Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини

Т.М. Махомета
І.М. Тягай

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЛІНІЙНА АГЛЕБРА

Навчальний посібник

Умань – 2020

УДК [514.12+512.64](075.8)
А64

Рецензенти:

Побережець І. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики і фізики Уманського державного аграрного університету;

Медведєва М.О., кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики і інформаційно-комунікаційних технологій Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету фізики, математики та інформатики
Уманського державного педагогічного
університету імені Павла Тичини
(протокол № 5 від 26 листопада 2020 року)

Аналітична геометрія та лінійна алгебра : навч. посіб. Ч. 2 / МОН
А64 України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.:
Т. М. Махомета, І. М. Тягай. – Умань : Візаві, 2020. – 140 с.

Даний посібник призначений для вивчення курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» в умовах кредитно-модульної системи навчання та організації самостійної роботи студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Посібник розрахований на студентів усіх форм навчання.

УДК [514.12+512.64](075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП 4

МОДУЛЬ 1: Лінійні образи 5

Тема1: Пряма лінія на площині. 5

Тема 2 Площина в тривимірному просторі. 19

Тема 3 Пряма в тривимірному просторі. Пряма і площина… 288

Тема 4: Геометричні перетворення площини. 38

Тема 5: Метод координат у просторі. 46

МОДУЛЬ2: Лінії і поверхні другого порядку. 54

Тема1: Криві лінії другого порядку: коло, еліпс. 54

Тема 2: Гіпербола та її рівняння. 64

Тема 3: Парабола та її рівняння 70

Тема4: Загальна теорія алгебраїчних ліній другого порядку. . 76

Тема 5: Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями 92

Тема 6: Загальна теорія поверхонь другого порядку…… 106

ОСНОВНІ МЕТОДИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ…… 11819

ІНДЗ з аналітичної геометрії……..…… 121

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ 134

ЗРАЗОК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ 136

ЛІТЕРАТУРА 138

ВСТУП

Навчальний посібник створено у відповідності до типової навчальної програми дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» з метою організації аудиторної та самостійної роботи студентів спеціальностей 014.08 Середня освіта (Фізика), 014.09 Середня освіта (Інформатика).

Посібник охоплює два розділи курсу аналітичної геометрії: «Модуль 1: Лінійні образи. Модуль 2: Лінії та поверхні другого порядку». В кожному розділі подано короткі теоретичні відомості та формули, необхідні для розв’язування задач, які супроводжуються прикладами з указаними методами їх розв’язку; домашні індивідуальні завдання до кожної теми; питання для самоперевірки; зразок тестових завдань.

Даний посібник розрахований на студентів усіх форм навчання.

Навчальний посібник рекомендовано використовувати разом з іншими підручниками та посібниками, зокрема з тими, що наведені у списку рекомендованої літератури.

МОДУЛЬ 1: ЛІНІЙНІ ОБРАЗИ

Тема1: Пряма лінія на площині.

1. Прямокутна декартова система координат на площині та у просторі.

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено напрям, початок відліку та одиничний відрізок (рис. 1).

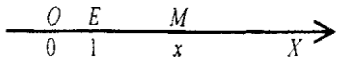


Рис. 1

Координатою точки M на осі називають відстань *OM* від цієї точки до початку відліку, що береться зі знаком "+", якщо точка лежить на додатній півосі, і зі знаком "–", якщо вона лежить на від'ємній півосі. Позначають *M*(*x*;*y*).

Дві взаємно перпендикулярні числові осі з спільним початком відліку називають *прямокутною декартовою системою координат* (або просто *прямокутною системою координат*) на площині (рис. 2).

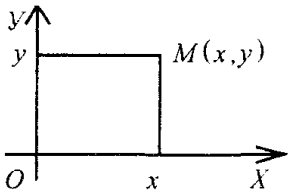


Рис. 2

Горизонтальну вісь називають *віссю абсцис* (вісь *OX*), а вертикальну – *віссю ординат* (вісь *Oy*).

Точку перетину осей координат називають *початком координат* (точка *O*). Одиниці масштабу на обох осях, як правило, вибирають однаковими.

Довільній точці *M* площини можна поставити у відповідність два числа *x* і *y* – координати її проекцій на осі абсцис і ординат відповідно.

Числа *x* і *y* однозначно визначають положення точки *M* на площині і називаються *координатами* точки: *x – абсцисою*, а *y – ординатою* точки *M* (записують *M* (*x*; *y*)). Початок координат – точка O(0;0).

Осі координат розбивають площину на чотири частини, які називають *координатними чвертями (квадрантами*).

Три взаємно перпендикулярні числові осі зі спільним початком відліку називають *прямокутною системою координат у просторі* (рис. 3).

Вісь *Ox* називають *віссю абсцис*, *Oy – віссю ординат*, *Oz – віссю аплікат***.**

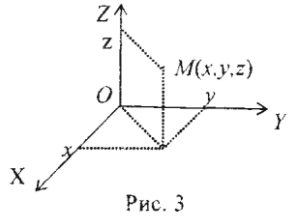


Рис. 3

Числа *x*, *y* та *z*, координати проекції точки *M* на осі абсцис, ординат та аплікат однозначно визначають положення точки *M* у просторі і називаються *координатами* точки *M*: *x – абсцисою*, *y – ординатою*, а *z – аплікатою* точки *M* (записують *M* (*x*; *y*; *z*)).

Площини *Oxy*, *Oyz* та *Oxz* називаються *координатними*

площинами. Вони ділять простір на 8 частин, які називаються октантами.

Введення прямокутної системи координат на площині (у просторі) дозволяє встановити однозначну відповідність між множиною всіх точок площини (простору) та множиною впорядкованих пар (трійок) чисел, що дає можливість при розв'язанні геометричних задач застосовувати алгебраїчні методи.

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат.* Вона задається точкою O, яка називається *полюсом,* і променем Op, який виходить з полюса і називається *полярною віссю* (рис.4). Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутова – для вимірювання кутів.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом,* а число φ – другою координатою і називається *полярним кутом.* Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається так: M (ρ; φ). Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \le \rho < +\infty$ полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути φ, більші від 2π, а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

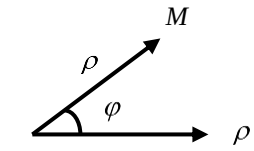


Рис. 4

Виразимо декартові координати точки M через полярні:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Перетворення декартових координат

Нехай $R_0 = O\vec{i}\vec{j}$ і $R_0' = O'\vec{i}'\vec{j}'$ – дві фіксовані прямокутні декартові системи координат (ортонормовані репери) на площині. Перша називається „старою", а друга – „новою". Нехай в старій системі координат точка M має координати $(x; y)$, а в репері R_0' – (x', y'); $\alpha = \left(\vec{i}, \vec{i}'\right)$ – кут між старою і новою віссю Ox. Встановимо взаємозв'язок між старими і новими координатами точки M.

Розглянемо випадок, коли стара і нова системи координат однаково орієнтовані, а перетворення полягає лише в заміні координатного базису.

Тоді (див. рис.5)

$\vec{i}' = (c_{11}; c_{21}) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$,

$\vec{j}' = (c_{12}; c_{22}) = (-\sin\alpha; \cos\alpha)$.

І формули перетворення координат мають вигляд:

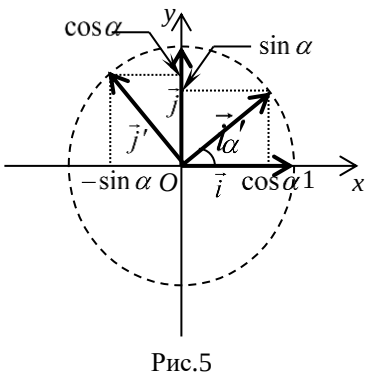


Рис.5

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Якщо стара і нова системи координат мають різні орієнтації, $\vec{i}' = (c_{11}; c_{21}) = (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $\vec{j}' = (c_{12}; c_{22}) = (\sin\alpha; -\cos\alpha)$.

І формули перетворення координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Формули (1) і (2) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha, \end{cases} \quad (3)$$

де параметр $\varepsilon = \pm 1$. Якщо ж перетворення системи координат, крім заміни координатного базису, включає і перенесення початку в точку $O'(x_0; y_0)$, то формули перетворення координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0, \end{cases} \quad (4)$$

де параметр $\varepsilon = 1$, якщо стара і нова системи координат однаково орієнтовані, і $\varepsilon = -1$ в протилежному випадку.

Зауваження 1. Формули (4) встановлюють взаємозв'язок між координатами однієї і тієї ж точки в двох різних прямокутних декартових системах координат. Загальне перетворення декартових координат включає чотири параметри: α, x_0, y_0, ε.

Зауваження 2. Якщо в старої і нової систем координат однакові базисні вектори, але різні початки, то формули (4) мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \quad (5)$$

2. Поняття рівняння лінії на площині. Види рівнянь прямої на площині.

Рівнянням лінії на площині називається рівняння $F(x, y) = 0$ із змінними x та y, якому задовольняють координати довільної точки $M(x; y)$ цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить лінії.

Найпростішою лінією на площині є пряма.

1. *Загальним рівнянням* прямої на площині називається рівняння 1-го степеня відносно x та y вигляду

$$Ax + By + C = 0, \text{ де } A^2 + B^2 \neq 0,$$

де $\vec{n} = (A; B)$ — вектор нормалі прямої (нормальний вектор прямої).

Розглянемо неповні рівняння прямої.

Неповним називається рівняння прямої, в якому принаймні один з коефіцієнтів A, B або C дорівнює нулю.

1) при $A = 0$ пряма паралельна осі абсцис;

2) при $B = 0$ пряма паралельна осі ординат;

3) при $C = 0$ пряма проходить через початок координат

В прямокутній системі координат рівняння прямої на площині задається одним із наступних видів.

2. *Канонічне рівняння прямої:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, вектор $\vec{s} = (m; n)$ — напрямний вектор (вектор, паралельний цій прямій). Будь-який ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої, називається напрямним вектором цієї прямої.

3. *Параметричні рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \end{cases}$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $\vec{s} = (m; n)$ — вектор напрямку прямої.

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

де $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ — деякі фіксовані точки прямої.

5. *Рівняння прямої "у відрізках на осях":*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де $A(a;0)$ — точка перетину прямої з віссю абсцис; $B(0;b)$ — точка перетину прямої з віссю ординат.

6. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:* $y = kx + b$,

де $k = tg\alpha$ — кутовий коефіцієнт, α — кут, що утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис, $B(0;b)$ — точка перетину прямої з віссю ординат.

Зауваження 1. Вертикальна пряма не має кутового коефіцієнта.

Зауваження 2. $y = kx$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат,

$y = a$ (a = const) – рівняння прямої, паралельної осі OX,

$x = b$ (b = const) – рівняння прямої, паралельної осі OY.

7. *Рівняння прямої, яка проходить через задану точку, з відомим кутовим коефіцієнтом:*

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де $M(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $k = tg\alpha$ — кутовий коефіцієнт, α — кут, що утворює пряма з додатним напрямом осі абсцис.

8. *Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору* (в прямокутній декартовій системі координат):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

де $M(x_0;y_0)$ — деяка фіксована точка прямої, $\vec{n}=(A;B)$ — вектор нормалі прямої (вектор, перпендикулярний прямій).

9. *Нормальне рівняння прямої* (в прямокутній декартовій системі координат):

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

де p — довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, α — кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом осі абсцис.

