявну частини, які при $t\to\pm\infty$ прямують, відповідно, до 1 і 0, тому індекс функції $G(p)$ по уявній осі дорівнює 0 і справедлива факторизація за формулою [13]

$$G\left(p\right)=\frac{G^+\left(p\right)}{G^-\left(p\right)}\ \left(\operatorname{Re}p=0\right);\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G\left(z\right)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+\left(p\right)\ \left(\operatorname{Re}p<0\right),\\ G^-\left(p\right)\ \left(\operatorname{Re}p>0\right).\end{cases}$$

Крім того, має місце факторизація

$$p\operatorname{ctg}p\pi=K^+(p)K^-(p);\ K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma\left(1/2\mp p\right)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера). Тоді рівняння (6) можна звести до вигляду

$$\frac{\Phi^+\left(p\right)}{K^+\left(p\right)G^+\left(p\right)}+\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+\left(p\right)G^+\left(p\right)}-\frac{1}{K^+\left(-1\right)G^+\left(-1\right)}\right]+$$

$$+\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+\left(p\right)G^+\left(p\right)}-\frac{1}{K^+\left(-\lambda-1\right)G^+\left(-\lambda-1\right)}\right]=$$

$$= \frac{\Phi^-(p)K^-(p)}{pG^-(p)} - \frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} -$$

$$- \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \quad (\mathrm{Re}\ p = 0). \tag{7}$$

Функція у лівій частині (7) аналітична у півплощині $\mathrm{Re}\, p < 0,$ а функція в його правій частині аналітична в півплощині $\mathrm{Re}\, p > 0.$ Тоді, згідно з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, аналітична у всій площині комплексної змінної p, яка дорівнюватиме лівій і правій частинам рівності (7) у відповідних півплощинах. Для її визначення застосуємо теорему типу Абеля [32] до асимптотик (4) і знайдемо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k}{\sqrt{-2pl}} \ (p \to \infty, \mathrm{Re}\, p < 0);$$

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{k}{\sqrt{2pl}} \ (p \to \infty, \mathrm{Re}\, p > 0). \tag{8}$$

Враховуючи (8) і асимптотики $G^+(p) \to 1$, $K^+(p) \sim \sqrt{-p}$ $(p \to \infty,\ \mathrm{Re}\, p < 0)$, $G^-(p) \to 1$, $K^-(p) \sim \sqrt{p}$ $(p \to \infty,\ \mathrm{Re}\, p > 0)$, знаходимо, що ліва і права частини (7) прямують до нуля при $p \to \infty$. Тоді за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю, звідки випливає точний аналітичний розв'язок рівняння (6):

$$\Phi^+(p) = -K^+(p)G^+(p)\left\{\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]\right\} \ (\mathrm{Re}\, p < 0);$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{K^-(p)}\left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} +\right.$$

$$\left. + \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right] \ (\mathrm{Re}\, p > 0). \tag{9}$$

З (9) знайдемо асимптотику

$$\Phi^+(p) \sim \frac{-1}{\sqrt{-p}}\left[\frac{\tau_1}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right] \ (p \to \infty)$$

та в результаті її порівняння з (8) визначимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву:

$$k = -\sqrt{2l}\left[\frac{\tau_1}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]. \tag{10}$$

Прирівнюючи праву частину (10) до нуля через вимогу обмеженості напружень в кінці пластичної зони, прийдемо до наступного виразу для її довжини:

$$l=\left(\frac{2k_{II}F(\alpha)J(0)}{\sqrt{\pi}\tau_1 K^+(-\lambda-1)J(\lambda)}\right)^{-1/\lambda};\qquad(11)$$

$$J(x)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{(x+1)\ln|G(it)|+t\cdot\arg G(it)}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Орієнтацію початкової пластичної зони шукатимемо за критерієм максимуму швидкості дисипації енергії в зоні. З цією метою знаходимо величину дисипації енергії, яка в рамках обраної моделі, згідно з її визначенням у [5] та формулою для трансформанти $\Phi^-(1)$ у (6), дорівнює

$$W=\tau_1\int_0^l\langle u_r(r,\alpha)\rangle dr=-\frac{2(1-\nu_1)}{G_1}l^2\tau_1\Phi^-(1).$$

