УДК 378.016:517]:004-049.7](045)

https://doi.org/10.52058/2786-6300-2024-3(21)-954-965

Поліщук Тетяна Вікторівна кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри, завідувач вищої математики та методики навчання математики Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, вул. Садова 2, м. Умань, 20300, тел.: (067)-305-512-3, https://orcid.org/0000-0001-7690-7723

ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ СЕРЕДОВИЩ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ КУРСУ “МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ”

Анотація. Цифровий стиль життя неминуче веде до оволодіння новими компетенціями. Сучасне освітнє середовище все більше використовує цифрові технології для покращення і вдосконалення освітнього процесу в закладах освіти різного рівня.. Однак це вимагає володіння відповідними компетенціями самих викладачів, зокрема, здатністю працювати в сучасних цифрових навчальних середовищах. У контексті навчання математичного аналізу студентів педагогічних закладів вищої освіти, математичні цифрові середовища набувають особливого значення, оскільки можливості візуалізації в них навчального матеріалу значно переважають класичне представлення через дошку і крейду, вони сприяють кращому розумінню складних математичних концепцій та позитивно впливають на якість освітнього процесу та активність студентів у навчанні.

Стаття присвячена одній з актуальних проблем дидактики –використанню сучасних цифрових середовищ під час навчання. У роботі розкрито сучасні тенденції використання цифрових середовищ Geogebra та Desmos під час вивчення математичного аналізу, курсу який забезпечує фундаментальну математичну підготовку майбутніх учителів фізики, математики та інформатики; визначено переваги використання цифрових ресурсів у контексті вивчення курсу, здійснено порівняння функціональних можливостей даних середовищ; наведено низку прикладів з методичними коментарями розв'язування задач із теми «Функції ціла частина числа» в середовищах Geogebra та Desmos. Результати дослідження підтверджують, що цифрові середовища можуть значно покращити якість освіти, адже відкривають нові можливості для підготовки студентів до викликів сучасного цифрового суспільства та сприяють активній участі студентів у вивченні математичних дисциплін.

Ключові слова: математичний аналіз, функція, цифрові математичні середовища, навчання, Geogebra, Desmos.

Polishchuk Tetiana Viktorivna candidate of Physical and Mathematical Sciences, head of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Sadova St.,2, Uman, 20300, tel: (067)-305-512-3, https://orcid.org/0000-0001-7690-7723.

USE OF MODERN DIGITAL ENVIRONMENTS DURING THE STUDIES OF THE COURSE «MATHEMATICAL ANALYSIS»

Abstract. The digital lifestyle inevitably leads to the acquisition of new competencies. The modern educational environment is increasingly using digital technologies to improve and improve the educational process in educational institutions of various levels. However, this requires the possession of the appropriate competencies of the teachers themselves, in particular, the ability to work in modern digital learning environments. In the context of teaching mathematical analysis to students of pedagogical institutions of higher education, mathematical digital environments are of particular importance, since the possibilities of visualizing educational material significantly outweigh the classical presentation through a blackboard and chalk, they contribute to a better understanding of complex mathematical concepts and have a positive effect on the quality of the educational process and the activity of students in training.

The article is devoted to one of the current problems of didactics - the use of modern digital environments during education. The article is reveals modern trends the using of Geogebra and Desmos digital environments during the study of mathematical analysis; the advantages of using digital resources in the context of studying the course were determined, the functional capabilities of these environments were compared; a number of examples with methodical comments on solving problems from the topic «Functions integer part of a number» in the Geogebra and Desmos environments are given. The course «Mathematical analysis» provides fundamental mathematical training for pre-service teachers of physics, mathematics and informatics The results of the study confirm that digital environments can significantly improve the quality of education, because they open up new opportunities for preparing students for the challenges of the modern digital society and contribute to the active participation of students in the study of mathematical disciplines.

Keywords: mathematical analysis, function, digital mathematical environments, learning, Geogebra, Desmos.