10. *Пучок прямих* — сукупність всіх прямих, що проходять через задану точку, яка називається *центром пучка.*

Рівняння пучка прямих:

$$y-y_0=k(x-x_0),\quad x=x_0.$$

де $O(x_0;y_0)$ — центр пучка, $k\in R$.

Рівняння пучка, заданого двома своїми прямими:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

3. Кут між двома прямими

а) Якщо прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом $y_1=kx+b_1$, і $y_2=kx+b_2$, то кут між ними φ знаходиться за формулою:

$$tg\varphi=\frac{|k_2-k_1|}{|k_1k_2+1|}.$$

б) Якщо прямі задані загальними рівняннями $Ax_1+By_1+C_1=0$, і $Ax_1+By_1+C_1=0$, то кут між ними φ знаходиться як кут між векторами нормалей до прямих $\overline{n_1}(A_1,B_1)$, $\overline{n_2}(A_2,B_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

в) Якщо прямі задані канонічними рівняннями, то кут між ними знаходиться як кут між напрямними векторами прямих.

4. Взаємне розміщення двох прямих.

Прямі паралельні, якщо паралельні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Прямі перпендикулярні, якщо перпендикулярні їх напрямні вектори, або вектори нормалей до прямих.

Нехай $\bar{s}_1=(l_1,m_1)$ та $\bar{s}_1=(l_1,m_1)$ – напрямні вектори заданих прямих,

$\overline{n_1}(A_1, B_1)$, $\overline{n_2}(A_2, B_2)$ - вектори нормалей до кожної з прямих.

Умови паралельності двох прямих:

1. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$,
2. $k_1 = k_2$ (прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом),
3. $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Умови перпендикулярності двох прямих:

1. $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$,
2. $k_1k_2 = -1$,
3. $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Координати точки перетину двох прямих визначаються шляхом розв'язання системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

5. Відстань між двома точками. Відстань і відхилення точки від прямої.

Відстань між точками $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ визначається за формулою:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_1)^2} + \sqrt{(y_1 - y_1)^2}\ .$$

Відстань від точки до прямої — довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки на дану пряму. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l**,** що задана рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ обчислюється за формулою:

$$d(M_0, l) = | x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p |.$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l: $Ax + By + C = 0$, заданої своїм загальним рівнянням обчислюється за формулою:

$$d(M_0, l) = \frac{| Ax_0 + By_0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Відхилення δ заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ від заданої прямої $Ax + By + C = 0$ є довжина перпендикуляру, який опущено із цієї точки на пряму, взята із знаком плюс, якщо задана точка і початок координат лежить по різні сторони від заданої прямої, і зі знаком мінус, якщо вони лежать по одну сторону від прямої.

Відхилення обчислюється за формулою:

$$\delta(M_0, l) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6. Геометричний зміст лінійних нерівностей.

Розглянемо лінійну функцію:

$$\hat{O}(x,y) = Ax + By + C.$$

Ця функція неперервна і ,в точках прямої $Ax + By + C = 0$ (позначимо її через L) перетворюється в нуль, а в інших точках площини відмінна від нуля, тобто коли точка $M_0(x_0, y_0)$ не лежить на прямій L, то:

$$Ax + By + C = \delta \neq 0,$$

причому δ — число додатне, якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить в одній з двох півплощин, на які пряма L поділяє площину, та від'ємне, якщо вона лежить у другій півплощині.

Справді, внаслідок неперервності функції $\hat{O}(x,y)$, перейти від додатних до від'ємних її значень можна тільки через нуль.

З геометричної точки зору це означає, що коли координати двох точок $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ задовольняють нерівності: $Ax_1 + By_1 + C > 0$, $Ax_2 + By_2 + C < 0$, то точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ лежать по різні сторони від прямої L, а кожна неперервна лінія, що їх сполучає, перетинає L.

Таким чином, геометричне місце точок, координати яких задовольняють лінійну нерівність:

$$Ax_1 + By_1 + C > 0, \text{ (або } Ax_2 + By_2 + C < 0),$$

є одна з двох півплощин, на які пряма L поділяє площину.

Коли треба дізнатися, в якій з двох півплощин міститься задана точка $M(x,y)$, то вибирають точку $M_0(x_0, y_0)$, положення якої вже відоме, та підраховують для неї значення функції $\hat{O}(x_0, y_0)$. Якщо $\hat{O}(x,y)$ та $\hat{O}(x_0, y_0)$ мають однакові знаки, то точка M лежить у тій самій півплощині, що і точка M_0, а якщо протилежні, то точка M лежить у другій півплощині.

<u>Приклади розв'язування вправ:</u>

Приклад 1. Рівняння прямої $6x + 8y - 15 = 0$ подати у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом;

б) у відрізках на осях.

Розв'язання:

а) Для того, щоб записати рівняння прямої $6x + 8y - 15 = 0$ у вигляді з кутовим коефіцієнтом, потрібно розв'язати дане рівняння відносно у: $y = kx + b$.

$$8y = 15 - 6x \Rightarrow y = -\frac{6x}{8} + \frac{15}{8} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}.$$

Відповідь: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}$, $k = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{15}{8}$.

б) Щоб записати рівняння прямої $6x + 8y - 15 = 0$ у відрізках на осях, потрібно перенести вільний член за знак дорівнює і поділити обидві частини рівняння на нього $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$6x + 8y = 15$$

$$\frac{6}{15}x + \frac{8}{15}y = 1$$

Отже, $a = \frac{6}{15}$, $b = \frac{8}{15}$.

Відповідь: $\frac{6}{15}x + \frac{8}{15}y = 1$.

Приклад 2. Обчислити кут між прямими $2x - 3y + 6 = 0$ і $3x - 4y + 8 = 0$.

Розв'язання:

Для обчислення кута між двома прямими використаємо формулу

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

$$\cos\theta = \pm\frac{2\cdot 3 + (-3)(-4)}{\sqrt{2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm\frac{6+12}{\sqrt{13}\cdot 5} = \pm\frac{18}{5\sqrt{13}}.\ \theta = \arccos\left(\pm\frac{18}{5\sqrt{13}}\right).$$

Відповідь: $\theta = \arccos\left(\pm\frac{18}{5\sqrt{13}}\right)$.

Приклад 3. Пряма, паралельна осі *Ox*, проходить через точку (–2; 3). Скласти рівняння цієї прямої.

Розв'язання:

Оскільки пряма паралельна *OX*, то її рівняння: *By+C=0*. Ордината точки дорівнює 3, тому *y=3* або *y-3*=0 - шукане рівняння.

Відповідь*: y-3*=0 .

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з додатнім напрямком осі *OX* кут 30°.

Розв'язання:

Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, має вигляд: $y = kx$; k=$tg30°$, $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Отже, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ – шукане рівняння.

Відповідь: $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x 3.$

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки А (–5;4) і В (–3;–2).

Розв'язання:

Використаємо рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$\frac{x+5}{3+5} = \frac{y-4_1}{-2-4}, \frac{x+5_1}{8} = \frac{y-4}{-6} \Big| \cdot(-24),$$

$$-3(x+5) = 4(y-4), \; -3x - 4y - 7 = 0.$$

Отже, $3x + 4y + 7 = 0$ – шукане рівняння.

Відповідь: $3x + 4y + 7 = 0$.

Приклад 6. Написати рівняння висоти *AD* трикутника, заданого точками *A*(–5;3), B(3;1), C(4;–1).

Розв'язання:

Пряма, що містить висоту *AD*, проходить через вершину *A*(-5;3) і має нормальний вектор $\bar{n} = \overline{BC}$ =(1;-8). Рівняння висоти *AD* матиме вигляд:

$$1 \cdot (x - (-5)) - 8 \cdot (y - 3) = 0, \; x - 8y + 29 = 0.$$

Відповідь: $x - 8y + 29 = 0$.

Приклад 7. Знайти величину внутрішнього кута А ΔABC, якщо його вершини мають координати А(5;4), В(2;7), С(1;1).

Розв'язання:

Складемо рівняння сторін трикутника, що виходить з вершини А (5;4).

Запишемо пучок прямих, що проходять через точку А $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - 4 = k(x - 5).$$

Виділимо з пучка рівняння сторони *AB*. Ця пряма проходить через т. *B*

$$7 - 4 = k_{AB}(2 - 5) \Rightarrow k_{AB} = -1.$$

Знайдений кутовий коефіцієнт підставимо у рівняння пучка прямих

$$y - 4 = k_{AB}(x - 5) \Rightarrow y - 4 = -1(x - 5) \Rightarrow y + x - 9 = 0.$$

Отже, рівняння прямої, що проходить через т. А і В має вигляд:

$$x + y - 9 = 0.$$

Аналогічно знаходимо кутовий коефіцієнт прямої, яка збігається зі

стороною АС: $y-4=k(x-5) \Rightarrow 1-4=k_{AC}(1-5) \Rightarrow k_{AC}=\frac{3}{4}$.

$y-4=k_{AC}(x-5) \Rightarrow y-1=\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow \frac{3}{4}x-\frac{3}{4}-y+1=0$.

Отже, рівняння прямої, що проходить через т. А і т. С має вигляд: $3x-4y+1=0$.

Для знаходження величини внутрішнього кута А скористаємося формулою $tg\angle BAC=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}$:

$$tg\angle BAC=\frac{\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}\cdot(-1)}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}=7.$$

Відповідь: $\angle CAB=arctg7$.

Приклад 8. Задано вершини $A(2;4)$, $B(-1;3)$, $C(5;-2)$ трикутника ABC. Знайти:

1) рівняння та довжину висоти, проведеної з вершини A;

2) рівняння медіани, проведеної з вершини A.

Розв'язання:

1) Щоб знайти рівняння висоти h_A та її довжину, необхідно спочатку знайти рівняння сторони, яке має вигляд:

$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-3}{-2-3}$, або $y=-\frac{5}{6}x+\frac{13}{6}$.

Враховуючи, що кутові коефіцієнти висоти k_2 і прямої BC пов'язані між собою співвідношенням $k_2=-\frac{1}{k_1}$, а висота проходить через вершину A, за формулою $y-y_A=-\frac{1}{k}(x-x_A)$ одержимо наступне рівняння висоти: $y-4=-\frac{6}{5}(x-2)$, $5y-6x-8=0$.

Довжину висоти h_A знаходимо за формулою відстані точки A до прямої BC: $d(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$d=\left|\frac{5\cdot 2+6\cdot 4-13}{\sqrt{25+36}}\right|=\frac{21}{\sqrt{61}} \text{ од.}$$

Відповідь: $5y-6x-8=0$, $d=\frac{21}{\sqrt{61}}$ од.

2) Медіана m_A проходить через точку D - середину відрізка BC. Знайдемо координати точки D за формулами:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2};\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$x_D = \frac{-1+5}{2} = 2;\quad y_D = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, точка D має координати $(2; \frac{1}{2})$.

Рівняння медіани знаходимо за формулою прямої, що проходить через дві точки $A(2;4)$ та $D(2; \frac{1}{2})$: $\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-4}{\frac{1}{2}-4}$; $x-2=-3{,}5;\quad x+1{,}5=0$

Відповідь: $x+1{,}5=0$.

Приклад 9. Знайти відстань від точки M(2,–3) до прямої $3x-4y+2=0$

Розв'язання:

Використаємо формулу $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C = 0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

$$d = \frac{|3\cdot 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 10. Дано вершини трикутника A(–3;4), B(1;7), C(4;3). Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута B даного трикутника.

Розв'язання:

Відстань від точки M до сторін AB та BC рівна, тобто $d_1 = d_2$.