Підставляючи в цей вираз розв'язок (9) рівняння Вінера – Гопфа задачі та враховуючи (11), отримуємо наступну формулу для швидкості дисипації енергії в зоні:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\pi(1-\nu_1)\tau_{1s}^2}{2(2+\lambda)G_1}\left(\frac{|k_{II}(t)|}{\tau_{1s}}\right)^{-2/\lambda}\frac{1}{k_{II}(t)}\frac{dk_{II}(t)}{dt}w(\alpha);\qquad(12)$$

$$w(\alpha)=\frac{J_1(0)}{J(0)}\left(\frac{2|F(\alpha)|J(0)}{\sqrt{\pi}K^+(-\lambda-1)J(\lambda)}\right)^{-2/\lambda};$$

$$J_1(x)=\exp\left[\frac{-1}{\pi}\int_0^\infty\frac{(x+1)\ln|G(it)|-t\cdot\arg G(it)}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Приймаючи, що k_{II} є додатною зростаючою або від'ємною спадаючою функцією часу, приходимо до умови $w(\alpha)\to\max$, яка служитиме для розрахунку кута нахилу пластичної зони.

Згідно (11), довжина пластичної зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, що входить лінійно у коефіцієнт інтенсивності напружень k_{II}. Крім того, довжина пластичної зони тим більша, чим менша границя текучості матеріалу τ_{1s}, в якому відбувається її розвиток.

Використовуючи (9), за допомогою зворотного перетворення Мелліна можна знайти поле напружень біля вершини тріщини, що змінилося внаслідок утворення пластичної зони. Зокрема, нормальне напруження на лінії розриву, необхідне нижче для визначення області деструкції, дорівнює

$$\sigma_\theta(r,\alpha)=\tau_1\left[\frac{N(-1)}{D_1(-1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_i\frac{N(-1-\lambda_i)}{D_1'(-1-\lambda_i)}\frac{K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(-1)}\frac{J(\lambda_i)}{J(0)}\frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}\left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda_i}\right]\quad(r\ll l);\qquad(13)$$

$$D_1'(p)=dD_1(p)/dp;\ N(p)=N_1(p)+\mu N_2(p);$$

$$N_1(p)=(1+\kappa_1)\left[(1+\kappa_1)^2u_{11}+e^2(1+\kappa_2)^2u_{12}-(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_{13}\right]+$$

$$+(1-e)\Big[(1+\kappa_1)^2 v_{11}+2e(1+\kappa_2)(1+e\kappa_2)v_{12}+(1+\kappa_1)\big(e(1+\kappa_2)v_{13}+(1-e)v_{14}\big)\Big];$$

$$u_{11}(p)=0{,}5\big[\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\big];$$

$$u_{12}(p)=2p(p-1)\sin^2\alpha\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha+0{,}5\big[\sin 2\alpha+\sin 2p(\pi-\alpha)\big];$$

$$u_{13}(p)=(p-1)\sin 2\alpha\cos 2p\alpha;$$

$$v_{11}(p)=2(p-1)\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha-p\sin 2\alpha+\sin 2p(\pi-\alpha);$$

$$v_{12}(p)=2p(p-1)\sin^2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)\cos p\pi;$$

$$v_{13}(p)=4(p-1)\Big[p\sin^2\alpha\sin p\pi\cos p(\pi-2\alpha)-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha\Big]+v_{11}(p);$$

$$v_{14}(p)=2(p-1)\Big[p\sin^2\alpha\sin 2p(\pi-\alpha)-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha\Big];$$

$$N_2(p)=(1+\kappa_1)\Big[(1+\kappa_1)^2 u_{21}+e^2(1+\kappa_2)^2 u_{22}-2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_{23}\Big]-$$

$$-4(1-e)\Big[(1+\kappa_1)^2 v_{21}+(1+e\kappa_2)\big(e(1+\kappa_2)+2(1-e)\big)v_{22}-$$

$$-(1+\kappa_1)\big(e(1+\kappa_2)v_{23}+(1-e)\big)v_{24}\Big];$$

$$u_{21}(p)=\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha);\ u_{22}(p)=4p(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha+u_{21}(p);$$

$$u_{23}(p)=2(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha+u_{21}(p);$$

$$v_{21}(p)=\big(p\cos^2 p\alpha+\sin^2 p\alpha\big)\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha);$$

$$v_{22}(p)=p(p-1)\sin^2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)\sin p\pi;$$

$$v_{23}(p)=v_{21}(p)+v_{22}(p)+2p(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha;$$

$$v_{24}(p)=p^2\sin^2\alpha\big(\cos 2p\alpha+\sin^2 p(\pi-\alpha)\big)+\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha-$$

$$-p\sin^2\alpha\sin p\pi\sin p(\pi-2\alpha)-\sin^2 p(\pi-\alpha).$$

В (13) λ_i є коренями рівняння

$$D_1(-1-x)=0\,, \tag{14}$$

що задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_i>-1$.