Постановка проблеми. Цифрові зміни у світі суттєво вплинули та продовжують впливати на різні галузі життєдіяльності суспільства. Швидкий розвиток технологій не лише революціонізував наш спосіб спілкування та

взаємодії один з одним, але й змінив галузі, економіку та спосіб життя в усьому світі. Все більше сфер людської діяльності отримують відображення та розвиток в інтернет-просторі. Саме, інтернет та мобільні технології зіграли значну роль у збільшенні швидкості доступу до інформації та сервісів, усуненню бар'єрів у навчанні, дослідженнях та спілкуванні. Сучасний здобувач освіти не уявляє свого життя без мережі Інтернет, яка фактично стала різновидом сучасного освітнього простору. Зростання кількості смартфонів і мобільних додатків змінило спосіб доступу до інформації та виконання повсякденних завдань. Проте, разом із цими досягненнями з'являються занепокоєння щодо безпеки та цифрового розриву.

На сучасному етапі розбудови освітньої системи цифрові технології займають одну з найважливіших ролей в дидактичній системі майбутнього вчителя-предметника. Надзвичайно важливо, умовах глобальної діджіталізації освіти, вже з самого початку готувати здобувачів вищої освіти до нових викликів нашого сьогодення, зокрема до змін, які приносить розвиток цифрових технологій.

Курс «Математичного аналізу» є однією з ключових складових математичної освіти для вчителя фізики, математики та інформатики. Використання цифрових середовищ у навчанні математичного аналізу не лише полегшує розуміння складних теорій, а й активно залучає студентів до процесу навчання та розвиває їхні цифрові навички, що вкрай необхідно для роботи майбутнього вчителя фізики, математики та інформатики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні існує вже чимала кількість наукових робіт, присвячених використанню цифрових ресурсів та інструментів під час вивчення як елементарного курсу математики, так і математичних університетських курсів.

Сучасним теоретичним та методичним засадам застосування цифрових ресурсів та інструментів при вивченні математичних дисциплін присвячено праці таких авторів, як М. І. Жалдак, Н. В. Морзе, О. О. Ракітіна, С. А. Раков, Ю. В. Триус, М. Астафьєва, H.-G. Weigand, L. Ball, E. Faggiano, Z. Lavicza, R. Weinhandl, B. Anđić, J. Naidoo, S. Reddy та ін. Про методичні аспекти навчання окремим розділам математичного аналізу з використанням цифрових технологій присвячено роботи З. В. Бондаренко, В. І. Клочка, Г. О. Михаліна, М. І. Шкіля, М.Я. Ігнатенка, В.В. Корольского, С.О. Семерікова, С.В. Шокалюк М. А. Кислової, К. І. Словак, Н. В. Рашевської та ін. Так, у роботах [1-3] висвітлено практичний досвід використання математичних середовищ та програм (GeoGebra, Maple, Maxima, Wolfram|Alpha, онлайн-калькулятори, мобільний додаток MalMath) у навчанні математичного аналізу студентів педагогічних університетів. Засоби активізації навчальної діяльності

майбутніх вчителів математики під час вивчення математичного аналізу. Авторами зроблено висновки, що активізувати пізнавальну діяльність в процесі вивчення математичного аналізу вдається завдяки поєднанню класичних способів розв'язання однієї і тієї ж самої задачі з сучасними програмними засобами. Крім того, дослідники виділили ряд проблем технічного та психолого-педагогічного характеру, які виникають у процесі впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), зокрема: проблеми через застарілість техніки, відсутність мережі Інтернет чи недостатню його швидкість; відсутність сформованих навичок користування ІКТ у студентів; використання студентами смартфонів не в навчальних цілях; непідготовленість педагогів до широкого впровадження ІКТ у навчальний процес; відсутність методичної та навчальної літератури; неможливість для викладача визначити рівень самостійності студентів при виконанні ними індивідуальних домашніх робіт тощо.