Складемо рівняння прямої AB, як рівняння прямої, що проходить через дві точки A(–3;4), B(1;7): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y-4}{7-4}$$

$$3x-4y+25=0$$

$$N_1 = -\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -0{,}2$$

$$-0{,}6x+0{,}8y-5=0$$

Відхилення т. M(x;y) від прямої AB

$$\delta = -0{,}6x+0{,}8y-5$$

Складемо рівняння сторони BC, як рівняння прямої, що проходить через дві точки B(1;7), C(4;3):

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-7}{3-7} \text{ або } 4x+3y-25=0$$

$$N_2=\frac{1}{\sqrt{16+9}}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

$$0{,}8x+0{,}6y-5=0$$

Відхилення т. М(х;у) від прямої ВС

$$\delta=0{,}8x+0{,}6y-5$$

$$d_1=|\delta_1| \qquad d_2=|\delta_2|$$

Враховуючи, що т. М і початок координат О лежать по один бік від кожної із прямих АВ і ВС, маємо

$$\delta_1<0 \text{ і } \delta_2<0 \qquad -\delta_1=-\delta_2,$$

тоді

$$0{,}6x-0{,}8y+5=-0{,}8x-0{,}6y+5$$

$$1{,}4x-0{,}2y=0$$

Рівняння бісектриси має вигляд: $y=7x$.

Відповідь: $y=7x$.

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання 1:

1. Визначити кут між прямими 6х–3у+5=0 і 2х–6у–3=0.
2. Сторони трикутника задано рівняннями 7х–6у+9=0, 5х+2у–25=0, 3х+10у+29=0. Знайти координати вершин трикутника.
3. Написати рівняння медіани *AD* трикутника *ABC* якщо А(2;1), В(0;7), С(–4;-1).
4. Знайти рівняння висоти *AD* трикутника *ABC* якщо А(–1;0), В(4;5), С(7;3).
5. Написати рівняння прямої, що проходить через т. К (1;2) утворюючи з віссю *Ox* кут 45º.
6. Написати рівняння висоти *AD* трикутника *ABC*: А(–4;2), В(6;5), С(14;–4).
7. Через точку А(–1;3) провести пряму перпендикулярно до прямої 4х–2у+3=0.
8. Через точку А(1;–3) провести пряму паралельну до прямої х–2у+3=0.
9. Через точку М(2;-4) провести пряму перпендикулярно до прямої 3х+5у–6=0.
10. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих 5х–у+10=0 і 8х+4у+9=0 і точку А(5;4).
11. Дано координати вершин трикутника *ABC*: А(2;–4), В(7;2), С(3;1). Написати рівняння медіани *BD*.
12. Знайти кут між прямими у=(2/3)х–7 і у=5х+9.
13. Написати рівняння висоти *AD* трикутника *ABC*: А(–8;–2), В(2;10), С(4;4).

14. Перетворити пряму 3x–5y+10=0 до виду $y=kx+b$.
15. Написати рівняння медіани СД трикутника АВС: А(–7;-3), В(2;–1), С(–1;–5).
16. Перетворити пряму 3x+5y+1=0 до виду $y=kx+b$.
17. Написати рівняння прямої, що проходить через вершину С трикутника ABC і паралельно до сторони AB: А(–2;0), В(2;6), С(4;2).
18. Через точку М(2;–4) провести пряму паралельно до прямої 3x+5y–6=0.
19. Написати рівняння прямої, що проходить через вершину B трикутника ABC і паралельно до сторони AC: А(–2;0), В(2;6), С(4;2).
20. Знайти точку перетину прямих y=3x і x+y+4=0.
21. Знайти точку перетину прямої з віссю Ox і Oy 5x+4y+20=0.
22. Знайти точку перетину прямих x+y–2=0 і x–2y–8=0.
23. Знайти точку перетину прямої з віссю Ox і Oy 2x–5y+10=0.
24. Знайти точку перетину прямої з віссю Ox і Oy 4x+6y–3=0.
25. Написати рівняння у відрізках $y=-(3/7)x+7$.

<u>Завдання 2</u>: Напишіть рівняння прямої в тривимірному просторі, яка проходить через точку M і через точку перетину прямих l_1 і l_2

Варіанти:

1. $M(1;-2); l_1: 2x-y-1=0; l_2: x+3y-4=0.$
2. $M(-4;0); l_1: x+y-2=0; l_2: x-3y+2=0.$
3. $M(1;-1); l_1: 7x-2y-5=0; l_2: x-5y+4=0.$
4. $M(4;3); l_1: 5x-2y-1=0; l_2: 2x-3y+4=0.$
5. $M(3;3); l_1: x-2y-1=0; l_2: x-7y+4=0.$
6. $M(4;4); l_1: 2x+2y-2=0; l_2: x-3y+5=0.$
7. $M(0;-3); l_1: x+4y-3=0; l_2: x+5y+4=0.$
8. $M(2;-2); l_1: 3x+2y-1=0; l_2: x-3y-4=0.$
9. $M(-2;0); l_1: 2x+3y+5=0; l_2: -x+4y+3=0.$
10. $M(1;-2); l_1: 2x+y+6=0; l_2: 3x+5y-15=0.$
11. $M(2;1); l_1: 2x-y+3=0; l_2: 3x+5y+11=0.$
12. $M(-1;-3); l_1: 3x+2y-5=0; l_2: x-2y+1=0.$
13. $M(-1;1); l_1: 3x+2y-5=0; l_2: x-2y+1=0.$
14. $M(2;-3); l_1: x+y-2=0; l_2: x-2y-1=0.$
15. $M(4;0); l_1: x+2y-5=0; l_2: x-2y+2=0.$
16. $M(3;-2); l_1: x-2y+3=0; l_2: 3x-y-1=0.$
17. $M(0;1); l_1: x+3y-7=0; l_2: -x+y-1=0.$
18. $M(1;0); l_1: 4x-y-5=0; l_2: x+2y-8=0.$
19. $M(-1;-4); l_1: 2x-y-5=0; l_2: x+y-7=0.$
20. $M(2;-4); l_1: 3x-y+10=0; l_2: -x-y-2=0.$

21. $M(2;-5); l_1: 3x-4y-5=0; l_2: 4x+3y-15=0.$

22. $M(2;1); l_1: -2x+y-1=0; l_2: 2y+1=0.$

23. $M(1;-4); l_1: -2x+2y-11=0; l_2: 2x+3=0.$

24. $M(-2;4); l_1: -x+2y-1=0; l_2: -7x-4y+11=0.$

25. $M(2;3); l_1: -x+y-4=0; l_2: -7x-4y-6=0.$

Завдання 3: В трикутнику *ABC* складіть рівняння:

a) сторони *BC;*

b) висоти, опущеної з вершини *A* на сторону *BC;*

c) медіани, проведеної з вершини *C.*

Варіанти:

1) *A*(-3; 3), B(5; 1), C(6; -2);
2) A(2; -1), B(4; 5), C(-3; 2);
3) A(2; 0), B(5; 3), C(3; 7);
4) A(-3; 3), B(5; 1), C(6; -2);
5) A(2; 1), B(-1; -1), C(3; 2);
6) A(0; 1), B(-2; 2), C(3; -2);
7) A(-2; -1), B(1; 1), C(4; 0);
8) A(3; -1), B(-3; 1), C(1; 4);
9) A(4; -2), B(1; 6), C(-3; 1);
10) A(4; 2), B(-1; 3), C(1; -2);
11) A(0; 4), B(-3; -2), C(0; 1);
12) A(2; 0), B(-2; 1), C(1; -1);
13) A(-1; 1), B(1; -2), C(3; 1);
14) A(1; 1), B(-2; -3), C(2; 0);
15) A(2; 4), B(1; 1), C(4; 2);
16) A(3; 2), B(-1; 3), C(1; -2);
17) A(3; 4), B(2; 1), C(5; 2);
18) A(5; 4), B(4; 1), C(7; 2);
19) A(2; 2), B(1; -1), C(4; 0);
20) A(2; 1), B(1; -2), C(4; -1);
21) A(2; 7), B(1; 4), C(4; 5);
22) A(2; 0), B(1; -3), C(4; -2);
23) A(2; 6), B(1; 3), C(4; 4);
24) A(-1; 0), B(1; 5), C(4; -3);
25) A(2; 5), B(1; 2), C(4; 3).

Тема 2 Площина в тривимірному просторі.

1. Загальне рівняння площини та його випадки.

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними визначає площину. І навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня відносно змінних координат, які задають довільну точку площини.

Загальне рівняння площини в просторі має вигляд:

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0,$$

де числа A, B, C координати нормального вектора $\bar{n} = (A, B, C)$ – вектор перпендикулярний площині.

Розглянемо неповні рівняння площини

Рівняння площини	Зауваження
$Ax+By+Cz=0$	Площина проходить через початок координат.
$By+Cz+D=0$ $Ax+Cz+D=0$ $Ax+By+D=0$	Площина паралельна осі OX. Площина паралельна осі OY. Площина паралельна осі OZ.
$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$	Площина проходить через вісь OX. Площина проходить через вісь OY. Площина проходить через вісь OZ.
$By+D=0$ $Ax+D=0$ $Cz+D=0$	Площина паралельна площині OXZ. Площина паралельна площині OYZ. Площина паралельна площині OXY.
$X=0$ $Y=0$ $Z=0$	Координатна площина OYZ. Координатна площина OXZ. Координатна площина OXY.

2. Різні види рівнянь площини в просторі.

1. *Рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно до заданого вектора* $\bar{n} = (A, B, C)$, має такий вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що не лежать на одній прямій:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і паралельна векторам* $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ *і* $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$*:*

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Рівняння площини у відрізках на осях*: $\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ де a, b, c — відрізки, які площина відтинає від осей координат.

5. *Нормальне рівняння площини* має вигляд:

$$\pi: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

де $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — вектор нормалі.

6. *Параметричне рівняння* площини:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2, \\ y = y_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2, \\ z = z_0 + t_1 p_1 + t_2 p_2; \end{cases}$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) \parallel \pi \parallel \vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$.

3. Відстань та відхилення від точки до площини.

Відстань d між точкою $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та площиною $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Відхилення точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \pi: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

$$\delta(M_0, \pi) = \begin{cases} \rho(M_0, \pi), \text{ якщо } M_0 \text{ і } O \text{ в одному підпросторі з межею } \pi, \\ -\rho(M_0, \pi), \text{ якщо } M_0 \text{ і } O \text{ в різних підпросторах з межею } \pi. \end{cases}$$

$$\delta(M_0, \pi) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p =$$

$$= \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак вибирається протилежним до знаку числа D.

4. Взаємне розміщення двох площин.

Нехай дві площини задано загальними рівняннями, тоді $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – вектори нормалей до площин.

1. *Кут між площинами* визначається кутом Q між векторами $\bar{n}$ і $\bar{m}$:

$$\cos Q = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2. *Умова перпендикулярності площин* $\bar{n} \perp \bar{m}$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. *Умова паралельності площин* $\overline{n} \parallel \overline{m}$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

Розв'язання:

Рівняння площини, яка проходить через дані точки знайдемо за формулою:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо

$$2(z-1)+9(y-1)-6(z-1)-6(x-1)=0.$$

Отже, $-6x+9y-4z+1=0$ – шукане рівняння площини.

Відповідь*:* $-6x+9y-4z+1=0$.

Приклад 2. Знайти довжину висоти *AH* піраміди, заданої координатами своїх вершин: $A(-1;2;-1), B(1;0;2), C(0;1;-1), D(2;0;-1)$.

Розв'язання:

Висоту *AH* знайдемо як відстань від точки *A*(–1;2;–1) до площини *BCD*.

