ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)
DOI:10.52058/2708-7530-2024-3(34)

VĚDA A PERSPEKTIVY

No 3(34)
2024



Ми з Україною

ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)
DOI:https://doi.org/10.52058/2695-1592-2024-3(34)

Věda a perspektivy

№ 3(34) 2024

Praha, České republika
2024

Multidisciplinární mezinárodní vědecký magazín "Věda a perspektivy" je registrován v České republice. Státní registrační číslo u Ministerstva kultury ČR: E 24142. № 3(34) 2024. str. 234

Zveřejněnorozhodnutímakademické radyMezinárodní Ekonomický Institut s.r.o. (zápis č. 103/2024 ze dne 21. březen 2024)

Vydavatel:
Mezinárodní Ekonomický Institut s.r.o. , Česká republika
International Economic Institute s.r.o. Praha, České republika se sídlem V Lázních 688, Jesenice 252 42
IČO 03562671 Praha, České republika
zastoupen Mgr. Markétou Pavlovou

Časopis vychází v rámci práce vydavatelské skupiny „Scientific Perspectives" a s vědeckou podporou: veřejné organizace „Ukrainian Assembly of Doctors of Sciences in Public Administration", veřejné organizace „Association of Scientists of Ukraine",Institut filozofie a sociologie Ázerbájdžánu Národní akademie věd (Baku, Ázerbájdžán)

Časopis je zařazen do mezinárodní vědeometrické databáze Index Copernicus (IC), mezinárodního vyhledávače Google Scholar a do mezinárodní vědeometrické databáze Research Bible



Šéfredaktor:
Karel Nedbálek - doktor práv, docent (Zlín, Česká republika)



Zástupce šéfredaktora:
Markéta Pavlova - ředitel, Mezinárodní Ekonomický Institut (Praha, České republika)



Dina Dashevska - geolog, geochemist Praha, Česká republika (Jeruzalém, Izrael)

Členové redakční rady:
Humeir Huseyn Achmedov **-** doktor pedagogických věd, profesor (Baku, Ázerbájdžán)
Iryna Zhukova -kandidátka na vědu ve veřejné správě, docentka (Kyjev, Ukrajina)
Jurij Kijkov - doktor informatiky, dr.h.c. v oblasti rozvoje vzdělávání (Teplice, Česká republika)
Vladimír Bačišin - docent ekonomie (Bratislava, Slovensko)
Peter Ošváth - docent práva (Bratislava, Slovensko)
Dina Dashevsky - geolog, geochemik Praha, Česká republika (Jerusalem, Israeli)
Yevhen Romanenko - doktor věd ve veřejné správě, profesor, ctěný právník Ukrajiny (Kyjev, Ukrajina)
Oleksandr Datsiy - doktor ekonomie, profesor, čestný pracovník školství na Ukrajině (Kyjev, Ukrajina)
Badri Getchbaya - doktor ekonomie, profesor, docent na Batumi State University. Shota Rustaveli (Gruzie)
Laila Achmetová - doktorka historických věd, profesorka politologie, profesorka UNESCO, mezinárodní žurnalistiky a médií na žurnalistické fakultě Kazašské národní univerzity (KazNU). al-Farabi (Kazachstán)
Oleksandr Nepomnyashy - doktor věd ve veřejné správě, kandidát ekonomických věd, profesor, řádný člen Vysoké školy stavební Ukrajiny (Kyjev, Ukrajina)
Michał Tomasz - doktor věd, docent katedry geografie regionálního rozvoje, University of Gdańsk (Polsko)

Články jsou vyvěšeny v redakci autora. Za obsah a pravopis zaslaných materiálů odpovídají autoři

© Mezinárodní Ekonomický Institut s.r.o. , Česká republika, 2024
© Vydavatelské skupiny „Scientific Perspectives", 2024
© autoři článků, 2024

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

OBSAH

SÉRIE “Ekonomika”

Nataliia Rozumovych 9
INTERNATIONAL FINANCIAL MANAGEMENT: CHALLENGES OF OUR TIME

Віктор Нам’ясенко 17
ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРСПЕКТИВ ТА ЗАГРОЗ РОЗВИТКУ ПОДІЛЬСЬКОГО ЕКОНОМІЧНОГО РЕГІОНУ В РОЗРІЗІ КОНЦЕПЦІЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ ЗАДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПІСЛЯВОЄННОГО РОЗВИТКУ; НА ОСНОВІ ДОСЯГНЕНИХ ПОКАЗНИКІВ

SÉRIE “Veřejná správa”