На першому етапі розвитку пластичної зони, коли область деструкції ще не з'явилася, розкриття тріщини в її вершині згідно з прийнятими в (1) граничними умовами $<u_\theta(r,\pm\pi)>=0$, $<u_\theta(r,\alpha)>=0$ дорівнює нулю, тому відповідно до деформаційного критерію руйнування поява початкової пластичної зони не впливає безпосередньо на умови зрушення тріщини.

2. Визначення параметрів області деструкції.

Як показали числові розрахунки, рівняння (14) має корені у смузі $-1<\operatorname{Re}x<0$, що вказує на збереження концентрації напружень у вершині тріщини. У відповідності з експериментальними дослідженнями [17, 24, 25] це передбачає подальший розвиток пластичної зони шляхом виникнення в ній області деструкції матеріалу з високим рівнем як зсувних, так і відривних деформацій. У відповідності з комплексною моделлю міжфазної тріщини [19, 23] моделюватимемо область деструкції лінією довжи-

ни d, на якій зазнає розрив не лише дотичне, але і нормальне переміщення, а нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу σ_1.

Згідно з експериментальними даними [17, 24, 25] передбачається, що довжина області деструкції набагато менша від довжини всієї пластичної зони, тому досліджуване тіло можна розглядати як кусково-однорідну площину, що містить на межі розділу напівнескінченну тріщину з контактуючими за законом сухого тертя берегами, з вершини O якої під кутом α до межі розділу виходить напівнескінченна пряма лінія розриву, що складається з двох ділянок (рис. 2). На ділянці OO'', яка примикає до вершини тріщини, зазнають розрив дотичне і нормальне переміщення, а дотичне і нормальне напруження дорівнюють τ_1 і σ_1, відповідно. На другій ділянці зазнає розрив лише дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює τ_1. Даній моделі відповідає статична задача теорії пружності з крайовими умовами:

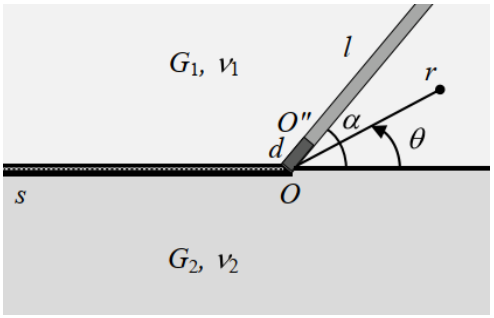


Рис. 2

$$\theta = 0;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ <u_\theta> = <u_r> = 0;$$

$$\theta = \pm\pi;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ <u_\theta> = 0;\ \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \qquad (15)$$

$$\theta = \alpha;\ <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0;\ \theta = \alpha;\ \tau_{r\theta} = \tau_1;$$

$$\theta = \alpha;\ r < d;\ \sigma_\theta = \sigma_1;\ \theta = \alpha;\ r > d;\ <u_\theta> = 0. \qquad (16)$$

При $r \to \infty$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \to 0$ в задачі, що зображена на рис. 1, розв'язок якої знайдено у попередній частині роботи. Зокрема, згідно з (13), маємо:

$$\theta = \alpha,\ r \to \infty;\ \sigma_\theta = f_1(\alpha, e, \nu_1, \nu_2)\tau_1 + \sum_{i=1}^{2} C_i f_{2i}(\alpha, e, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_i} + o(1/r), \qquad (17)$$

де $C_i = \tau_1 l^{-\lambda_i}$; l – знайдена вище довжина всієї пластичної зони; λ_i – корені рівняння (14) у смузі $-1 < \operatorname{Re} x < 0$, яких виявляється два і які є дійсними

$$f_1 = \frac{N(-1)}{D_1(-1)};\quad f_{2i} = \frac{N(-1-\lambda_i)}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(-1)} \frac{J(\lambda_i)}{J(0)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

Передбачається, що на тому етапі розвитку пластичної зони, коли область деструкції ще не з'явилась, нормальне напруження біля вершини тріщини при $\theta = \alpha$ є розтягувальним $\sigma_\theta > 0$.

У вершині O'' області деструкції має місце коренева особливість напружень

$$\theta = \alpha,\ r \to d + 0,\ \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-d)}} \qquad (18)$$

з коефіцієнтом інтенсивності K, який визначається в ході розв'язання задачі.