Знайдемо рівняння площини *BCD*:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, маємо $3x+6y+z-5=0.$

Знайдемо довжину висоти АН за формулою : $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$$d = \frac{|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{|-3+12-1-5|}{\sqrt{9+36+1}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

Відповідь: $AH = \frac{3}{\sqrt{46}}$.

Приклад 3. Скласти рівняння площини, яке проходить через т.А(5;4;3) і відтинає рівні відрізки на осях координат.

Розв'язання:

Використовуємо рівняння у відрізках на осях, в якому $a=b=c$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Замість x, y, z в останню рівність підставляємо координати точки A, отримаємо:

$$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1\Rightarrow a=12.$$

Підставляючи 12 замість параметра a у рівність $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, отримаємо рівняння площини, яка відтинає рівні відрізки на осях координат:

$$x+y+z-12=0.$$

Відповідь: $x+y+z-12=0$.

Приклад 4.

Знайти рівняння площини,що проходить через точки $M_1(3;0;4)$ і $M_2(5;2;6)$ перпендикулярно до площини $2x+4y+6z-7=0$.

Розв'язання:

Нехай точка $M(x,y,z)$ - довільна точка шуканої площини. Тоді вектори

$\overline{M_1M}=(x-3;y-0;z-4)$ і $\overline{M_1M_2}=(2;2;2)$ належать цій площині.

Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ компланарні з нормальним вектором $\bar{n}=(2;4;6)$ заданої площини $2x+4y+6z-7=0$. Отже, мішаний добуток цих трьох векторів дорівнює нулю:

$$\left(\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\bar{n}\right)=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Розв'язавши визначник, одержимо шкане рівняння площини:

$$x-2y+z-7=0.$$

Відповідь: $x-2y+z-7=0$.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x-y-z-1=0, x+2z-4=0, x-y=0$, через початок координат і через точку $P(7;1;2)$.

Розв'язання:

Знайдемо точку перетину трьох заданих площин. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ x + 2z - 4 = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Знайдемо визначник системи:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 4 = 3.$$

Знайдемо визначник Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6.$$

Таким чином $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{6}{3} = 2; x = 2.$

Із третього рівняння системи знайдемо, що $y = x, y = 2.$

Із другого рівняння системи знаходимо z:

$$z = \frac{4 - x}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1,\ z = 1.$$

Точка перетину трьох заданих площин $M(2;2;1)$.

Для знаходження рівняння шуканої площини використаємо формулу рівняння площини, що проходить через три задані точки, одержимо:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 2 - 0 & 2 - 0 & 1 - 0 \\ 7 - 0 & 1 - 0 & 2 - 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Спростивши, маємо:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, одержимо рівняння шуканої площини:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4x + 2z + 7y - 14z - x - 4y = 3x + 3y - 12z = 0.$$

або $x + y - 4z = 0.$

Відповідь: $x + y - 4z = 0.$

Приклад 6. Задано координати чотирьох точок:

$A(1;0;4)$, $B(-1;1;-4)$, $C(0;5;7)$, $D(2;4;3)$. Знайти: висоту піраміди $ABCD$ проведену з вершини A; кут нахилу грані ABC до площини основи BCD.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння площин BCD і ABC за формулою:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+4 \\ 1 & 4 & 11 \\ 3_1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

звідки $5x - 26y + 9z + 67 = 0.$

Аналогічно знаходимо рівняння площини ABC:
$43x + 11y - 9z - 7 = 0.$

Висоту піраміди знаходимо за іормулою відстані від точки A до площини BCD: $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$h = \frac{|5 \cdot 1 - 26 \cdot 0 + 9 \cdot 4 + 67|}{\sqrt{5^2 + 26^2 + 9^2}} \approx 3{,}86.$$

Кут нахилу грані ABC до площини основи BCD знаходимо за формулою:

$$\cos Q = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$$\cos Q = \frac{2 \cdot 43 - 26 \cdot 14 + 9 \cdot (-9)}{\sqrt{5^2 + (-26)^2 + 9^2}\sqrt{43^2 + 14^2 + (9)^2}} \approx -0{,}1784.$$

Відповідь: $h \approx 3{,}86$, $\cos Q = \approx -0{,}1784.$

Приклад 7. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;1)$ перепендикулярної до площини $3x + 2y - z + 4 = 0$ і $x + y + z - 3 = 0$.

Розв'язання:

Запишемо рівняння площини, що проходить через точку M:

$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-1) = 0.$$

Використаємо умову перпендикулярності площин: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Записавши умову перепендикулярності з обома площинами, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3A + 2B - C = 0 \\ A + B + C = 0 \end{cases}.$$

Розв’язавши систему виразимо два невідомі через третє: $B=-\frac{4}{3}A,\ C=\frac{1}{3}A.$

Знайдені значення B і C підставимо в рівняння площини:

$$A(x-2)-\frac{4}{3}A(y+1)+\frac{1}{3}A(z-1)=0.$$

Скоротивши рівняння на $\frac{1}{3}A$ будемо мати:

$3(x-2)-4(y+1)+(z-1)=0$ або $3x-4y+z-11=0.$

Відповідь: $3x-4y+z-11=0.$

Приклад 8 Задано дві точки $A(3;-1;2)$ і $B(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{AB}$.

Розв’язання:

Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через задану точку

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

І одержимо рівняння площини, яка проходить через точку $A(3;-1;2)$:

$$A(x-3)+B(y+1)+C(z-2)=0.$$

Нормальний вектор

$$\overline{AB}=(4-3)\bar{i}+(-2+1)\bar{j}+(-1-2)\bar{k}=\bar{i}-\bar{j}-3\bar{k}=\{1;-1;-3\}.$$

Підставимо координати вектора $\overline{AB}=\{1;-1;-3\}$ замість A, B, C в рівняння, що одержали раніше, будемо мати:

$(x-3)-(y+1)-(z-2)=0$ або $x-y-3z+2=0.$

Відповідь: $x-y-3z+2=0.$

Приклад 9 Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(-4;3;-7)$ та паралельна до площини $6x-5y+4z-15=0.$

Розв’язання:

Оскільки шукана площина паралельна площині $6x-5y+4z-15=0$, то в якості її нормального вектора візьмемо вектор нормаль $\overline{N}(6;-5;4)$ даної площини. Тепер шукане рівняння площини, яка проходить через точку $A(-4;3;-7)$ та перпендикулярна вектору $\overline{N}(6;-5;4)$, має вигляд:

$$6(x+4)-5(y-3)+4(z+7)=0 \text{ або } 6x-5y+4z+67=0.$$

Відповідь: $6x-5y+4z+67=0.$

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання1

1. Привести до нормального вигляду рівняння площини 3x-3y-6z+21=0.
2. Привести до нормального вигляду рівняння площини 2x+2y+z-6.
3. Знайти довжину перпендикуляра, який виходить з т M(2;3;-5) на площину 4x-2y+5z-12=0.
4. Знайти кут між площинами 3x+4y-z-30=0 і 2x+2y+z-6=0.
5. Написати рівняння площини, яке проходить через три точки: A(-7;4;2), B(2;1;-3), C(3;2;1).
6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(1;2;3) паралельно площині, заданої рівнянням 2x-3y+z=0.
7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(1;2;3) перпендикулярно до двох площин x-y+z+2=0 і 2x+y-z=0.
8. Знайти відрізки, які відтинає задана площина на осях координат і побудувати цю площину: 2x-3y+4z-12.
9. Через точки (1;1;1) і (2;2;2) провести площину, перпендикулярну до площини x+y-z=0
10. Скласти рівняння площини, знаючи, що вона відтинає на координатних осях відрізки a=2, b=-3, c =4.
11. Задана площина 3x-4y+12z+14=0 і точка M(4;3;1). Знайти відхилення точки M від даної площини.
12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(2;3;5) і перпендикулярна вектору P=3i+3j+2k.
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(5;4;3) і відсікає рівні відрізи на осях координат.
14. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки A(2;-1;4) і B(3;2;1) перпендикулярно площині .
15. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M(3;-1;-5) і перпендикулярна до площин $3x-2y+2z+7=0,\ \ 5x-4y+3z+11=0$
16. Через точки A(1;4;3) і B(3;-2;8) провести площину паралельну осі Ox.
17. Знайти відстань від точки M(1;3;-2) до площини $2x-3y-4z+12=0$.
18. Через точки A(2;4;6) і B(4;-2;8) провести площину паралельну осі Oz.
19. Написати рівняння площини, яке проходить через три точки: A(2;4;2), B(2;0;-3), C(3;2;1).
20. Знайти кут між площинами $x+y-z-2=0,\ 3x+5y-4z+7=0$.
21. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x+3y+5z-4=0,\ \ x-y-2z+7=0$ і паралельна площині Oy.

22. Написати рівняння площини, яке проходить через початок координат і через точки А (4;-2;1) і В(2;4;-3)
23. Знайти відстань від точки М(2;6;-4) до площини $2x-3y-2z+10=0$.
24. Знайти точку перетину пощин $x+y-z-2=0,\ 3x+5y-4z+7=0,$ $2x-3y-4z+12=0$.
25. Яка із площин $x+y+2z-3=0$ і $2x-3y-2z+10=0$ розміщена ближче до початку координат.

Завдання2 Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M, перпендикулярно до площини.

Варіанти:

1. $M(7;-2;5),\ x-2y+z-4=0,\ x+2y+2z+4=0;$
2. $M(3;1;-2),\ x+2y-4z+5=0,\ 3x-y+2z-7=0;$
3. $M(4;-2;5),\ 2x-2y+4z+1=0,\ 3x-2y+2z-3=0;$
4. $M(8;-2;2),\ x-2y-8z+5=0,\ x+2y+2z-3=0;$
5. $M(3;-2;5),\ 4x-5y-2z+1=0,\ 3x+3y-z-6=0;$
6. $M(-2;-2;1),\ -3x+7y+4z+1=0,\ 4x+y+2z+4=0;$
7. $M(4;-2;7),\ 9x-y-z+4=0,\ 3x+5y+7z-3=0;$
8. $M(7;-6;5),\ x-2y-3z+1=0,\ 3x-2y+3z+5=0;$
9. $M(6;-7;4),\ 2x-y+z+1=0,\ 3x+9y+2z+1=0;$
10. $M(4;-2;5),\ 2x-2y+z+4=0,\ -3x-2y+2z-5=0;$
11. $M(3;-1;5),\ 2x+y+3z+1=0,\ 3x-2y-z+8=0;$
12. $M(4;3;5),\ 2x-2y+z-6=0,\ 3x+y+2z-9=0;$
13. $M(4;-2;5),\ x-2y+z+1=0,\ 6x-2y+z-7=0;$
14. $M(4;2;3),\ x-y+z+1=0,\ x-y+2z-3=0;$
15. $M(-3;4;5),\ -3x-2y+4z+1=0,\ x-2y+2z-5=0;$
16. $M(1;0;6),\ x-2y+4z-10=0,\ 3x-2y+2z-3=0;$
17. $M(-2;-2;-2),\ 6x-2y+4z-2=0,\ 2x-2y+2z-2=0;$
18. $M(0;2;-3),\ 2x-2y+4z+2=0,\ 3x-8y+2z-3=0;$
19. $M(2;-2;2),\ 4x+2y-5z+1=0,\ 3x+5y+z+6=0;$
20. $M(3;-4;5),\ x+5y+4z+9=0,\ 4x+2y+2z+9=0;$
21. $M(4;5;6),\ x-y+z+1=0,\ x-y+2z-3=0;$
22. $M(-3;-2;-4),\ -x-2y++6z+-5=0,\ 8x-2y+z-1=0;$
23. $M(3;7;6),\ 3x-4y+5z+6=0,\ 7x-6y+5z-4=0;$
24. $M(-2;-2;0),\ 9x-2y-4z+-3=0,\ 3x-2y+2z-3=0;$
25. $M(5;-1;8),\ 2x-2y+4z+1=0,\ x-y+z-1=0.$

Завдання3

Задано координати вершин піраміди $ABCD$. Знайти:

1. загальне і нормальне рівняння площини основи ABC;
2. кут між гранями ABD і ABC.
3. висоту піраміди $ABCD$ проведену з вершини A.