Larysa Kurnosenko 27
HISTORICAL DYNAMICS OF CRISIS CONCEPTS IN THE STATE ADMINISTRATION SPHERE

SÉRIE “Právní vědy”

Наталія Павловська 41
ПРИРОДА ПУБЛІЧНОГО АДМІНІСТРУВАННЯ ВЕТЕРИНАРНОЇ МЕДИЦИНИ В УКРАЇНИ

Ольга Стрєльцова, Діана Казбанова 51
ЕКОЦИД ТА ЗЛОЧИНИ ПРОТИ ДОВКІЛЛЯ: МІЖНАРОДНО-ПРАВОВІ ТА НАЦІОНАЛЬНІ АСПЕКТИ

SÉRIE “Pedagogika”

Ігор Оксенюк 63
МОЖЛИВОСТІ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ ТА ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ДЛЯ СТВОРЕННЯ ПЕДАГОГАМИ НАВЧАЛЬНОГО ВІДЕО

Ірина Тягай 75
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ ІННОВАЦІЙНОГО НАВЧАННЯ НА ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТТЯХ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Андрій Шуляк 83
ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИХ ІМПЛЕМЕНТАЦІЙ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В ОСВІТНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

SÉRIE “Psychologie”

Вікторія Малиш 93
ФОРМУВАННЯ ПРОГРАМНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ СТУДЕНТАМИ-ПСИХОЛОГАМИ ОСВІТНЬОЇ КОМПОНЕНТИ «ОСНОВИ ТРАВМАТЕРАПІЇ» У ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ «ПСИХОЛОГІЯ»

SÉRIE “Zeměpis”

Ірина Нетробчук, Юрій Білецький, Зоя Карпюк, Лариса Чижевська, Сергій Полянський, Валентина Стельмах, Юлія Семенюк, Роман Качаровський 104
ШЛЯХИ ЗБІЛЬШЕННЯ ПРИРОДНОГО РЕКРЕАЦІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДОРОСИНІВСЬКОЇ ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ ГРОМАДИ ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСТІ В УМОВАХ ДЕЦЕНТРАЛІЗАЦІЇ

Андрій Слащук, Ірина Поручинська, Володимир Поручинський, Роман Качаровський 117
ГЕОДЕМОГРАФІЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА НАСЕЛЕННЯ МАНЕВИЦЬКОЇ ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ ГРОМАДИ КАМІНЬ-КАШИРСЬКОГО РАЙОНУ ВОЛИНСЬКОЇ ОБЛАСТІ

SÉRIE “Technické vědy”

Лариса Ланова 133
ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ І STEAM -ТЕХНОЛОГІЇ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ТЕХНОЛОГІЙ ЯК ВИД ІННОВАЦІЙНОЇ ОСВІТНЬОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

SÉRIE "Peníze, finance a úvěr"

Olha Dymnich 144
INSURTECH AND PRIVATE PENSION INSURANCE IN UKRAINE: HARNESSING LIFE INSURANCE INNOVATIONS FOR FUTURE GROWTH

SÉRIE "Nápravná pedagogika"

Anna Tsybulko 163
THE EFFECTIVENESS OF SPEECH THERAPY MASSAGE IN THE CORRECTION OF STUTTERING

SÉRIE "Metody výuky fyziky"

Юрій Краснобокий, Ігор Ткаченко, Катерина Ільніцька 170
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИРОДЖЕННЯ ПРИРОДНИХ СИСТЕМ

SÉRIE "Správní právo"

Артем Зубко 182
СПЕЦИФІКА ПОЛІТИКО-АДМІНІСТРАТИВНОЇ РОБОТИ ОРГАНІВ МІСЦЕВОГО САМОВРЯДУВАННЯ

SÉRIE "Zemědělské vědy"

Наталія Бордюг, Оксана Алпатова, Вікторія Мельник-Шамрай, Людмила Демчук, Тетяна Курбет 193
ЕКОЛОГІЧНА ОЦІНКА ВПЛИВУ СКЛАДІВ МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ НА ГРУНТИ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

SÉRIE "Lékařské vědy"

Valeriia Kushnyr 204
DEVELOPMENT OF A DIAGNOSTIC TEST SYSTEM FOR CANCER DIAGNOSTICS AND ITS IMPACT ON MEDICINE

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

SÉRIE “Biologie”

Lyubov Sobolenko **212**
OVERVIEW OF THE CURRENT STATE AMPHIBIOUS AND REPTILIAN FAUNA OF THE WESTERN DIVISION

SÉRIE “Kultura”