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна розв'язання сформульованої крайової задачі (15) – (18) зводиться до функціонального рівняння Вінера – Гопфа:

$$\Phi_1^+(p) + \frac{\sigma_1 - f_1\tau_1}{p+1} - \sum_{i=1}^{2} \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i}}{p + \lambda_i + 1} = -\operatorname{tg} p\pi \cdot H(p)\Phi_1^-(p)\ \ (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2); \qquad (19)$$

$$\Phi_1^+(p)=\int_1^\infty \sigma_\theta(\rho d,\alpha)\rho^p d\rho;\ \ \Phi_1^-(p)=\frac{G_1}{2(1-\nu_1)}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Big|_{\substack{r=\rho d\\ \theta=\alpha}} \rho^p d\rho;$$

$$H(p)=-\frac{\cos p\pi D_2(p)}{2\sin^2 p\pi D_1(p)};\quad D_2(p)=D_{20}(p)+4\mu D_{21}(p),$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа). Розв'язок рівняння (19) отримано аналогічно розв'язку рівняння (6) такого ж роду в попередній частині роботи і має вигляд:

$$\Phi_1^+(p)=-\frac{pH^+(p)}{K^+(p)}\left\{\frac{\sigma_1-f_1\tau_1}{p+1}\left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)}+\frac{K^+(-1)}{H^+(-1)}\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i}\left[\frac{K^+(p)}{pH^+(p)}+\frac{K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right]\right\}\ \ (\mathrm{Re}\, p<0);$$

$$\Phi_1^-(p)=K^-(p)H^-(p)\left[\frac{(\sigma_1-f_1\tau_1)K^+(-1)}{(p+1)H^+(-1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K^+(-1-\lambda_i)}{(p+1+\lambda_i)(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right]\ \ (\mathrm{Re}\, p>0); \qquad (20)$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln H(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}H^+(p)\ \ (\mathrm{Re}\, p<0),\\ H^-(p)\ \ (\mathrm{Re}\, p>0).\end{cases}$$

Застосовуючи теорему типу Абеля [33] до асимптотики (18) і використовуючи розв'язок (20), аналогічно до (10) знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву *OO''*:

$$K=-\sqrt{2d}\left[\frac{(\sigma_1-f_1\tau_1)K^+(-1)}{H^+(-1)}-\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right].$$

Прирівнюючи K до нуля, приходимо до трансцендентного рівняння для обчислення довжини області деструкції:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{f_{2i}K^+(-1-\lambda_i)J_2(0)}{(1+\lambda_i)K^+(-1)J_2(\lambda_i)}\left(\frac{d}{l}\right)^{\lambda_i}=\frac{\sigma_1}{\tau_1}-f_1; \qquad (21)$$

$$J_2(x)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{(x+1)\ln|H(it)|+t\cdot\arg(H(it))}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Поява області деструкції змінює НДС біля вершини тріщини, який тепер характеризуватиметься показником сингулярності напружень λ_{d1}, що визначається як найменший з інтервалу (–1, 0) корінь рівняння

$$D_2(-1-x)=0. \qquad (22)$$

Якщо при відсутності області деструкції розкриття тріщини в її вершині дорівнює нулю, то її поява призводить до ненульового зсувного зміщення берегів у вершині

$\delta = \lim\limits_{x\to -0}\left|\langle u\rangle_{y=0}\right|$, пов'язаного зі стрибком нормального переміщення $< u_\theta(0,\alpha) >$ співвідношенням $\delta = < u_\theta(0,\alpha) > / \sin\alpha$. Останній може бути знайдений з його зв'язку з функцією $\Phi_1^-(p)$, знайденого в ході розв'язання задачі:

$$< u_\theta(0,\alpha) > = -\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle^* \Bigg|_{p=0,\theta=\alpha} = -\frac{2(1-\nu_1)d}{G_1}\Phi_1^-(0).$$

Використовуючи (20) і умову $K = 0$, отримаємо:

$$\delta = -\frac{2(1-\nu_1)\tau_1}{G_1 \sin\alpha}\frac{d}{\sqrt{\pi H(0)}}\sum_{i=1}^{2}\frac{f_{2i}K^+(-1-\lambda_i)}{J_2(\lambda_i)}\left(\frac{d}{l}\right)^{\lambda_i}\frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}. \qquad (23)$$

Зсув берегів δ вносить вклад в загальне розкриття тріщини і повинен бути врахований при дослідженні умов зрушення тріщини.

3. Числовий аналіз параметрів початкової пластичної зони.