Незважаючи на чималу кількість робіт, присвячених використанню різноманітних ІКТ математичного призначення, проблема теорії й методики використання цифрових математичних середовищ під час вивчення курсу «Математичний аналіз» є розробленою недостатньо і вимагає постійного дослідження, адже з плином часу середовища кількісно збільшуються та якісно змінюються.

Мета статті - розкрити методичні особливості застосування цифрових математичних середовищ під час вивчення теми «Функції» курсу «Математичний аналіз».

Виклад основного матеріалу. Одним із ефективних засобів інформатизації математичної освіти є застосування цифрових середовищ у процесі навчання математичних дисциплін. Використання сучасних цифрових середовищ під час вивчення курсу «Математичний аналіз» може бути корисним з кількох причин. Насамперед, такі середовища дозволяють візуалізувати, створювати анімації та динамічні візуалізації складних математичних концепцій і об'єктів, які важко уявити в реальному світі. Візуалізація – це ще один цінний аспект сучасного освітнього середовища який допомагає студентам краще усвідомлювати та запам'ятовувати ці концепції. Наприклад: графічне відображення функцій та їх властивостей. З використанням середовищ для візуалізації математичних об'єктів можна створювати графіки функцій, що допомагає студентам краще розуміти їх властивості та поведінку. Саме візуальне представлення матеріалу спонукає студентів до глибшого розуміння математичного аналізу, оскільки вони можуть бачити зв'язки між різними поняттями. З використанням цифрових середовищ можна створювати віртуальні демонстрації геометричних побудов

та перетворень. Крім того, сучасні цифрові математичні середовища створюють широкі можливості для практичної підготовки здобувачів освіти, оскільки через них студенти можуть отримати доступ до великого банку практичних завдань, в тому числі інтерактивних та можливості інтерактивної комунікації. Використання цифрових ресурсів допомагає студентам розвивати навички роботи з програмним забезпеченням включаючи основи роботи з математичними пакетами, аналітичними інструментами, графічними редакторами та редакційними програмами, наприклад LaTEX; через аналіз та обробку математичних даних розвивати аналітичні навички та вміння працювати з числовими та графічними даними.

Математичний аналіз є традиційним курсом, що забезпечує фундаментальну математичну підготовку майбутнього вчителя та готує його до професійної діяльності. Це надає вагомості курсу як складової системи професійної підготовки сучасного вчителя математики, фізики та інформатики. За діючими навчальними планами для здобувачів вищої освіти, спеціальностей 014.04 Середня освіта (Математика), 014.06 Середня освіта (Фізика) та 014.09 Середня освіта (Інформатика) в УДПУ імені Павла Тичини навчальна дисципліна «Математичний аналіз» вивчається протягом трьох семестрів, починаючи з першого курсу. Упродовж цього часу студенти мають опанувати такі розділи математичного аналізу: елементи теорії нескінченно малих, диференціальне та інтегральне числення функції однієї та кількох змінних; ряди. Ці знання надзвичайно важливі для вивчення наступних математичних курсів, таких як: основи векторного та тензорного аналізу, комплексний аналіз, диференціальні та інтегральні рівняння, диференціальна геометрія, теорія ймовірностей та математична статистика.

Майбутній вчитель фізики, математики та інформатики, повинен мати добре розвинену просторову уяву і просторове мислення, без яких неможливо інтерпретувати аналітичні дані про функції стосовно до певного геометричного об’єкта. У зв’язку з вище сказаним, виникає об’єктивна необхідність удосконалення процесу навчання математичного аналізу шляхом активного використання сучасних цифрових математичних середовищ. Адже під час вивчення інших математичних курсів здобувачі вищої освіти зможуть також використовувати дані середовища, що позитивно вплине на розвиток цифрової компетентності майбутнього вчителя і посилить професійну готовність у [4].