Анатолій Король **221**
ЕТНОДИЗАЙН У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ГРАФІЧНИХ ДИЗАЙНЕРІВ

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

SÉRIE “Metody výuky fyziky”

https://doi.org/10.52058/2695-1592-2024-3(34)-170-181

Юрій Краснобокий

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, м. Умань, Україна,
https://orcid.org/0000-0003-2103-9978

Ігор Ткаченко

доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, м. Умань, Україна,
https://orcid.org/0000-0003-1775-1110

Катерина Ільніцька

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, м. Умань, Україна,
https://orcid.org/0000-0002-6179-5543

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИРОДЖЕННЯ ПРИРОДНИХ СИСТЕМ

Анотація. У статті на основі використання понять, термінів, величин та логіки функціональних залежностей між ними у теорії ймовірностей, а саме: поняття випадкової величини, ймовірності її появи та розподілу, понять твірної функції, математичного сподівання та дисперсії – розглянуто можливість

їх застосування щодо передбачення напрямів і результатів розвитку деяких систем живої і неживої природи. Основна увага за цього приділена задачі про «виродження» з плином часу прізвища сім'ї, у якій воно передається по чоловічій лінії.

Абстрагуючись від опису природи конкретного об'єкта дослідження (живої, чи неживої природи), у статті його ідентифіковано узагальненим поняттям «частинка». Покладається, що у початковий момент часу частинка була одна (один син у батька, одна елементарна частинка, один вірус, одна бактерія тощо). У наступний момент часу частинка з певними ймовірностями може створити певну кількість собі подібних частинок. Ті, у свою чергу, за одиницю часу з такими ж ймовірностями незалежним чином можуть створити знову певну кількість частинок такого ж виду і т.д. Показано, що така динамічна залежність підпорядковується закону подібно до геометричної прогресії.

Накладаючи на перебіг описуваного процесу умову математичного сподівання і можливу дисперсію ймовірностей, встановлюється межа його виродження.

Ключові слова: задачі теорії ймовірностей, системи живої і неживої природи, умови їх виродження.

Yurii Krasnobokyi

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine, https://orcid.org/0000-0003-2103-9978

Ihor Tkachenko

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine, https://orcid.org/0000-0003-1775-1110

Kateryna Ilnitska

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics and Integrative Technologies of Natural Sciences of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,Uman, Ukraine, https://orcid.org/0000-0002-6179-5543

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

PROBABILITY THEORY AND FORECASTING OF NATURAL SYSTEMS DEGENERATION PROCESSES

Abstract. In the article, based on the use of concepts, terms, quantities and the logic of functional dependencies between them in the theory of probabilities, namely: the concept of a random variable, the probability of its appearance and distribution, the concepts of the generating function, mathematical expectation and dispersion, the possibility of their application in predicting directions and results of the development of some systems of living and non-living nature. For this reason, the main attention is paid to the problem of "degeneration" over time of the surname of the family in which it is transmitted through the male line.

Abstracting from the description of the nature of a specific object of research (living or non-living nature), in the article it is identified by the generalized concept of "particle". It is assumed that at the initial moment of time there was one particle (one son of a father, one elementary particle, one virus, one bacterium, etc.). At the next moment in time, a particle with certain probabilities can create a certain number of similar particles. Those, in turn, in a unit of time with the same probabilities can independently create again a certain number of particles of the same type, etc. It is shown that such a dynamic dependence obeys a law similar to geometric progression.

By imposing the condition of mathematical expectation and the possible dispersion of probabilities on the course of the described process, the limit of its degeneration is established.

Keywords: problems of the theory of probabilities, systems of animate and inanimate nature, conditions of their degeneration

Постановка проблеми. Досліджуючи проблему зникнення з історичної арени відомих прізвищ, Гальтон і Ватсон у 1874 році писали: «Зникнення прізвищ осіб, які посідали видне положення в історії, – це факт, який неодноразово спостерігався у минулому; з цього приводу створювалися різні здогади... Надто багаточисельними були приклади прізвищ, які будучи поширеними, ставали рідкісними або навіть зовсім зникали».

Сформульоване стало однією з проблем прогнозування демографічної науки. Вважається загальноприйнятим, що прізвище у сім'ї зберігається і передається по чоловічій лінії. Нехай p_0, p_1, p_2, ... – ймовірності того, що батько має відповідно 0, 1, 2, ... синів. Нехай з тими ж ймовірностями кожен із синів має своїх синів і т.д. Проблема полягає у встановленні ймовірності того, що чоловіча лінія «виродиться» до n-того покоління.