Як випливає з попереднього розгляду, параметри маломасштабної пластичної зони і зони деструкції повністю визначаються механічними характеристиками з'єднаних матеріалів та коефіцієнтом інтенсивності напружень k_{II}, який може бути знайдений окремо для кусково-однорідних тіл належної будови, а також величини і конфігурації зовнішнього навантаження шляхом числового або, при можливості, аналітичного розв'язання відповідної крайової задачі теорії пружності. Оскільки останнє не входило в цілі даної роботи, для ілюстрації застосування отриманого вище розв'язку задачі про пластичну зону і з метою аналізу його наслідків скористаємося результатами дослідження в [33] контактної зони у вершині внутрішньої міжфазної тріщини довжиною L у кусково-однорідній площині при її навантаженні на нескінченності сталим дотичним напруженням $q(\tau_{xy} \to -q$ при $x^2 + y^2 \to \infty$, рис. 1).

Згідно з розрахунками за формулою (12) критерій максимуму швидкості дисипації енергії призводить до двох значень кута нахилу початкової пластичної зони, один з яких є тупим і відповідає повороту зони за напрямком прикладеного навантаження, а інший дорівнює 0 і відповідає поширенню зони вздовж межі розділу. Це узгоджується з результатами числового моделювання пластичних зон біля вершин міжфазних тріщин в роботах [2, 3, 35] та з існуванням двох екстремумів у кутовій залежності дотичного напруження (3). Нижче ми обмежуємось розглядом зони з кутом нахилу, більшим за 0, оскільки задача про пластичну зону вздовж межі розділу в рамках комплексної моделі міжфазної тріщини має дещо відмінні від (1) – (4) крайові умови. Зазначимо, що дослідженням пластичних зон на межі розділу в рамках різних моделей присвячена досить велика кількість публікацій (див., зокрема, [16, 20, 29]).

Результати обчислень параметрів пластичної зони (кута нахилу α до межі розділу матеріалів, відносних довжин s/L контактної зони, l/L і d/L всієї зони та області деструкції) приведені в таблиці для деяких значень відношення модулів зсуву G_1/G_2 з'єднаних матеріалів з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, ряду значень коефіцієнта тертя μ, межі текучості $\tau_{1s} = 0{,}1G_1$ і зовнішнього навантаження $q = 0{,}02G_1$. При обчисленнях параметрів області деструкції опір відриву першого матеріалу був прийнятий рівним $\sigma_1 = 2G_1$. Вхідні параметри обрано так, щоб були забезпечені умови $d << l << s$ і $\mu \operatorname{ctg}\alpha < 1$, прийняті в досліджуваній моделі.

Згідно з розрахунками у прийнятих умовах навантаження довжина всієї пластичної зони при малих відношеннях модулів зсуву матеріалів G_1/G_2 зменшується, тоді

як при близьких значеннях G_1 і G_2 вона зростає зі збільшенням тертя між берегами тріщини на відміну від довжини області деструкції, яка збільшується зі збільшенням тертя при будь-яких $G_1/G_2 < 1$. Довжина пластичної зони виявляється майже на два порядки меншою від довжини контактної зони, а довжина області деструкції в свою чергу на два порядки менша від довжини всієї зони, тому при достатньо низьких навантаженнях використання розглянутої моделі є цілком виправданим.

При малих відношеннях G_1/G_2 кут нахилу пластичної зони спадає зі збільшенням тертя, тоді як при близьких значеннях G_1 і G_2 передбачається його зростання. Відповідно до (12), величина навантаження кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною не впливає на орієнтацію зони, яка, таким чином, залежатиме лише від пружних характеристик матеріалів композитного з'єднання і коефіцієнта тертя між берегами тріщини. У незалежності кута нахилу зони від зовнішнього навантаження полягає принципова відмінність висновків, які випливають з отриманого розв'язку, від результатів аналогічного дослідження в рамках моделі відкритої міжфазної тріщини [18]. Разом з тим, значення кута нахилу зони в кінці тріщини без урахування контакту берегів, обчислені при чистому зсуві у [18], близькі до знайдених в даній роботі.