Вивченню поняття «Функція» приділяється особлива увага в курсі математичного аналізу. Оскільки функції використовуються для моделювання та опису різноманітних явищ у реальному світі (рух тіл, зміни температури,

фінансові показники тощо), вони дозволяють аналізувати та передбачати зміни у цих явищах. Функції є основою теорії диференціального та інтегрального числення, що є ключовими концепціями математичного аналізу. Аналіз функцій є важливим для вирішення завдань оптимізації. Визначення екстремумів функцій дозволяє знаходити максимуми та мінімуми, що має важливе значення в різних галузях, таких як економіка, інженерія та природничі науки. Функції є важливою складовою математичної мови. Вони дозволяють точно та компактно виражати математичні ідеї та зв'язки між різними величинами. Розуміння функцій є передумовою для вивчення багатьох інших розділів математики, включаючи алгебру, геометрію, диференціальні рівняння та інші математичні дисципліни. Вивчення функцій допомагає розвивати аналітичне мислення, розуміння взаємозв'язків та навички вирішення реальних завдань у різних галузях знань. У різних питаннях теорії чисел, математичного аналізу, теорії рекурсивних функцій та інших питаннях математики використовуються поняття цілою й дробової частин дійсного числа.

З огляду на вищесказане, важливо які цифрові інструменти викладач буде використовувати під час пояснення теоретичного матеріалу, розв’язування задач та проведення контролю. За традиційною методикою вивчення цієї теми дослідження властивостей функцій базується на побудові їхніх графіків за відомими точками на аркуші паперу чи дошці. Дослідження впливу коефіцієнтів на розміщення графіків на координатній площині потребує багато часу, який витрачається на складання таблиць значень, що гальмує процес сприймання та узагальнення матеріалу. Значно ефективніше та наочніше процес вивчення функцій проходитиме з використанням цифрових середовищ Geogebra та Desmos [3, 5].

Побудова моделей графіків функцій в зазначених вище середовищах значно вивільнює час, що використовувався на складання таблиць значень функцій, і в свою чергу стимулює процес більш глибокого засвоєння матеріалу завдяки можливості проаналізувати властивості певного типу функцій на значно більшому числі побудованих графіків. За рахунок використання зазначених середовищ у доступній формі досягається візуалізація зміни положення графіка функції на координатній площині в залежності від зміни коефіцієнтів та області задання функції.

Наведемо декілька прикладів, використання математичних середовищ під час вивчення теми «Функції» курсу «Математичний аналіз» в педагогічному закладі вищої освіти.

Завдання 1. Побудувати графік функцій а) $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$, б) $y = 2^x$, в) $y = [\sin x]$.

Коментар 1. Для виконання даного завдання (незалежно від середовища) достатньо в стрічку команд ввести за допомогою віртуальної клавіатури функцію і програми виконують побудови (рис. 1).

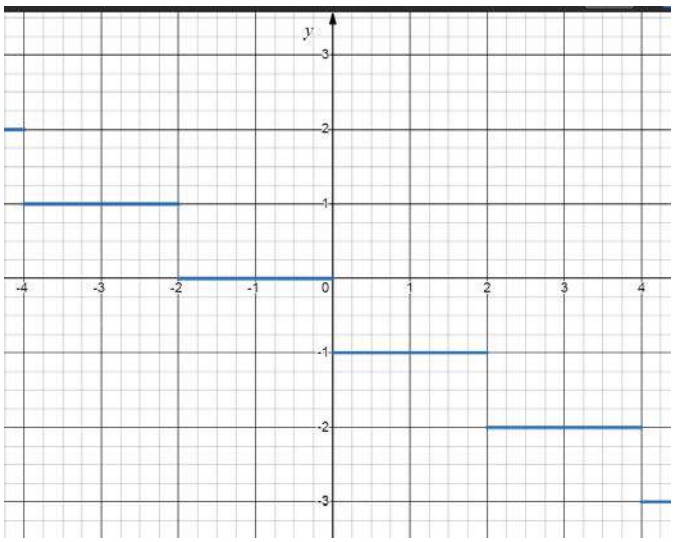


Рис. 1. *Побудова графіка функції* $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$ *в середовищі Desmos.*