Аналогічна задача у неживій природі виникає, наприклад, за розгляду ланцюгової ядерної реакції. Нейтрон, який знаходиться у певному блоці «ядерного пального», характеризується своїм положенням, напрямком руху і

енергією. У будь-який момент він може зіткнутися з атомним ядром. У результаті такого зіткнення може відбутися розщеплення ядра. У процесі розщеплення можуть з'явитися різні частинки, у тому числі й випадкова кількість нових нейтронів з випадковими енергіями і напрямами руху. Очевидно, що ймовірність зіткнення нейтрона з ядром залежить від геометричних розмірів конкретного блоку «ядерного пального». Тож знову виникає задача, яка ймовірність для даного нейтрона на n-му кроці мати N «нащадків»? Яка ймовірність, що N буде з ростом n необмежено зростати (ядерний вибух), або N буде знаходитися у певних фіксованих межах (керована ядерна реакція), або $N = 0$ (припинення реакції)?

Задачі подібного прогнозу у живій природі виникають, наприклад, за розгляду питань генетики [1, С. 150-155] (посилання на т. 1), розмноження найпростіших одноклітинних організмів, при розмноженні вірусів і бактерій (задача епідеміології), при вивченні різних хімічних реакцій і т.ін. Особливої ваги такий прогноз набуває у зв'язку зі зникненням популяцій та цілих видів тварин, рослин, риб, птахів тощо, яке спричинене урбанізацією навколишнього середовища.

Часто розглядаються задачі, які пов'язані з процесами розмноження і загибелі «частинок» кількох взаємопов'язаних типів. Типовим прикладом такої задачі з живої природи є зміна чисельності популяції зайців і вовків у певній місцевості. Надмірне збільшення чисельності зайців призводить до прискореного зростання популяції вовків (є удосталь їжі), але помітне збільшення чисельності вовків призводить до зниження чисельності зайців. У результаті відбувається взаємний коливальний процес чисельності зайців і вовків.

Для розв'язання подібних задач (задач щодо передбачення можливості реалізації того чи того результату) використовуються методи теорії ймовірностей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Насамперед необхідно зіслатися на всесвітньо відомий двохтомний курс теорії ймовірностей видатного американського математика В.Феллера [1]. Цей класичний курс здійснив значний вплив на розвиток сучасної теорії ймовірностей, на подальшу підготовку і видання багатьма авторами відповідної монографічної і навчальної літератури, зокрема й вітчизняної. Цей курс оригінальний тим, що основні ідеї теорії ймовірностей у ньому викладаються без застосування складного математичного апарату, що робить його рекомендованим для використання – від студентів до спеціалістів з теорії ймовірностей, фізиками та інженерами, а також біологами, для яких ймовірнісні методи є основними математичними методами, чим власне й скористалися автори цієї статті.

Стосовно видань вітчизняних авторів, які у даний час широко використовуються в освітньому процесі ЗВО, то вони переважно підготовлені

за «класичною» схемою – з двох частин: «Теорія ймовірностей. Математична статистика» з окремими доповненнями та додатками, зокрема: посібник Кармелюк Г.І. [2] фактично є відповідним збірником задач; посібники Валєєва К.Г., Джалладової І.А. [3]; Турчина В.М. [4]; Огірко О.І., Галайко Н.В. [5] містять приклади типових задач з розв'язками та задачі для самостійного розв'язання студентами; у посібнику авторів Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. [6] кожен розділ змісту супроводжується переліком питань для самоперевірки рівня засвоєння матеріалу та вправами (на відміну від інших цей посібник містить ще й третю частину – «Комп'ютерний аналіз»).

Детальний аналіз цих джерел показав, що за намагання охопити в них основи теорії ймовірностей та практику їх застосування, у цих посібниках все ж мало уваги звертається на можливості прогнозування цією теорією розвитку (трансформації, еволюції тощо) систем живої і неживої природи, що за системного підходу до їх дослідження з вказаних позицій можна очікувати вагомих результатів.

Мета статті. На засадах основних уявлень теорії ймовірностей на одному з прикладів продемонструвати можливість передбачення виродження з часом систем живої і неживої природи.

Виклад основного матеріалу. У повсякденному житті і в наукових дослідженнях часто зустрічаються випадки, коли певна величина (характеристика, параметр тощо), яка нас цікавить, може набувати різних значень у залежності від випадкових обставин. Такі величини називають випадковими [7, С. 7-20]. Теорія ймовірностей визначає випадкову величину як числову функцію, визначену із множини результатів. Якщо всі можливі результати вичерпуються множиною x_1, x_2, x_3, ... x_n, то будь-яка числова функція $f(x_i)$ є випадковою величиною. За такого визначення на випадкові величини поширюються всі правила дій із звичайними функціями: їх можна додавати, віднімати, перемножувати тощо [5, С. 52-66; 6, С. 128-133].