Варіанти:

1. А(1;3;6), В(2;2;1), С(-1;0;1), Д(-4;6;-3);
2. А(-2;2;8), В(2;4;6), С(-1;5;8), Д(3;-3;-2);
3. А(7;2;4), В(7;-1;2), С(6;3;-7), Д(3;-8;-6);
4. А(2;1;4), В(-1;5;-2), С(-7;-3;3), Д(-3;3;6);
5. А(-1;-5;2), В(-6;0;-3), С(3;6;-3), Д(-10;6;7);
6. А(0;-1;-1), В(3;-2;3), С(0;2;-7), Д(-30;10;6);
7. А(5;2;0), В(1;2;4), С(2;5;0), Д(-1;1;1);
8. А(2;-1;-2), В(1;2;1), С(5;0;-6), Д(-110;9;-7);
9. А(-2;0;-4), В(-1;7;1), С(4;-8;-4), Д(1;-4;6);
10. А(1;3;0), В(4;-1;2), С(3;0;1), Д(4;3;0);
11. А(-2;3;-5), В(4;0;-3), С(-3;4;-6), Д(1;1;1);
12. А(2;-1;2), В(1;2;-1), С(3;2;1), Д(-4;2;5);
13. А(1;1;2), В(-1;1;3), С(2;-2;4), Д(-1;0;-2);
14. А(2;3;1), В(4;1;-2), С(6;3;7), Д(7;5;-3);
15. А(1;5;-7), В(-3;6;3), С(-2;7;3), Д(-4;8;-12);
16. А(-4;2;6), В(2;-3;0), С(-10;5;8), Д(-9;-5;5);
17. А(-1;24-3), В(4;-1;0), С(2;1;-2), Д(3;4;5);
18. А(4;-1;3), В(-2;1;0), С(0;-5;1), Д(3;2;-6);
19. А(2;-3;1), В(4;-1;5), С(7;2;-1), Д(1;2;3);
20. А(1;2;0), В(1;-1;2), С(0;1;-1), Д(-3;0;1);
21. А(1;0;2), В(1;2;-1), С(2;-2;1), Д(2;1;0);
22. А(1;0;2), В(1;2;-1), С(2;-2;1), Д(2;1;0);
23. А(1;2;-3), В(1;0;1), С(-2;-1;6), Д(-2;-5;-4);
24. А(3;10;-1), В(-2;3;-5), С(-6;0;-3), Д(1;-1;2);
25. А(-1;2;4), В(-1;-2;-4), С(-3;0;-1), Д(0;6;2).

Тема 3 Пряма в тривимірному просторі. Пряма і площина.

Пряма лінія в просторі визначається як лінія перетину двох площин.

1. Різні види рівнянь прямої у просторі.

1. *Канонічне рівняння прямої* (рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, паралельно до заданого вектора $\overline{S} = (l,m,n)$):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

2. *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ має такий вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. *Загальне рівняння прямої.* Будь-яка пряма лінія у просторі подається системою двох рівнянь, які задають дві різні площини, що проходять через цю пряму.

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$ – загальне рівняння прямої.

4. *Параметричне рівняння прямої:*

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt,\ \ t\in R.\\z=z_0+nt\end{cases}$$

5. *Перехід від загального рівняння прямої до канонічного.*

Щоб від загальних рівнянь прямої перейти до канонічних рівнянь, потрібно знайти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s}=(l;m;n)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x=x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають із системи:

$$\begin{cases}B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0\\B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0\end{cases}.$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі загального рівняння довільне значення надають змінній *y* або змінній *z*.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори n_1 і n_2 даних площин перпендикулярні до прямої. Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}.$$

Отже,

$$l=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix},\ \ m=\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix},\ n=\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}.$$

2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.

Нехай дві прямі у просторі визначаються рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ \text{і}\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Тоді $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ та $\bar{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ - напрямні вектори даних прямих.

1) *Прямі паралельні,* якщо напрямні вектори прямих паралельні, тобто

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

2)*Прямі взаємноперпендикулярні*, якщо напрямні вектори прямих перпендикулярні, тобто

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

3) *Кут між прямими* визначається кутом Q між їх напрямними векторами:

$$\cos Q = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

3. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Нехай площина задається рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, а пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$. Тоді $\bar{n}(A, B, C)$ – вектор нормалі площини, а $\vec{s} = (l; m; n)$ – напрямний вектор прямої.

1) *Кут між прямою і площиною* визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

2) *Умова паралельності* площини і прямої ($\bar{n} \perp \bar{s}$):

$$\bar{n} \cdot \bar{s} = 0, \; Al + Bm + Cn = 0.$$

3) *Умова перпендикулярності* прямої і площини ($\bar{n} \parallel \bar{s}$):

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

4) *Точка перетину* прямої і площини.

Для визначення точки перетину прямої $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1} \end{cases}$$

Рівняння прямої записуємо в параметричному вигляді: $x = x_1 + lt, \; y = y_1 + mt, \; z = z_1 + nt.$

Ці значення x, y, z підставляємо в рівняння площини та знаходимо значення t:

$$t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Підставляючи знайдене значення t в параметричні рівняння $x = x_1 + lt, \; y = y_1 + mt, \; z = z_1 + nt,$ знаходимо координати точки

перетину прямої і площини.

5) *Умова належності прямої площині*.

Умова, при якій пряма $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ лежить в площині $Ax+By+Cz+D=0$ визначається наступним рівняннями:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$$

6) *Умова належності двох прямих одній площині*.

Умова, при якій дві прямі $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ лежать в одній площині, є рівність:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z+8=0$.

Розв'язання:

Оскільки пряма l перпендикулярна до площини, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини: $\bar{s}=\bar{n}=(2,1,-1)$

Тепер одержуємо рівняння прямої l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

Відповідь: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

Приклад 2. Звести рівняння прямої $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв'язання:

Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях x=0 і розв'яжемо систему $\begin{cases} y-z-1=0 \\ y+3z+5=0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y=z+1 \\ -z-1+3z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z+1 \\ 2z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Отже, точка M_0(0;-1;-2) належить даній прямій. Напрямний вектор

$\bar{s}$ знаходимо за формулою: $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 5\bar{j} - 3\bar{k}.$$

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{n-3}$.

Відповідь: $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{n-3}$.

Приклад 3. Знайти відстань між двома прямими**:**

$$l_1: \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Розв'язання:

Вектори напрямку даних прямих $\vec{s}_{l_1} = (4;-3;2)$ і $\vec{s}_{l_2} = (8;-3;3)$ неколінеарні. Розглянемо вектор $M_1\vec{M}_2$, де $M_1(-3;6;3) \in l_1$, $M_2(4;-1;-7) \in l_2$, $M_1\vec{M}_2 = (7;-7;-10)$ і обчислимо

$$\vec{s}_{l_1}\vec{s}_{l_2}\,M_1\vec{M}_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & -10 \end{vmatrix} = 120 - 112 - 63 + 42 + 84 - 240 = -169 \neq 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Шукана відстань є відстанню від прямої l_1 (а отже, точки M_1) до площини π, яка проходить через пряму l_2 і паралельна прямій l_1. Рівняння цієї площини:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z+7 \\ 8 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6(x-4) + 12(y+1) - 24(z+7) + 12(z+7) + 9(x-4) - 16(y+1) = 0,$$

$$3(x-4) - 4(y+1) - 12(z+7) = 0,$$

$$\pi: \; 3x - 4y - 12z - 100 = 0.$$

Обчислимо відстань від точки M_1 до площини π:

$$d(M_1,\pi) = \frac{|3\cdot(-3) - 4\cdot 6 - 12\cdot 3 - 100|}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{169}{13} = 13.$$

Відповідь: 13.

Приклад 4. Скласти канонічне та параметричне рівняння, що проходить через точки $M_1(3;-5;2)$ та $M_2(1;-1;-4)$.

Розв'язання:

Канонічне рівняння прямої знаходимо за формулою:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+5}{-1+5}=\frac{z-2}{-4-2}\Rightarrow\frac{x-3}{-2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-2}{-6}$$

або

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}.$$

Для знаходження параметричного рівняння використаємо формулу:

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt\end{cases}$$

тоді одержимо:

$$\begin{cases}x=3+t\\y=-5-2t.\\z=2+3t\end{cases}$$

Відповідь: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}$, $\begin{cases}x=3+t\\y=-5-2t.\\z=2+3t\end{cases}$

Приклад 5. Скласти рівняння прямо, що проходить через точку $M_1(2;-3;4)$ і перпендикулярно до прямих $\frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}$ і $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

Розв'язання:

Рівняння шуканої прямої є: $\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}$.

Задані прямі мають напрямні вектори: $\bar{s}_1(1;-1;1)$ і $\bar{s}_2(2;1;3)$.

Так як шукана пряма перпендикулярна до заданих прямих, то за напрямний вектор її можна прийняти векторний добуток $\bar{s}_1\times\bar{s}_2$:

$$\bar{s}_1\times\bar{s}_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k},$$

або

$$\bar{s} = (l; m; n) = (-4; -1; 2).$$

Отже, шукана пряма має рівняння:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}.$$

Відповідь: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

Приклад 6. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ з площиною $3x - y + 2z + 5 = 0$.

Розв'язання:

Представимо рівняння прямої в параметричній формі. Прирівняємо кожне з співвідношень, які входять в рівняння прямої, до параметра t:

$$\frac{x-1}{2} = t;\ \frac{y+2}{1} = t;\ \frac{z-2}{1} = t;$$

$$x = 2t + 1;\ y = t - 2;\ z = t + 2.$$

Підставимо ці значення x, y, z в рівняння даної площини:

$$3(2t+1) - (t-2) + (t+2) + 5 = 0,$$

$$6t + 3 - t + 2 + 2t + 4 + 5 = 0,$$

$$7t + 14 = 0,$$

$$t = -2.$$

Одержане значення t є значенням параметру в точці перетину прямої з площиною. Підставляємо ці значення в параметричні рівняння прямої, одержуємо:

$$x = 2(-2) + 1;\ y = -2 - 2;\ z = -2 + 2.$$

Отже, точка перетину прямої з площиною $M(-3; -4; 0)$.

Відповідь: $M(-3; -4; 0)$.

Приклад 7. Знайти проекцію точки $M(2; -1; 3)$ на площину $x + 3y - 4z - 13 = 0.$

Розв'язання:

а) Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1; 3)$ перпендикулярно до площини $x + 3y - 4z - 13 = 0.$ Спочатку напишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1; 3)$:

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-3}{n}.$$

На основі умови перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ числа l, m, n пропорційні числам A, B, C із рівняння площини. Через це, змінивши в останньому роівнянні l, m, n числами 1, 3, -4, одержимо

рівняння прямої у вигляді:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}.$$

б) Щоб знайти проекцію точки на площину, необхідно знайти координати основи перпендикуляра, проведеного із точки $M(2;-1;3)$ на площину, тобто точку перетину прямої із площиною.