G_1/G_2	μ	0	– 0,1	– 0,2	– 0,3	– 0,4	– 0,5
0,1	$\alpha°$	127,4	126,8	126,2	125,8	125,3	125,0
	s/L	0,3098	0,3133	0,3168	0,3203	0,3239	0,3276
	l/L	$8{,}347\cdot10^{-3}$	$7{,}987\cdot10^{-3}$	$7{,}646\cdot10^{-3}$	$7{,}319\cdot10^{-3}$	$7{,}008\cdot10^{-3}$	$6{,}714\cdot10^{-3}$
	d/L	$6{,}998\cdot10^{-5}$	$7{,}597\cdot10^{-5}$	$8{,}699\cdot10^{-5}$	$8{,}739\cdot10^{-5}$	$9{,}289\cdot10^{-5}$	$9{,}831\cdot10^{-5}$
	λ	– 0,5	– 0,4926	– 0,4851	– 0,4777	– 0,4703	– 0,4630
	λ_1	– 0,6575	– 0,6739	– 0,6900	– 0,7064	– 0,7222	– 0,7386
	λ_{d1}	– 0,4153	– 0,4148	– 0,4143	– 0,4140	– 0,4135	– 0,4132
0,9	$\alpha°$	127,8	128,2	128,6	129,1	129,8	130,7
	s/L	0,3052	0,3054	0,3056	0,3059	0,3061	0,3063
	l/L	$6{,}774\cdot10^{-3}$	$6{,}809\cdot10^{-3}$	$6{,}849\cdot10^{-3}$	$6{,}891\cdot10^{-3}$	$6{,}933\cdot10^{-3}$	$6{,}977\cdot10^{-3}$
	d/L	$7{,}553\cdot10^{-5}$	$8{,}747\cdot10^{-5}$	$1{,}006\cdot10^{-4}$	$1{,}152\cdot10^{-4}$	$1{,}317\cdot10^{-4}$	$1{,}509\cdot10^{-4}$
	λ	– 0,5	– 0,4995	– 0,4990	– 0,4986	– 0,4981	– 0,4976
	λ_1	– 0,7117	– 0,7296	– 0,7478	– 0,7668	– 0,7873	– 0,8100
	λ_{d1}	–0,4963	–0,4963	– 0,4964	– 0,4965	– 0,4966	– 0,4967

В таблиці наведено значення показників степеня сингулярності напружень у вершині до λ і після утворення початкової пластичної зони λ_1, а також після виникнення області деструкції λ_{d1}. Порівняння λ і λ_1 показує, що поява початкової пластичної зони призводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини $\lambda_1 < \lambda$, наслідком чого стає подальший розвиток зони шляхом утворення в ній області деструкції. Але і поява області деструкції не усуває концентрацію напружень у вершині тріщини, а лише призводить до незначного її послаблення порівняно з початковим рівнем: найменший корінь λ_{d1} рівняння (22) з інтервалу (–1, 0) є трохи вищим за показник сингулярності λ до утворення обох зон $\lambda_{d1} > \lambda$. Тому розвиток пластичної зони на даному етапі не завершується і повинен супроводжуватись утворенням нових зон, зокрема, згаданої вище пластичної зони вздовж межі розділу.

Розміри області контакту берегів міжфазної тріщини для заданої конфігурації навантаження не залежать від його модуля [1, 9, 33]. В той же час, довжина пластичної зони зростає зі збільшенням зсувного навантаження до межі текучості матеріалу $q > \tau_s$

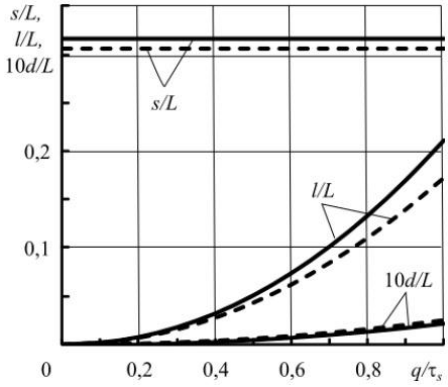


Рис. 3

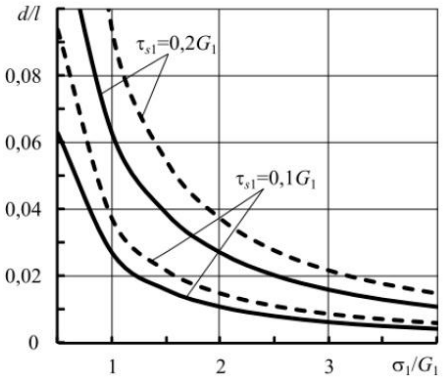


Рис. 4

і наближається за порядком величини до довжини області контакту (рис. 3: суцільні лінії – $G_1/G_2 = 0{,}1$, пунктирні лінії – $G_1/G_2 = 0{,}9$; $\tau_{1s} = 0{,}1G_1$, $\sigma_1 = 2G_1$, $\mu = -0{,}2$), порушуючи вихідну умову моделі про маломасштабність зони $l \ll s$. При цьому відбувається взаємний вплив пластичної і контактної зон, який в рамках комплексної моделі міжфазної тріщини можна дослідити аналогічно роботі [10]. Навпаки, за прийнятих при побудові рис. 3 умов між розмірами пластичної зони і зони деструкції зберігається закладена у вимогах досліджуваної моделі нерівність $d \ll l$, причому, згідно з (21), їх відношення не залежить від величини навантаження: $d/l = 0{,}0107$ для $G_1/G_2 = 0{,}1$ і $d/l = 0{,}0147$ для $G_1/G_2 = 0{,}9$.