Із означення випадкової величини, на основі основних властивостей ймовірностей, можна визначити ймовірності, з якими випадкова величина набуває того чи того із можливих своїх значень. Тобто, повна характеристика випадкової величини дається розподілом її ймовірностей [7, С. 99-103].

Проте, у низці випадків (один з яких розглядається у цьому матеріалі) виключно корисними бувають деякі постійні числові характеристики, які дають уявлення про властивості випадкової величини. Серед таких характеристик особливо велику роль відіграють *математичне сподівання* (*очікування*) і *дисперсія* [1, С. 226-244; 7, С. 70-73].

Якщо випадкова величина ε набуває значень x_1, x_2, x_3, ..., x_m відповідно з ймовірностями p_1, p_2, p_3, ..., p_m, то сума

$$M\varepsilon = \sum_{k=1}^{m} x_k p_k \qquad (1)$$

значень випадкової величини, помножених на відповідні ймовірності, називається математичним сподіванням випадкової величини ε і позначається символом «$M\varepsilon$».

Для загального уявлення про розподіл випадкової величини важливим є не лише її математичне сподівання, але й *розкид* можливих її значень.

У теорії ймовірностей для вимірювання розкиду значень випадкової величини відносно її середнього значення використовують поняття дисперсії (з латин. – «розсіяння»). Дисперсія – це математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D\varepsilon = M\left(\varepsilon - M\varepsilon\right)^2. \qquad (2)$$

Із цього визначення зрозуміло, що дисперсія не є від'ємною величиною і перетворюється в нуль, лише коли випадкова величина постійна.

Формулі дисперсії (2) можна надати й іншої форми, а саме, оскільки

$$D\varepsilon = M\left(\varepsilon - M\varepsilon\right)^2 = M\left[\varepsilon^2 - 2\varepsilon M\varepsilon + \left(M\varepsilon\right)^2\right] =$$
$$= M\varepsilon^2 - 2\left(M\varepsilon\right)^2 + \left(M\varepsilon\right)^2 = M\varepsilon^2 - \left(M\varepsilon\right)^2,$$
$$\text{то} \quad D\varepsilon = M\varepsilon^2 - \left(M\varepsilon\right)^2. \qquad (3)$$

З формули (3) випливає простий і корисний висновок: математичне сподівання квадрату випадкової величини ε^2 не може бути меншим від квадрату її математичного сподівання $\left(M\varepsilon\right)^2$:

$$M\varepsilon^2 \geq \left(M\varepsilon\right)^2. \qquad (4)$$

Абстрагуючись від описаних вище природних явищ і процесів, спочатку сформулюємо наступну задачу. Нехай у початковий момент часу $t = 0$ є одна частинка, яка до моменту часу $t = 1$ може створити (зробити, виробити, народити тощо) з певними ймовірностями деяку кількість частинок такого ж виду. Кожна із утворених частинок незалежно з тими ж ймовірностями за одиницю часу знову може створити певну кількість (число) частинок того ж виду і т.д., і т.д. Нехай z_0, z_1, z_2, ... означають послідовність випадкових величин, що дорівнюють числу частинок у моменти часу $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, ... Домовимося завжди покладати $z_0 = 1$. За цього відмітимо, що відповідні властивості процесу за умови, що $t_0 \neq 1$, легко отримати, оскільки ми припустили, що процеси, які починаються від різних початкових частинок, розвиваються незалежно.

Отже, ми будемо інтерпретувати z_n як число частинок популяції в n-му поколінні: $z_0 = 1$, розподіл ймовірностей z_1 визначається числами $P\{z_1 = k\} = p_k$ <1, $k = 0, 1, 2, ..., K$; $\sum p_k = 1$, де p_k – ймовірність того, що у наступному поколінні однієї фіксованої частинки буде рівно k частинок (нащадків). Ми передбачаємо, що цей же ймовірнісний закон розмноження діє у будь-якому поколінні для кожної з частинок незалежним чином. Іншими словами, умовний розподіл z_{n+1} за умови, що $z_n = k$, визначається із припущення, що

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

різні частинки розмножуються незалежно. Таким чином, z_{n+1} розподілена як сума k незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена так само, як і z_1. Якщо $z_n = 0$, то з ймовірністю 1 виконується, що й $z_{n+1} = 0$.