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-4};\\ x+3y-4z-13=0.\end{cases}$$

Рівняння прямої $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-4}$ представляємо в параметричній формі. Одержимо: $\begin{cases}x=t+2,\\ y=3t-1,\\ z=-4t+3.\end{cases}$. Одержані значення x, y, z підставляємо в рівняння плоощини:

$$t+2+3(3t-1)-4(-4t+3)-13=0,$$
$$t+2+9t-3+16t-12-13=0,$$
$$26t-26=0,\ t=1.$$

Значення параметра $t=1$ підставляємо в параметричне рівняння прямої:

$$x=1+2=3,\ \ y=3\cdot 1-1=2,\ \ z=-4\cdot 1+3=-1$$

Отже, проекція точки на площину є точка $M'(3;2;-1)$.

Відповідь: $M'(3;2;-1)$.

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання 1: Пряма задана загальним рівнянням. Напишіть її канонічне та параметричне рівняння.

1) $\begin{cases}x-2y+3z-4=0:\\ 3x+2y-5z-4=0.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+y+z-4=0:\\ 2x-y-3z+1=0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-y+z-3=0:\\ x+2y-2z-4=0.\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x-y+z-4=0:\\ -2x+2y-5z=0.\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x-y+4z-6=0:\\ x+y-5z-4=0.\end{cases}$

14) $\begin{cases}2x+y+2z+4=0:\\ -x-3y-z+3=0.\end{cases}$

15) $\begin{cases}-2x-y+z-1=0:\\ x+4y+z+3=0.\end{cases}$

16) $\begin{cases}x-y-z-2=0:\\ x-2y+z+4=0.\end{cases}$

17) $\begin{cases}x+4y-z+1=0:\\ 2x+y+4z-3=0.\end{cases}$

18) $\begin{cases}5x+3y+z-18=0:\\ 2y+z-9=0.\end{cases}$

6) $\begin{cases} -x-2y+2z-2=0: \\ x+5y+3z-1=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-y+z-2=0: \\ x-2y+3z-2=0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x-2y+3z+4=0: \\ x+2y-5z+6=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-4y+z+4=0: \\ 2x+3y+4z+7=0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x-3y+z-1=0: \\ x+3y-2z-5=0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x-4y+3z-4=0: \\ 2x+4y-5z+1=0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} -x-y+3z-5=0: \\ 3x+2y-5z+3=0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x+y+z-10=0: \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x-y-5=0: \\ 2x+y-3=0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y-35=0: \\ x+2y-2z-7=0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x+2y+z-1=0: \\ x+z-1=0. \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x+2y+z+9=0: \\ x-y+3z-1=0. \end{cases}$

23) $\begin{cases} x-3y-2z-8=0: \\ x+y-z+3=0. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 6x+3y-2z=0: \\ x+2y+6z-12=0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 3x+2y-3z-1=0: \\ x+y+z-7=0. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 3x-2y+2z-2=0: \\ 5x+2y-2z+4=0. \end{cases}$

<u>Завдання 3</u>: Знайти точку перетину прямої l і площини α .

1) $l: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}, \quad \alpha: x+3y+5z-42=0$

2) $l: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}, \quad \alpha: 7x+y+4z-47=0$

3) $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{3}, \quad \alpha: x-2y+z-8=0$

4) $l: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{2}, \quad \alpha: 3x+y-z+13=0$

5) $l: \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+1}{0}, \quad \alpha: 2x-2y+3z-21=0$

6) $l: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{-3}, \quad \alpha: 3x-y-z-3=0$

7) $l: \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-4}, \quad \alpha: x+y+z-10=0$

8) $l: \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{5}, \quad \alpha: 2x+3y-2z-11=0$

9) $l: \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-6}{-3}, \quad \alpha: 7x+2y+2z+2=0$

10 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$, $\alpha: 5x + 3y + 4z + 23 = 0$

11) $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$, $\alpha: 2x - y + 4z = 0$

12) $l: \frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-3}$, $\alpha: 17x - 4y - z + 6 = 0$

13) $l: \frac{x-7}{5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+4}{3}$, $\alpha: 3x - 9y + z + 1 = 0$

14) $l: \frac{x-4}{4} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{4}$, $\alpha: 2x + 2y - z + 7 = 0$

15) $l: \frac{x+5}{0} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{3}$, $\alpha: 2x + y + 3z - 20 = 0$

16) $l: \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-3}$, $\alpha: x + y + z - 7 = 0$

17) $l: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-6}{-2}$, $\alpha: x + y + 13z - 26 = 0$

18) $l: \frac{x+3}{7} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$, $\alpha: 2x + 11y - 2z + 1 = 0$

19) $l: \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+1}{2}$, $\alpha: 2x + 3y + 2z + 11 = 0$

20) $l: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{7}$, $\alpha: 2x + 2y + z - 26 = 0$

21) $l: \frac{x-4}{-2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-6}{-3}$, $\alpha: 5x + 3y + 2z - 28 = 0$

22) $l: \frac{x}{-4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-7}{3}$, $\alpha: x + 2y + 2z - 6 = 0$

23) $l: \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-8}{-2}$, $\alpha: x + 3y + 5z - 32 = 0$

24) $l: \frac{x-5}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-7}{3}$, $\alpha: 2x + 5y + 6z + 24 = 0$

25) $l: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+4}{-3}$, $\alpha: 4x + 5y + 6z + 4 = 0$.

Тема 4: Геометричні перетворення площини.

1.Відображення та перетворення множин.

1) Відображення

Відображенням множини X в множину Y називається відповідність f, при якій кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$.

Елемент $y \in Y$ називається *образом* елемента $x \in X$, а елемент x — *прообразом* елемента y при відображенні f множини X в множину Y. Множина X' образів всіх елементів множини X називається *образом* множини X при відображенні f.

Відображення $f: X \to Y$ називається:

1.*ін'єктивним* (*ін.'єкцією*), якщо $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$;

2. *сюр'єктивним* (*сюр'єкцією*), якщо $f(X) = Y$.

Сюр'єктивне відображення множини X в множину Y ще називають *відображенням* множини X *на* множину Y.

Відображення f: $X \to Y$, що є одночасно ін'єктивним і сюр'єктивним, називається *взаємно однозначним* або *бієктивним відображенням* множини X на множину Y.

Нехай $f : X \to Y$ – взаємно однозначне відображення. У цьому випадку для кожного $y \in Y$ існує єдиний елемент $x \in X$ такий, що $f(x) = y$. Рівність $f^{-1}(y) = x$, де $f(x) = y$, визначає деяке відображення $f^{-1} : Y \to X$, яке називається відображенням, *оберненим* до відображення f.

2) Перетворення множини

Перетворенням (непорожньої) *множини* X називається кожне взаємно однозначне (тобто бієктивне) відображення множини X на себе.

Перетворення f множини X називається *інволютивним* (або *інволюцією*), якщо воно відмінне від тотожного і співпадає зі своїм оберненим перетворенням, тобто $f^{-1} = f$.

2. Теоретико-груповий погляд на геометрію

Нехай задано множину E елементів довільної природи і деяку групу G її перетворень. Домовимось називати множину E простором, її елементи — точками, а кожну сукупність точок — фігурою. *Ті властивості фігури F і величини, що з нею зв'язані, які зберігаються при всіх перетвореннях групи G, називають інваріантами* (інваріантними властивостями) *групи G* ("invariant" — *незмінний*).

Система тверджень про властивості фігур і з ними зв'язаних величин, інваріантних відносно всіх перетворень групи G, називається геометрією групи G.

3. Аналітичний вираз перетворення площини

Аналітичний вираз перетворення (відображення) площини в себе – це формули

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases} \qquad (1)$$

які в деякій системі координат пов'язують координати довільної точки $M(x, y)$ з координатами її образу $M'(x', y')$ у цій же системі координат.

Найпростішими задачами аналітичної теорії геометричних перетворень є задачі на знаходження:

1. Аналітичного виразу перетворення.
2. Координат образу точки за координатами прообразу цієї точки.
3. Координат прообразу точки за координатами образу цієї точки.
4. Образів і прообразів фігур.
5. Інваріантних фігур (точок, прямих тощо).

4. Афінні перетворення площини

Перетворення площини називається *афінним*, якщо воно:

1) кожні три точки однієї прямої переводить в три точки, що лежать на одній прямій, і

2) зберігає просте відношення трьох точок.

Простим відношенням трьох точок M_1, M_2, M (однієї прямої) називається число λ таке, що $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$, що символічно записується $(M_1M_2,\ M) = \lambda$.

Основна теорема про афінні перетворення

Теорема (основна): *Якщо* $R = (O, A, B)$ *і* $R' = (O', A', B')$ *— два афінні репери площини, то існує єдине афінне перетворення* f *таке, що репер* R *переводить в репер* R'. *При цьому кожна точка площини з координатами* $(x; y)$ *в репері* R *переходить в точку* M' *з тими ж координатами* $(x; y)$ *в репері* R'.

Властивості афінних перетворень

1. Кожне афінне перетворення площини три точки, що не лежать на одній прямій, переводить в три точки, що не лежать на одній прямій.

2. Кожне афінне перетворення репер переводить в репер.

3. Афінне перетворення переводить пряму в пряму, паралельні прямі — в паралельні прямі.

4. Афінне перетворення півплощину з межею ℓ переводить в півплощину з межею ℓ', де ℓ' є образом прямої ℓ.

5. Афінне перетворення зберігає відношення "лежать між".

6. Афінне перетворення відрізок переводить у відрізок, причому середину першого — в середину другого.

7. Афінне перетворення кут переводить в кут, взагалі кажучи, не рівний першому.

Афінні перетворення 1-го та 2-го роду

Ті афінні пертворення, які зберігають орієнтацію площини, називаються *афінними перетвореннями 1-го роду*, а ті, що змінюють – *афінними перетвореннями 2-го роду*.

Теорема: *В афінній системі координат кожне афінне перетворення* f *можна задати формулами:*

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0, \end{cases} \qquad (2)$$

де a_{ij} *– дійсні числа, причому* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *тобто* $\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq \frac{a_{21}}{a_{22}}$.

Причому, якщо на площині задана афінна система координат $R = (O, A, B)$, яку афінне перетворення площини f переводить в нову афінну систему координат $R' = (O', A', B')$, то (x_0, y_0) — координати нового початку, $(a_{11}; a_{21})$ — координати першого базисного вектора, $(a_{12}; a_{22})$ — координати другого базисного вектора нової системи координат в старій системі.

Приклади афінних перетворень площини: центральна симетрія площини, осьова симетрія, коса симетрія, стиск до прямої, косий стиск, зсув площини, поворот площини, гіперболічний поворот, еліптичний поворот площини, паралельне перенесення.

5. Рухи (ізометричні перетворення) площини.

Перетворення f зберігає відстані, якщо для будь-яких двох точок A, B і їх образів $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ має місце рівність $|A'B'| = |AB|$.

Рухом (переміщенням, ізометричним перетворенням) площини називається перетворення f, яке зберігає відстані.

Кожен рух є афінним перетворенням**.**

Основна теорема про рухи.

Теорема. *Якщо* R_0 *і* R_0' *— довільні ортонормовані репери площини* π, *то існує єдиний рух, який репер* R_0 *переводить в репер* R_0'. *При цьому русі кожна точка M з заданими координатами в репері* R_0 *переходить в точку* M' *з тими ж координатами в репері* R_0'.

Специфічні властивості рухів.