Пропорції між розмірами пластичної зони і зони деструкції суттєво залежать не лише від відношення модулів зсуву з'єднаних матеріалів, але й від співвідношення між межею текучості і опором відриву матеріалу, в якому розвивається зона. На рис. 4 показано залежність d/l від величини опору відриву для $G_1/G_2 = 0{,}1$ (суцільні лінії) і $G_1/G_2 = 0{,}9$ (пунктирні лінії), $\mu = -0{,}2$ при сталому навантаженні $q = 0{,}2\tau_{1s}$. Згідно з рис. 4, відношення d/l є тим більшим, чим менший опір відриву матеріалу або більша його межа текучості, що може зумовити порушення прийнятої в моделі умови $d \ll l$ маломасштабності зони деструкції відносно пластичної зони. В такому випадку матеріал слід віднести до категорії квазікрихких, що потребує використання більш складного критерію міцності, ніж використаний в роботі однопараметричний критерій пластичності Треска – Сен-Венана. Для квазікрихкого матеріалу альтернативою розглянутій моделі, зокрема, може бути розвинута в [22] модель зони передруйнування біля вершини повністю розкритої міжфазної тріщини, яка базується на використанні квадратичного критерію міцності типу Мізеса – Хілла з межею текучості і опором відриву в якості критеріальних параметрів.

Оскільки з аналізу рис. 3 випливає, що для фіксованих характеристик матеріалів відношення d/l є сталим і не залежить від величини навантаження, тому згідно з (23) зсувне зміщення δ берегів тріщини у її вершині виявляється прямо пропорційним довжині зони деструкції і нелінійно зростатиме зі збільшенням навантаження. Це дозволяє припустити можливість зрушення тріщини внаслідок розриву міжчастинкових зв'язків у зоні деструкції та визначити граничне навантаження за тим чи іншим деформаційним критерієм.

Висновки.

В рамках комплексної моделі міжфазної тріщини розвинуто модель початкової пластичної зони в умовах зсуву, яка відповідає наступному механізму її розвитку у пружно-пластичному тілі. Біля вершини тріщини утворюється область контакту берегів та вузька пластична зона в одному з матеріалів композитного з'єднання, в приверг-

шинній частині якої виникає зона підвищеної деформації матеріалу – область деструкції. Їх сумісний вплив призводить до відносного зсуву вершин верхнього і нижнього берегів тріщини. Зі збільшенням навантаження розміри пластичної зони і зони деструкції та величина зсувного зміщення берегів тріщини у її вершині ростуть, що сприяє зрушенню тріщини.

РЕЗЮМЕ. В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гопфа виконано розрахунок параметрів вузької маломасштабної пластичної зони у пружно-пластичному кусково-однорідному тілі при зсуві біля вершини міжфазної тріщини, береги якої контактують з тертям. Пластична зона, що виходить з вершини тріщини під кутом до плоскої межі розділу середовищ, моделюється прямою лінією розриву переміщення, яка складається з двох ділянок. На прилеглій до вершини тріщини ділянці, що моделює область деструкції матеріалу, зазнають розрив як дотичне, так і нормальне переміщення. На другій ділянці розрив зазнає лише дотичне переміщення. Кут між пластичною зоною та межею розділу середовищ встановлюється з умови максимуму швидкості дисипації енергії в зоні. Визначено розміри всієї пластичної зони і області деструкції та зсувне розкриття тріщини в її вершині. Досліджено вплив тертя берегів тріщини, навантаження, механічних характеристик матеріалу на параметри пластичної зони і напружено-деформований стан в околі вершини тріщини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міжфазна тріщина, контакт берегів, пластична зона, зона деструкції.