б) Щоб виконати дане завдання класичним способом, необхідно діяти за наступним алгоритмом: будуємо прямі $y = n$, де $n \in Z$. Досліджуємо одну із смуг, утворених прямими $y = n$ та $y = n + 1$. Точки перетину прямих $y = n$, $y = n + 1$ із графіком функції $y = 2^x$ належать графіку функції $y = 2^x$, оскільки їх координати - цілі числа. Інші точки графіка функції $y = 2^x$ в смузі, що розглядається одержимо як проєкцію частини графіка $y = 2^x$, яка попала в цю смугу, на пряму $y = n$, оскільки будь яка точка цієї частини графіка функції $y = 2^x$ має таку ординату яка задовольняє умову $[y_0] = n$. У кожній іншій смузі, де є точки графіка функції $y = 2^x$, побудова проводиться аналогічно (рис. 2).

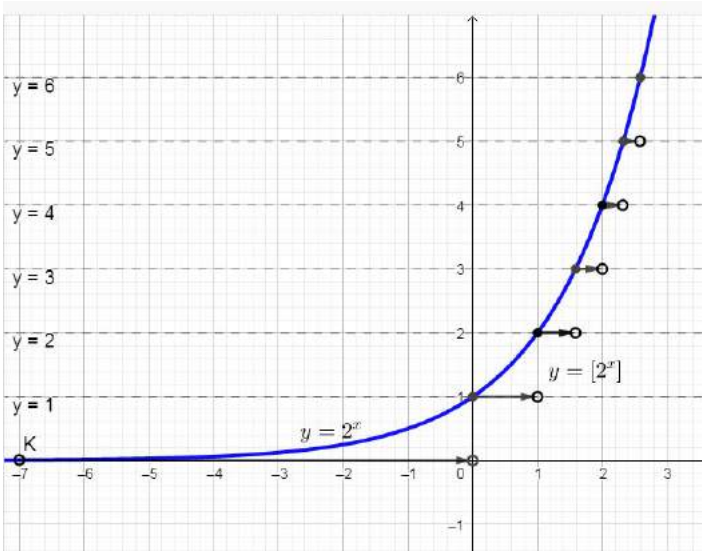


Рис. 2. *Побудова графіка функції* $y = 2^x$ *в середовищі Geogedra.*

в) для виконання даного завдання в середовищі Desmos достатньо виконати нескладні побудови: в стрічці команд прописуємо вихідну функцію *y=sinx* (даний крок виконуємо для кращої наочності), і бачимо графік функції. Для відокремлення цілої частини функції, використовуємо команду «*floor(x)*» (до речі вона є доступною і в Geogebra). У стрічку команд вписуємо *y=floor(sin(x))*. Команда «*floor*» округлює значення синуса до найближчого меншого цілого. Змінивши діапазон графіка, щоб відобразити кілька періодів функції, наприклад, від 0 до 4π ми побачимо графік цілої частини функції (рис. 4).

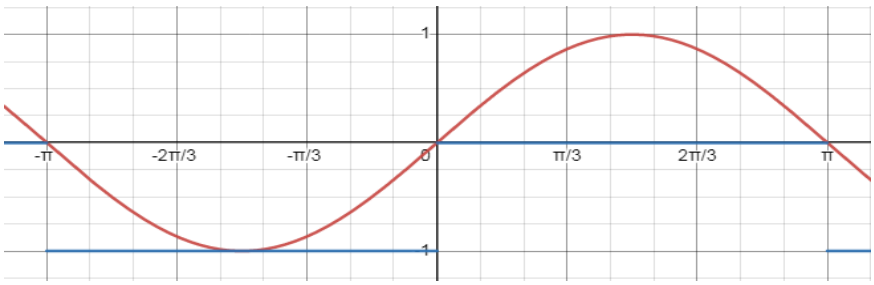


Рис. 3. *Побудова графіка функції в середовищі Desmos.*

в) $y = \sqrt{[x] - x} + x$.