Означивши таким чином цей процес, теорія ймовірностей дає можливість визначити його властивості: розподіл ймовірностей величини z_n; її математичне сподівання; дисперсію; ймовірність того, що випадкова послідовність z_0, z_1, z_2, ... збігається до нуля; поведінку цієї послідовності у випадку, коли вона не збігається до нуля тощо [2, С. 311-327].

У процесі наших подальших міркувань притримуватимемося визначеної нами абстрактної моделі, хоча за нею, як відзначалося, можуть стояти конкретні процеси у фізиці, біології, хімії, генетиці й інших галузях науки.

Оскільки з плином часу число нащадків конкретної частини може як зростати, так і зменшуватися, то для характеристики цих процесів вводиться поняття так званих «твірних» функцій. Розглянемо випадкову величину X, яка набуває лише цілочислових невід'ємних значень. Означимо її твірну функцію у вигляді

$$f_x(s) = \sum_k P(X = k) \cdot s^k, \text{ де } s \geq 0; \tag{5}$$

тут сумування відбувається по всіх k, для яких $P(X = k) \neq 0$. Властивостями функції $f_x(s)$ є такі: оскільки $f_x(0) = P\ (X = 0)$, і якщо ця величина менша 1, то $f_x(s)$ – строго зростаюча функція. За значення $s = 1$ виконується рівність $f_x(1) = \sum_k P(X = k) = 1$.

Позначатимемо твірну функцію випадкової величини z_n через $f_n(s)$, а твірну функцію величини z_1 для спрощення позначатимемо без індекса $f(s)$. Між твірними функціями випадкових величин z_n справедливим є наступне співвідношення:

$$f_{n+1}(s) = \sum_m P(z_{n+1} = m) \cdot s^m = \sum_m \sum_k P(z_n = k) P(z_{n+1} = m / z_n = k) =$$
$$= \sum_k P(z_n = k) \sum_m P(z_{n+1} = m / z_n = k) s^m \tag{6}$$

Числа нащадків від кожної із k частинок незалежні одні від одних за визначенням, тому за умови $z_n = k$ розподіл величини z_{n+1} є сумою незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена як z_1, а, отже, має твірну функцію $[f_1(s)]^k$, тобто

$$\sum_m P(z_{n+1} = m / z_n = k) s^m = [f_1(s)]^k, \text{ де } k = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

З формули (7) отримуємо:

$$f_{n+1}(s) = \sum_k P(z_n = k) [f_1(s)]^k, \tag{8}$$

що згідно з означенням твірної функції величини z_n вона дорівнює:

$$f_{n+1}(s) = f_n(f_1(s)) = f_n(f(s)). \quad (9)$$

На підставі (9) отримуємо низку наступних значень твірної функції:

$$f_2(s) = f(f(s)), \quad f_3(s) = f(f(f(s))), \ldots \quad (10)$$

Узагальнивши ряд (10), його можна записати у більш компактній формі:

$$f_n(s) = f(f \ldots f(s) \ldots), \quad (11)$$

тобто твірна функція $f_n(s)$ величини z_n дорівнює n-кратній ітерації твірної функції $f(s)$ величини z_1.

Введемо позначення математичного сподівання і дисперсії випадкової величини z_n:

$$Mz_1 = f'(1) = m; \quad Dz_1 = \sigma^2 = f''(1) + m - m^2.$$

Продиференціювавши (9) за значення $s = 1$, знайдемо математичне сподівання:

$$f'(1) = f_n'(f(1)) f'(1) = f_n'(1) \cdot m, \quad (12)$$

звідки за індукцією отримуємо:

$$Mz_n = f_n'(1) = m^n, \text{ де } n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad (13)$$

Продиференціювавши (12) ще раз, отримаємо:

$$f_{n+1}''(1) = f_n''(1)[f'(1)]^2 + f_n'(1) f''(1) =$$
$$= f_n''(1) m^2 + m^n (\sigma^2 + m^2 - m),$$

звідки випливає

$$f_n''(1) = \sigma^2 m^{n-1} (m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1) + m^{2n} - m^n$$

або

$$Dz_n = \sigma^2 m^{n-1} (m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1). \quad (14)$$

Формули (13) і (14) дають явний вид математичного сподівання і дисперсії числа нащадків n-го покоління через відомі математичне сподівання і дисперсію числа нащадків від однієї частинки.