Рух – це афінне перетворення, тому він успадковує всі властивості афінних перетворень. Але крім цього має свої специфічні властивості:

$\Rightarrow$ Рух переводить відрізок в рівний йому відрізок.

$\Rightarrow$ Рух переводить кут в рівний йому кут.

$\Rightarrow$ Рух переводить взаємно перпендикулярні прямі у взаємно перпендикулярні прямі.

Рухи 1-го і 2-го роду.

Рухи бувають 1-го роду (це ті, що зберігають орієнтацію площини) і 2-го роду (які змінюють орієнтацію).

Аналітичне задання рухів.

Теорема. *Кожен рух g аналітично задається формулами:*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0. \end{cases} \qquad (3)$$

При цьому g — заданий рух площини, R=(O, E_1, E_2) — деякий ортонормований репер, $R'=(O', E_1', E_2')$ — це образ репера R при русі g , $g: M(x;y)_R \to M'(x';y')_{R'}$;

$\varepsilon = 1$, *якщо R і R' мають однакову орієнтацію і* $\varepsilon = -1$ *в протилежному випадку,* $\alpha = \left(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_1'} \right)$, *($x_0$; y_0) — координати образу початку координат..*

Ознаки руху за його аналітичним заданням.

Теорема. *Якщо відображення f в ортонормованому базисі R=(O, E_1, E_2) задається формулами*: $f: \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + x_0, \\ y' = a_2x + b_2y + y_0, \end{cases}$

де $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *— ортогональна матриця, тобто* $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \end{cases}$

то f — рух, причому f — рух 1-го роду, коли $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, *і f — рух 2-го роду, коли* $\delta = -1$.

Класифікація рухів 1-го роду

Теорема 1 (Шаля). *Рухи 1-го роду вичерпуються тотожнім перетворенням, поворотом і паралельним перенесенням.*

Класифікація рухів I роду

Назва руху	Інваріантні точки	Інваріантні прямі
1. Поворот на кут α а) Поворот на кут $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq \pm \pi$	Центр повороту	Немає
б) Тотожне перетворення (α=0)	Довільна точка площини	Довільна пряма площини
в) Центральна симетрія ($\alpha = \pm \pi$)	Центр симетрії	Довільна пряма, що проходить через центр симетрії
2. Паралельне перенесення на вектор $\vec{p}$; а) Паралельне перенесення на вектор $\vec{p} \neq 0$	Немає	Довільна пряма, паралельна вектору $\vec{p}$
б) Тотожне перетворення ($\vec{p}$ =0).	Довільна точка площини	Довільна пряма площини

Класифікація рухів 2-го роду

Теорема 2 (Шаля). *Кожен рух другого роду є або осьовою, або ковзною симетрією.*

Класифікація рухів II роду

Назва руху	Інваріантні точки	Інваріантні прямі
1. Осьова симетрія	Всі точки осі	Вісь симетрії і довільна пряма, перпендикулярна до неї
2. Ковзна симетрія	Немає	Одна пряма

6. Група симетрій геометричної фігури

Нехай F — деяка фігура площини. *Симетрією* фігури F називається кожний рух площини, який переводить фігуру F в себе. При цьому не передбачається, що всі точки фігури F є нерухомими.

Множина D_F *всіх рухів площини*, які переводять фігуру F в себе, разом з операцією "композиція перетворень" утворюють групу, яка називається *групою симетрії фігури* F.

Деякі властивості групи симетрій D_F обмеженої фігури F:

1. Група симетрій D_F обмеженої фігури не містить паралельних перенесень на ненульові вектори і ковзних симетрій.
2. Обмежена фігура має не більше одного центра симетрії.
3. Якщо обмежена фігура має центр симетрії C_0, то всі осі симетрії фігури, якщо вони існують, проходять через точку C_0.
4. Якщо обмежена фігура має більш ніж одну вісь симетрії, то всі ці осі перетинаються в одній точці.

7. Перетворення подібності площини

Перетворення площини f називається *перетворенням подібності* з коефіцієнтом k ($k>0$), якщо для довільних двох точок A і B і їх образів A' і B' має місце рівність $|A'B'| = k|AB|$.

Теорема. *Перетворення подібності є афінним перетворенням.*

Наслідок. Перетворення подібності успадковує всі властивості афінних перетворень.

Властивості перетворення подібності

Враховуючи те, що перетворення подібності є композицією гомотетії і руху, всі спільні властивості гомотетії і руху є властивостями перетворення подібності, зокрема: *перетворення подібності зберігає величини кутів і переводить перпендикулярні прямі в перпендикулярні прямі.*

Кожне перетворення подібності, будучи афінним перетворенням, є перетворенням 1-го або 2-го роду. В силу теореми (про структуру перетворення подібності), рід перетворення подібності f визначається родом руху g, такого, що $f = g \circ h$, оскільки гомотетія h — це

перетворення 1-го роду.

Аналітичний вираз перетворення подібності

Теорема. *Кожне перетворення подібності площини з коефіцієнтом k можна аналітично подати формулами:*

$$f:\ \begin{cases} x' = kx\cos\alpha - \varepsilon ky\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\sin\alpha + \varepsilon ky\cos\alpha + y_0, \end{cases} \text{де}\ \ \varepsilon = \pm 1.$$

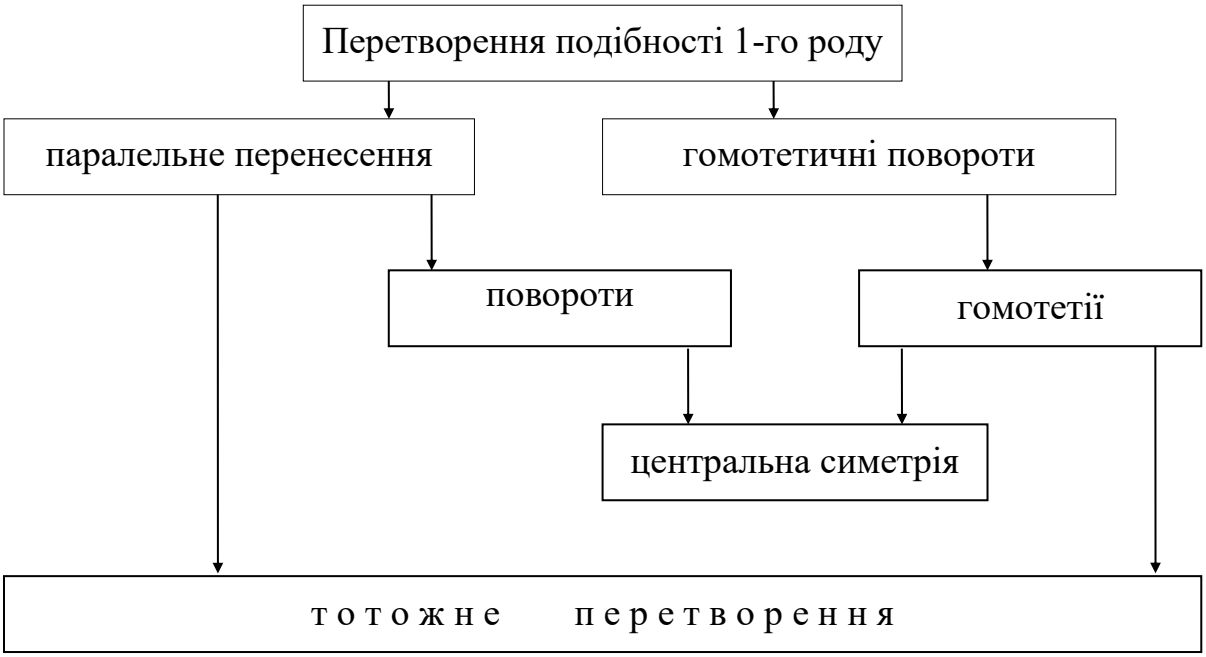
Ознака перетворення подібності за аналітичним заданням

Теорема. *Перетворення площини f, яке в прямокутній декартовій системі координат задається фомулами*

$$\begin{cases} x' = a_1 x - \varepsilon\, a_2 y + a, \\ y' = a_2 x + \varepsilon\, a_1 y + b; \end{cases} \qquad (4)$$

де $\varepsilon = \pm 1$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, причому перетворення подібності 1-го роду, якщо $\varepsilon = 1$, і 2-го роду, якщо $\varepsilon = -1$.

Класифікація перетворень подібності 1-го роду



Класифікація перетворень подібності 2-го роду



8. Самоподібні фігури (множини)

Фігура F називається *самоподібною*, якщо її можна "розбити" на

скінченну кількість частин F_1, F_2, ..., F_n $(n>1)$, кожна з яких подібна фігурі F, тобто

1. $F = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$, 2. $F \overset{k_i}{\sim} F_i$, $i = \overline{1, n}$,

3. $F_i \cap F_j$ — незрівнянно малий в порівнянні з E, якщо $i \neq j$.

Самоподібною розмірністю самоподібної фігури називається додатне число α_0, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x + \ ... \ + k_n^x = 1.$$

9. Інверсія площини.

Інверсією площини π з центром O і радіусом r (степенем r^2) називається перетворення множини π_0 всіх точок площини π без точки O, яке точці M ($M \neq O$) ставить у відповідність точку M', таку, що задовольняє умови: $\begin{cases} \vec{OM'} \uparrow\uparrow \vec{OM}, \\ \vec{OM'} \cdot \vec{OM} = r^2. \end{cases}$

Коло $\gamma = (O, r)$ з центром O і радіусом r при цьому називається *колом інверсії.*

Інверсію з центром O і радіусом r позначатимемо I_O^r.

Аналітичний вираз інверсії

Інверсія з центром в початку прямокутної декартової системи координат і радіусом *аналітично задається формулами:*

Інверсія I_C^r, центр C якої в заданій прямокутній декартовій системі координат має координати $(a;b)$, *аналітично виражається формулами:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{(x-a)r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + a, \\ y' = \dfrac{(y-b)r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + b. \end{cases}$$

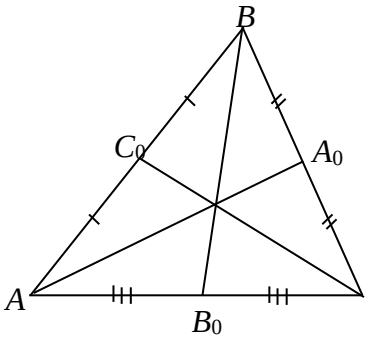
Властивості інверсії

1. Кожна пряма, яка проходить через центр інверсії є інваріантною прямою даної інверсії.
2. Інверсія пряму, яка не проходить через її центр, переводить в коло (без однієї точки), яке проходить через центр інверсії.
3. Інверсія коло, ортогональне колу інверсії, переводить в себе.
4. Коло, яке проходить через полюс інверсії, перетворюється в пряму.
5. Коло, яке проходить через дві взаємно відповідні точки A і A' при інверсії I, перетворюється в себе, а отже ортогонально перетинає коло інверсії.

<u>Приклади розв'язування вправ:</u>

Приклад 1. Використовуючи перспективно-афінні перетворення

площини, довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.



Доведення:

Нехай ABC — довільно вибраний трикутник, AA_0, BB_0, CC_0 – його медіани (мал. 1). Розглянемо афінне перетворення f_1, яке точки A, B, C переводить в точки A, C, B (таке перетворення існує в силу теореми). При перетворенні f_1 відрізок $[BC]$ переходить у відрізок $[CB]$. Тому середина A_0 цього відрізка є інваріантною.

Маючи ще одну інваріантну точку — точку A, перетворення f_1 є перспективно-афінним перетворенням з віссю AA_0, причому першого роду.