с) На жаль, функція «*floor(x)*», яка використовується для отримання цілої частини числа в Desmos, не підтримується для змінних. Таким чином, не можна просто використовувати «*floor(x)*» для визначення цілої частини виразу $y = \sqrt{[x] - x} + x$. Застосуємо наступний підхід: замість використання команди «*floor(x)*» використайте округлення до найближчого меншого цілого,

що виражається за допомогою функції «*floor(x)*». В стрічці команд записуємо на мові Latex вираз *y=sqrt(floor(x)-x)+x*. Змінивши діапазон графіка, щоб відобразити кілька періодів функції, Desmos автоматично будує графік функції. Спостерігаючи за графіком, можемо визначити період функції 1 (рис. 6).

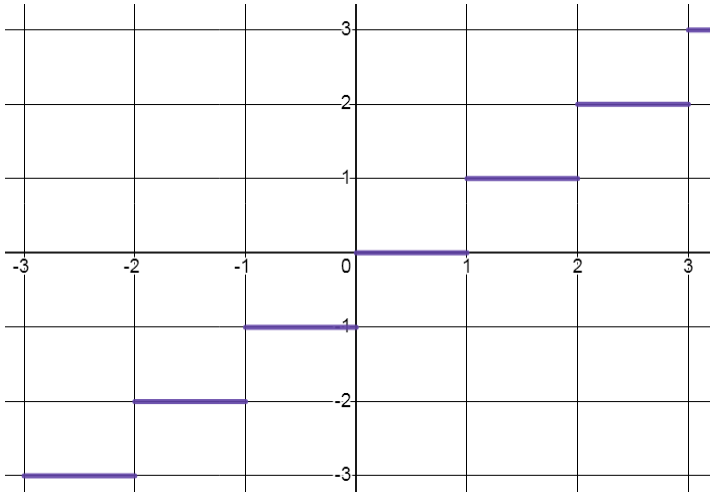


Рис. 6. *Побудови в середовищі Desmos.*

Завдання 2. Дослідити на періодичність функції:
а) $y = x - [x]$; б) $y = cos[x]$.

Коментар. Жодне цифрове середовище не має прямого інструменту для виконання такого завдання. Проте, виконавши нескладні геометричні побудови можна легко розв'язати поставлену задачу.

а) Як відомо поведінка функції $y = [x]$ визначається властивостями функції $y = x$. Такі властивості, як область визначення, парність, періодичність характерні для обох функцій. Функція цілої частини $y = [x]$ задовольняє рівність $[x + T] = [x] + T$ для всіх $T \in Z$.

Отже, $f(x + T) = (x + T) - [x + T] = x + T - [x] - T = f(x)$, а найменше ціле додатне T, що задовольняє умову дорівнює 1. Отож період функції T=1 (рис. 4).