Розглянемо тепер задачу про ймовірність виродження нащадків від однієї первісної частинки, наприклад ймовірність виродження прізвища, або ймовірність затухання ланцюгової ядерної реакції, розпочатої окремим нейтроном тощо. На мові послідовності z_n виродження означає, що $z_n = 0$, починаючи з деякого номера n, за цього, якщо $z_n = 0$, то згідно з означенням і $z_m = 0$ для всіх $m \geq n$ з ймовірністю одиниця. Іншими словами, ми маємо справу з послідовністю вкладених одна в одну подій

$$\{z_n = 0\} \subset \{z_{n+1} = 0\} \subset \{z_{n+2} = 0\} \subset \ldots$$

Тож треба знайти границю цього ряду, яка й буде відповідати ймовірності виродження послідовності z_n. Позначимо цю границю через q:

$$q = \lim_{n \to \infty} P\{z_n = 0\}. \quad (15)$$

Věda a perspektivy № 3(34) 2024
ISSN 2695-1584 (Print)
ISSN 2695-1592 (Online)

Очевидно, що з огляду на вкладеність подій $\{z_n = 0\} \subset \{z_{n+1} = 0\}$, справедливим буде співвідношення

$$0 \le P\{z_n = 0\} \le P\{z_{n+1} = 0\} \le P\{z_{n+2} = 0\} \le \ldots \le 1,$$

тобто ми маємо неубуваючу обмежену послідовність $P\{z_n = 0\}$; отже, для неї повинна існувати певна межа (границя q).

З означення твірної функції послідовності z_n випливає:

$$P\{z_n = 0\} = f_n(0),$$

а також

$$f_{n+1}(0) = f(f_n(0)).$$

Оскільки ж

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0) = q,$$

то справедливою буде й рівність

$$q = f(q). \tag{16}$$

Якщо $m = f'(1) \le 1$, то $f(s) > s$ за $0 < s < 1$. Звідси випливає, що у цьому випадку єдиним розв'язком рівняння (16) буде $q = 1$.

Згідно з викладеним, за значень $n \to \infty$, $m \le 1$ (15) набуває виду

$$\lim_{n\to\infty} P(z_n = 0) = 1, \tag{17}$$

тобто з ймовірністю одиниця у цьому випадку потомство однієї частинки вироджується, коли число поколінь $n \to \infty$. За цього при $m < 1$ математичне сподівання числа нащадків $Mz_n = m^n \to 0$ і дисперсія

$$Dz_n = \sigma^2 m^{n-1}\left(m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1\right) = \frac{\sigma^2 m^{n-1}\left(m^n - 1\right)}{m-1} \to 0.$$

У той же час при $m = 1$ математичне сподівання і дисперсія числа нащадків

$$Mz_n = 1, \tag{18}$$

$$Dz_n = n\sigma^2 \tag{19}$$

до нуля взагалі не прямують, не дивлячись на те, що z_n вироджується з ймовірністю одиниця. Це означає, що незважаючи на достовірність виродження, зі зростанням n нехтовно малі *ймовірності великих флуктуацій* все ж залишаються. Іншими словами, «типова траєкторія» числа нащадків за $m = 1$ доволі тривалий час «блукає» біля нуля і може інколи підніматися досить високо, але, тим не менше, з ймовірністю одиниця рано чи пізно «обривається» (вироджується) у нулі.

Оцінимо ймовірність P виживання (або виродження) прізвища за різних значень z_n і m.

Нехай $P(z_n > 0)$ при $m < 1$. Тоді, очевидно, що

$$P(z_n > 0) = 1 - P(z_n = 0) = 1 - f_n(0).$$

Розглянемо наближене значення функції $f(s)$, позначивши її через $\overline{f}(s)$:

$$\overline{f}(s)=1+m(s-1). \quad (20)$$

Функція $\overline{f}(s)$ – лінійна і вона співпадає з функцією $f(s)$ за значення одиниця, аналогічно як і їх похідні. Тож за $0\le s\le 1$, $\overline{f}(s)\le f(s)$ і n-та ітерація функції $\overline{f}(s)$ буде меншою від n-тої ітерації функції $f(s)$: $\overline{f}_n(0)\le f_n(0)$ або $1-f_n(0)\le 1-\overline{f}_n(0)$. Але із виду (20) функції $\overline{f}(s)$ безпосередньо випливає низка співвідношень:

$$1-\overline{f}(0)=m,\ 1-\overline{f}_2(0)=m^2,\ 1-\overline{f}_3(0)=m^3,\ \ldots,\ 1-\overline{f}_n(0)=m^n.$$

Таким чином, у випадку $m<1$ $P(z_n>0)=1-f_n(0)\le m^n$, тобто ймовірність виживання прізвища убуває як геометрична прогресія.