1. *Antipov Yu.A.* An interface crack between elastic materials when there is dry friction // J. Appl. Math. Mech. – 1995. – **59**, N 2. – P. 273 – 287.
2. *Aravas N., Sharma S.M.* An elastoplastic analysis of the interface crack with contact zones // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**, N 3. – P. 311 – 344.
3. *Aravas N., Sharma S.M.* Plane stress elastoplastic solutions of interface cracks with contact zones // Mechanics of Materials. – 1991. – **12**, N 2. – P. 147 –163.
4. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone // Int. J. Fract. – 1982. – **18**. – P. 161 – 177.
5. *Cherepanov G.P.* General theory of failure // Mater. Sci. – 1986. – **22**, N 1. – P. 32 – 39.
6. *Cherepanov G.P.* Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill., 1979. – 935 p.
7. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1977. – **44**. – P.780 – 781.
8. *Comninou M.* The interface crack // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1977. – **44**, N 4. – P. 631 – 636.
9. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. Elasticity. – 1980. – **10**, N 2. – P. 203 – 212.
10. *Dudyk M.V.* Mutual influence of the faces contact and the pre-fracture zone near the tip of the interfacial crack // Strength, Fracture and Complexity. – 2020. – **13**, N 3. – P. 143 – 161.
11. *Dugdale D.* Yielding of steel sheets contains slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – **8**, N 2. – P. 100 – 104.
12. *Dundurs J.* Discussion on "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1965. – **32**, N 2. – P. 403 – 410.
13. *Gakhov F.D.* Boundary Value Problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 564 p.
14. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The Interface Crack under Combined Loading // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1988. – **55**, N 9. – P.580 – 586.
15. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 311 – 335.
16. *Kaminskii A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.* Slip Lines at the End of a Cut at the Interface of Different Media // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 6. – P. 491 – 495.
17. *Kaminskii A.A., Usikova G.I., Dmitrieva E.A.* Experimental Study of the Distribution of Plastic Strains Near a Crack Tip During Static Loading // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 11. – P. 892 – 897.
18. *Kaminsky A.A., Dudik M.V., Kipnis L.A.* On the Direction of Development of a thin Prefracture Process Zone at the Tip of an Interfacial Crack between Dissimilar Media // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 2. – P. 136 – 144.
19. *Kaminsky A.O., Dudyk M.V.* Analytical Methods of Modeling the Prefracture Zone Near an Interfacial Crack Tip (Review) // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 5. – P. 505 – 539.
20. *Kaminsky A.O., Dudyk M.V., Fenkiv V.M.* Starting of an Interfacial Crack with Contacting Faces from the Corner Point of a Polygonal Interface // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 5. – P. 398 – 409.

21. *Kaminsky A.O., Dudyk M.V., Fenkiv V.M., Chornoivan Y.O.* On the Scope and Limitations of the Comninou Model for a Crack at a Polygonal Interface // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 4. – P. 398 – 409.
22. *Kaminsky A.O., Dudyk M.V., Reshitnyk Y.V., Chornoivan Y.O.* An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials // Int. J. Solids and Struct. – 2023. – **267**. – N 112117.
23. *Kamins'kyi A.O., Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, N 2. – P. 117 – 132.
24. *Kohut I.S., Kalyta H.I.* Evaluation of the sizes of the process zone for quasibrittle notched specimens // Materials Sci. – 2008. – **44**, N 1. – P. 97 – 103.
25. *Kurchakov E.E.* Experimental Study of the Plastic Zone at the Front of a Mode I Crack // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 213 – 219.
26. *Leblond J.B., Frelat J.* Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**. – P. 289 – 307.
27. *Leonov M.Y., Panasyuk V.V.* Growth of the smallest cracks in solids // Prikladna Mech. (Appl. Mech.) – 1959. – **5**, N4. – P. 391 – 401 [in Russian].
28. *Loboda V.V.* Analytical derivation and investigation of the interface crack models // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, N 33. – P.4477 – 4489.
29. *Loboda V.V., Sheveleva A.E.* Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 5. – P. 566 – 572.
30. *Nakatani A., Drugan W.J., Van der Gissen E., Needleman A.* Crack tip fields at a ductile single crystal-rigid material interface // Int. J. Fract. – 2003. – **122**. – P. 131 – 159.
31. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. – New York: Wiley-Interscience, 1973. – 425 p.
32. *Noble B.* Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. 2nd ed. – New York: Chelsea Pub. Co., 1988. – 246 p.
33. *Ostryk V.I.* Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear // Mater. Sci. – 2003. – **39**, N 2. – P. 214–224.
34. *Panasyuk V.V., Savruk M.P.* Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Mater. Sci. – 1992. – **28**, N 1. – P. 41–57.
35. *Shih C.F., Asaro R.J.* Elasto-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of Small – Scale Yielding Fields // J. Appl. Mech. – 1989. – **56**. – P. 763 – 779.
36. *Uflyand Ya.S.* Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. – Raleigh: North Carolina State University. – 1965. – 402 p.

Надійшла 03.08.2023 Затверджена до друку 12.12.2023