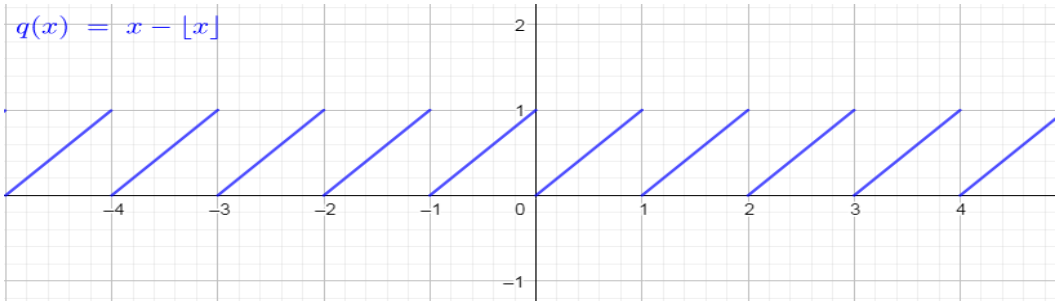


Рис. 4. *Графік функції $y = x - [x]$ в середовищі Geogebra.*

в) Пригадаємо алгоритм побудови графіка функції виду $y = f([x])$. Будуємо прямі $x = n$, де $n \in Z$. Досліджуємо одну із смуг, утворених прямими $x = n$ та $x = n + 1$. Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ із цими прямими належать графіку функції $y = f([x])$, оскільки їх абсциси - цілі числа. Інші точки графіка функції $y = f([x])$, в смузі, що розглядається одержимо як проекцію частини графіка $y = f(x)$, яка попала в цю смугу, на пряму $x = n$, оскільки будь яка точка цієї частини графіка функції $y = f(x)$ має таку абсцису яка задовольняє умову $[x_0] = n$. У кожній іншій смузі, де є точки графіка функції $y = f(x)$, побудова проводиться аналогічно. Як бачимо з графіка - період функції дорівнює 1. (рис. 5).

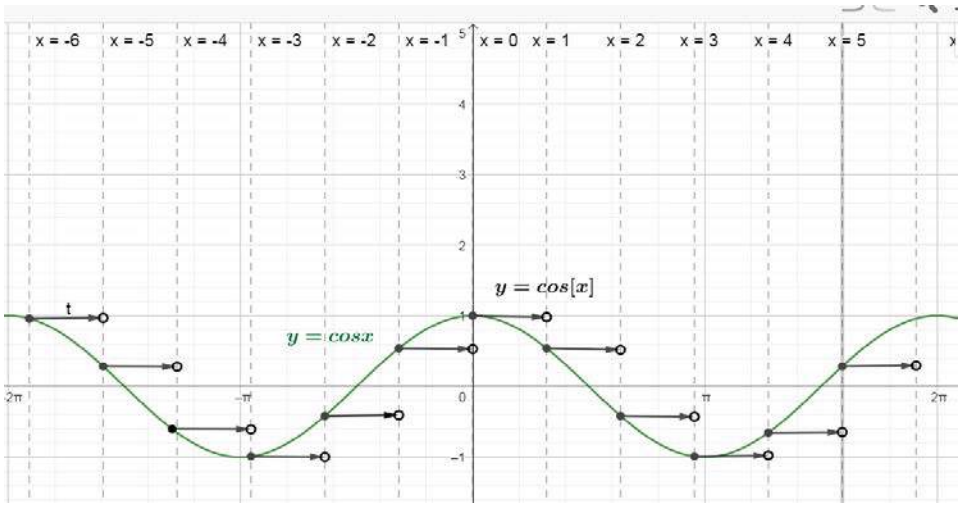


Рис. 5. Побудови в середовищі Geogebra.

Виконуючи різноманітні вправи в зазначених вище середовищах нам вдалося скласти порівняльну таблицю (табл. 1).

Таблиця 1.

Середовище	Вільний доступ	Онлайн режим роботи	Знання мов програмування	Простота інтерфейсу	Наявність україномовного інтерфейсу	Можливість порівняння своїх робіт у просторах та збереження	Відсутність помилок та збоїв
Geogebra	+	+	-	+	+	+	+
Desmos	+	+	-	+	+	-	+

Під час практичних занять пропонуємо здобувачам вищої освіти використовувати математичні середовища з метою перевірки самостійно отриманих розв'язків, виконання проміжних обчислень та візуалізації навчального матеріалу.