У випадку $m=1$ ця ймовірність убуває значно повільніше: можна показати, що у цьому випадку

$$P(z_n>0)\sim\frac{2}{nf''(1)}. \quad (21)$$

У випадку $m>1$ ймовірність виродження $\lim\limits_{n\to\infty}P(z_n=0)=q<1$. У той же час за будь-якого $k^{n\to\infty}>0$ ймовірність фіксованого числа k нащадків прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty}P(z_n=k)=0. \quad (22)$$

У випадку задачі про виродження прізвища зазвичай вважають, що ймовірності $p_k=P\{z_1=k\}$ народження в сім'ї k хлопчиків утворюють геометричну прогресію $p_k=bc^{k-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots;\ 0<b$, $b\le 1-c$, а $p_0=1-p_1-p_2-\ldots$ [2, С. 56-63; 7, С. 14-18]. У такому випадку твірна функція $f(s)$ обчислюється наступним чином:

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k=1-\frac{b}{1-c}+\frac{bs}{1-cs}.$$

Математичне сподівання числа хлопчиків буде

$$m=Mz_1=f'(1)=\frac{b}{(1-c)^2}. \quad (23)$$

Рівняння $s=f(s)$ має невід'ємний корінь

$$s_0=\frac{1-b-c}{c(1-c)}. \quad (24)$$

Цей корінь дорівнює 1, якщо $m=1$; якщо $m\ne 1$, то це єдиний невід'ємний корінь. Якщо $m\ge 1$, то ймовірність виродження $q=s_0$.

За даними дослідників цієї проблеми ймовірності виродження нащадків чоловічих ліній добре наближаються до геометричної прогресії за наступних значень параметрів у формулі (24):

$$b=0{,}2126;\ \ c=0{,}5893;\ \text{і}\ \ p_0=0{,}4825.$$

У цьому випадку ймовірність виродження становить $q = 0{,}819$. Звичайно, що величини b і c підраховуються статистично за даними переписів населення і можуть мати різні значення для різних географічних регіонів. Вони з часом можуть змінюватися навіть для однієї і тієї ж місцевості, проте загальні закономірності описуваних процесів є характерними для більшості систем живої і неживої природи.

Висновки. Розглянута задача про ймовірність виродження прізвища сімей, у яких воно передається по чоловічій лінії, показує, що цей процес наближено може бути описаний спадною геометричною прогресією.

Перспективними у практичному плані можуть бути подібні розв'язки задач про «випадкове блукання», «ймовірність розорення» та ін. [1, С. 356-386].

Література:

1. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications : in two volumes. 3rd edition. New York : John Wiley & Sons, 1968. Volume I. 528 p.; Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications : in two volumes. 2nd edition. New York : John Wiley & Sons, 1971. Volume II. 704 p.

2. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: навч. посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2007. 576 с.

3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Теорія ймовірностей та теорія випадкових процесів: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2009. 378 с.

4. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2014. 556 с.

5. Огірко О.І., Галайко Н.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів: Льв ДУВС, 2017. 292 с.

6. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 424 с.

7. Глеч С.Г., Ледяєв С.Ф., Ольшанська І.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. Севастополь: СевНТУ, 2011. 176 с.

References:

1. Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. (Volume I, 3rd edition). New York : John Wiley & Sons; Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. (Volume II, 2nd edition). New York : John Wiley & Sons [in English].

2. Karmeliuk, H.I. (2007). *Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]*. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury [in Ukrainian].

3. Valieiev, K.H., & Dzhalladova, I.A. (2009). *Teoriia ymovirnostei ta teoriia vypadkovykh protsesiv [The theory of probabilities and the theory of random processes]*. Kyiv: KNEU [in Ukrainian].

4. Turchyn, V.M. (2014). *Teoriia ymovirnostei i matematychna statystyka. Osnovni poniattia, pryklady, zadachi [Probability Theory and Mathematical Statistics. Basic concepts, examples, tasks]*. Dnipropetrovsk: IMA-press [in Ukrainian].

5. Ohirko, O.I., & Halaiko, N.V. (2017). *Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]*. Lviv: Lv DUVS [in Ukrainian].

6. Barkovskyi, V.V., Barkovska, N.V., & Lopatin, O.K. (2010). *Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]* (5th edition). Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury [in Ukrainian].

7. Hlech, S.H., Lediaiev, S.F., & Olshanska, I.V. (2011). *Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics]*. Sevastopol: SevNTU [in Ukrainian].