Висновки. Досвід використання цифрових середовищ у процесі вивчення математичного аналізу показує позитивні результати, оскільки, сучасні цифрові технології достатньо ефективно замінюють ряд традиційних засобів навчання, що використовуються для посилення наочності навчального матеріалу. Застосовуючи цифрові математичні середовища Geogebra та Desmos на заняттях з математичного аналізу, викладачу вдається досягти реалізації таких цілей навчання як розвиток пізнавальних потреб, навичок та вмінь в експериментально-дослідницькій діяльності, системного мислення, цифрової культури та компетентності; підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу дисципліни та його об'єму, ефективності самоосвіти студентів. Використання цифрових ресурсів допомагає студентам розвивати навички роботи з програмним забезпеченням, зокрема, основи роботи з математичними пакетами, аналітичними інструментами, графічними редакторами та редакційними програмами, наприклад LaTEX; розвивати аналітичні навички та вміння працювати з числовими та графічними даними через аналіз та обробку математичних даних. У подальшому планується здійснити порівняльний аналіз існуючих онлайн-сервісів та їх функціональних можливостей для розв'язання задач математичного аналізу.

Література:

1. Бояришева Т., Герич М., Погоріляк О., Синявська О., Тегза А. Засоби активізації навчальної діяльності майбутніх вчителів математики під час вивчення математичного аналізу. *Фізико-математична освіта*. - 2022. - 37(5). с. 7–16. DOI: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-001

2. Коваль Т., Бесклінська О. Використання засобів візуалізації для створення електронних освітніх ресурсів у процесі навчання математичних дисциплін у закладах вищої освіти. *Інформаційні технології та засоби навчання*. - 2020. - 77(3). - с. 145–161. DOI:10.33407/itlt.v77i3.3411

3. Botuzova Y. Experience of using ict tools for teaching mathematical analysis to future teachers of mathematics. *Information Technologies and Learning Tools*. - 2020. - 75(1). - с. 153-169. DOI: 10.33407/itlt.v75i1.2530.

4. Polishchuk T. V., Voznosymenko D. A., Ishchenko H. V. The development of the digital competence by simulation in interactive mathematical packages. *Modern engineering and innovative technologies.* - 2022. - 21 (2). - p.139-143. DOI: https://doi.org/10.30890/2567-5273.2022-21-02-031

5. Polishchuk T. V. The modeling and solving applied problems of mathematical analysis using geogebra. *Topical issues of the development of modern science. Abstracts of the 6th International scientific and practical conference.* Publishing House "ACCENT". Sofia, Bulgaria. 2020. Pp. 118-127. URL: http://sci-conf.com.ua.

References:

1. Boyarishcheva, T., Gerych, M., Pohorilyak, O., Sinyavska, O., Tegza, A. (2022) Zasoby aktyvizatsii navchalnoi diialnosti maibutnikh vchyteliv matematyky pid chas vyvchennia matematychnoho analizu. [Means of activating the educational activity of future teachers of mathematics during the study of mathematical analysis]. Physical and mathematical education, 37(5), 7–16. [in Ukrainian].

2. Koval, T., Besklinska, O. (2020) Vykorystannia zasobiv vizualizatsii dlia stvorennia elektronnykh osvitnikh resursiv u protsesi navchannia matematychnykh dystsyplin u zakladakh vyshchoi osvity [The use of visualization tools for the creation of electronic educational resources in the process of teaching mathematical disciplines in institutions of higher education] Information *Technologies and Learning Tools.* - 2020. - 77(3). - c. 145–161. [in Ukrainian].

3. Botuzova, Y. (2020). Experience of using ict tools for teaching mathematical analysis to future teachers of mathematics. Information *Technologies and Learning Tools*. 75, 153-169. 10.33407/itlt.v75i1.2530. [in Ukrainian].

4. Polishchuk, T. V., Voznosymenko, D. A., Ishchenko, H.V. (2022) The development of the digital competence by simulation in interactive mathematical packages. *Modern engineering and innovative technologies*. 21 (2), 139-143. [in Ukrainian].

5. Polishchuk, T. V. (2020) The modeling and solving applied problems of mathematical analysis using geogebra. *Topical issues of the development of modern science. Abstracts of the 6th International scientific and practical conference.* Publishing House “ACCENT”. Sofia, Bulgaria, 118-127. [in English].