При цьому перетворенні $[AB]$ переходить в $[AC]$, а $[AC]$ в $[AB]$. Тому B_0 переходить в C_0, а C_0 в B_0, а отже, $[BB_0]$ переходить в $[CC_0]$. Оскільки пряма BB_0 перетинає вісь AA_0 в точці M_0, то за властивістю її образ CC_0 проходить через точку M_0, що й вимагалось довести.

Приклад 2. Скільки існує трикутників, у яких числові значення периметра і площі співпадають?

Розв'язання:

Нехай ABC — довільний трикутник з периметром P і площею S. Якщо $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ з коефіцієнтом k, то периметр останнього трикутника $P' = kP$, а площа $S' = k^2 S$.

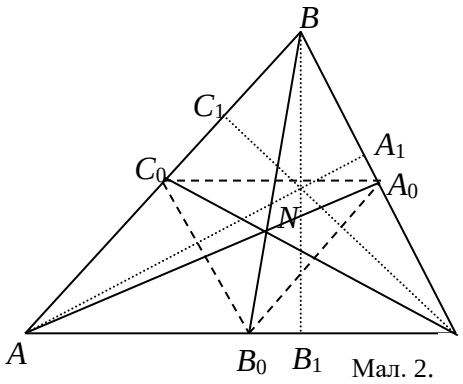
Рівність $P' = S'$, тобто $kP = k^2 S$, виконується тоді і тільки тоді, коли $k = \frac{P}{S}$.

Таким чином, для довільно вибраного трикутника існує подібний йому трикутник, у якого площа і периметр рівні. Отже, трикутників, у яких площа і периметр рівні існує безліч.

Приклад 3. Використовуючи гомотетію, довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення:

Нехай ABC — довільно вибраний трикутник, AA_0, BB_0, CC_0 — його медіани, а AA_1, BB_1, CC_1 — висоти (мал. 2).



Мал. 2.

Розглянемо центровагову гомотетію h з коефіцієнтом $k=-\frac{1}{2}$ і центром N, де N — центр ваги трикутника ABC. При цьому перетворенні:

$$\Delta ABC \to \Delta A_0B_0C_0,$$

пряма AA_1 перейде в пряму $A_0A' \| AA_1$. Оскільки $AA_1 \perp BC$, то $A_0A' \perp BC$. Отже, A_0A' — серединний перпендикуляр до сторони BC. Аналогічно можна показати, що висоти BB_1 і CC_1 при даній гомотетії переходять в серединні перпендикуляри B_0B' і C_0C'. Оскільки серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці O (центрі описаного кола), то й прообрази цих прямих перетинаються в одній точці. Задачу розв'язано.

Тема 5: Метод координат у просторі.

1. Афінна система координат у просторі, її основні задачі. Координати вектора і точки.

Афінним репером *в просторі* називається сукупність точки і впорядкованої трійки лінійно незалежних, тобто некомпаланрних, векторів, прикладених до неї. Іншими словами, афінний репер — це впорядкована четвірка некомпланарних точок.

Афінна система координат в просторі задається афінним репером $R=O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ (тобто точкою O і трьома некомпланарними векторами $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$). Її *основними (найпростішими) задачами* є:

1. Визначення положення точки $M \leftrightarrow (x,y,z)$: $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.
2. Визначення координат вектора

$$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$

де $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

3. Визначення координат (x,y,z) точки поділу M напрямленого відрізка $\overline{M_1M_2}$ у відношенні λ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

де $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

4. Встановлення факту колінеарності векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

Наслідок 1. Встановлення факту колінеарності трьох точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$:

$$M_1, M_2, M_3 \text{ — колінеарні} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Наслідок 2. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} \geq 0.$

5. Встановлення факту компланарності (лінійної залежності) векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Наслідок. Встановлення факту компланарності чотирьох точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$:

$$M_1, M_2, M_3, M_4 \text{ — компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Прямокутна декартова система координат в просторі, координатні лінії і поверхні, її основні задачі.

Прямокутна декартова система координат в просторі є частковим випадком афінної системи координат. Вона задається ортонормованим репером $R_0 = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ (тобто сукупністю точки O і трьох взаємно перпендикулярних ортів).

Будучи частковим випадком афінної системи координат, прямокутна декартова система успадковує всі основні (найпростіші) задачі попередньої, а саме:

1. Визначення положення точки. 2. Визначення координат вектора.
2. Визначення координат точки поділу M напрямленого відрізка $\overline{M_1M_2}$ у відношенні λ.
3. Встановлення факту колінеарності векторів.
4. Встановлення факту компланарності (лінійної залежності) векторів.

Крім цього до основних задач прямокутної декартової системи координат відносяться:

5. Визначення відстані між точками

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

де $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

6. Визначення кута між векторами $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

7. Встановлення факту перпендикулярності двох векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

8. Визначення проекції вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

9. Для визначення координат вектора $\vec{c}$, перпендикулярного двом даним векторам $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right)$$

10. Для обчислення об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ як на ребрах:

$$V = \left| \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right|.$$

3. Перетворення афінних координат у просторі.

Перетворення афінних координат в просторі:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0; \end{cases}$$

(x, y, z) — координати точки M в ”старій” системі координат $R = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, (x', y', z') — координати цієї ж точки в “новій” системі координат $R' = O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$, при цьому в старій системі координат $O'(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{e}_1' = (c_{11}; c_{21}; c_{31})$, $\vec{e}_2' = (c_{12}; c_{22}; c_{32})$, $\vec{e}_3' = (c_{13}; c_{23}; c_{33})$.

Часткові випадки.

1) Перетворення координат заміною координатного базису:

2) Заміна (перенесення) початку координат:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases}$$

4. Перетворення прямокутних декартових координат у просторі

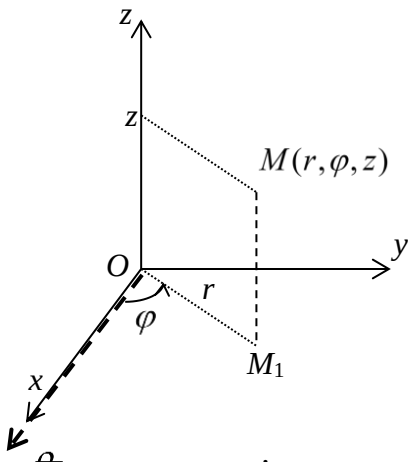
Перетворення прямокутних декартових координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + x_0, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + y_0, \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + z_0; \end{cases}$$

(x, y, z) — координати точки M в "старій" системі координат $R_0 = O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, (x', y', z') — координати цієї ж точки в "новій" системі координат $R_0' = O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$, при цьому в старій системі координат $O'(x_0; y_0; z_0)$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — напрямні кути вектора $\vec{i}'$ в базисі $<\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}>$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — напрямні кути вектора $\vec{j}'$ в базисі $<\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}>$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — напрямні кути вектора $\vec{k}'$ в базисі $<\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}>$.

5. Полярно-циліндрична система координат

Полярно-циліндричні координати (або просто циліндричні) точки в просторі – це числа r, φ і z, які пов'язані з прямокутними декартовими координатами x, y, z формулами:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x}, \\ z = z, \end{cases}$$

де $0 \le r < \infty$,
$0 \le \varphi < 2\pi$,
$-\infty < z < \infty$.

Полярно-циліндричну систему координат визначають:

1. Площина $\pi_0 = Oxy$ з вибраною на неї полярною системою координат ($O\rho$–полярна вісь)
2. Числова вісь $Oz \perp \pi_0$.

Координатними поверхнями в цій системі координат є:

1. Циліндри обертання з віссю Oz ($r = const$);
2. Півплощини з межею Oz ($\varphi = const$);
3. Площини, перпендикулярні Oz ($z = const$).

Координатними лініями (лінії перетину координатних поверхонь) є:

1. Лінії r — півпромені з початком на осі Oz, перпендикулярні Oz (лінії перетину півплощин $\varphi = const$ з площинами $z = const$).
2. Лінії φ — кола з центрами на осі Oz, площини яких перпендикулярні Oz (лінії перетину циліндрів $r = const$ з площинами $z = const$).
3. Лінії z — прямі, паралельні Oz (лінії перетину циліндрів $r = const$ з півплощинами $\varphi = const$).

6. Полярно-сферична система координат

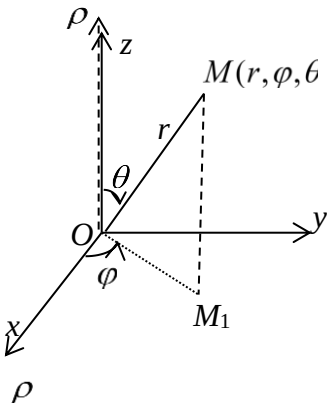
Полярно-сферичні координати точки в просторі – це числа r, φ, θ, пов'язані з прямокутними декартовими координатами формулами:

r — відстань від полюса до точки M,

$\varphi = \hat{XOM_1}$,

$\theta = \hat{MOZ}$.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, & 0 \le r < \infty, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta, & \text{де} \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = r\cos\theta, & 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$



Полярно-сферичну систему координат визначають:

1. Полярна вісь $O\rho$ з початком в полюсі O ($O\rho = Oz$).
2. Полярна півплощина, прилегла до полярної осі (Oxz).

Координатні поверхні:

1. Сфери з центрами в полюсі ($r = const$).
2. Півплощини, що прилягають до полярної осі ($\varphi = const$).
3. Конуси обертання з вершинами O, твірні яких утворюють з полярною віссю кут θ ($\theta = const$).

Координатні лінії — лінії перетину координатних поверхонь:

1. Лінія r — промінь (перетин півплощини і конуса).
2. Лінія φ — паралель сфери (перетин сфери і конуса).
3. Лінія θ — півмеридіана сфери (перетин сфери і півплощини).

Формули переходу від декартових координат до сферичних:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta}, \ \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta}.$$

7. Суть методу координат, його основні задачі і об'єкти.

Суть методу координат в просторі полягає в тому, що з введенням системи координат точки простору ототожнюються з наборами (трійками) дійсних чисел, що дозволяє задавати геометричні об'єкти (фігури, перетворення тощо) за допомогою співвідношень між числами і використовувати при цьому засоби алгебри та аналізу.

8. Поняття поверхні і лінії в просторі.

Загальне означення поверхні є складним і вимагає грунтовної підготовчої роботи. Оскільки в аналітичній геометрії вивчається невеликий клас поверхонь, то ми обмежимось наступним локальним

означенням.

Поверхнею в розумінні Р.Декарта називається сукупність точок простору, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ — математичний вираз, що містить змінні x, y та z. Під *лінією в просторі* ми будемо розуміти перетин двох поверхонь — геометричне місце точок, що задовольняє систему:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Параметричне задання лінії:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases}$$

де $f_i(t)$ — неперервні функції, задані на всіх числовій осі або прміжку.

9. Класифікації поверхонь. Алгебраїчні поверхні. Коректність означення алгебраїчної поверхні. Приклади.

Алгебраїчна поверхня — це геометричне місце точок простору, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння: $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ — це многочлен від змінних x, y та z, тобто сума скінченного числа доданків виду: $ax^sy^tz^p$, $s, t, p \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $a \in R$. Степенем члена $ax^sy^tz^p$ многочлена $F(x,y,z)$ називається число s+t+p. Степенем многочлена $F(x,y,z)$ називається число, що дорівнює максимальному степеню його членів.

Порядком алгебраїчної поверхні $F(x,y,z)=0$ називається степінь многочлена $F(x,y,z)$. Наприклад, рівняння

$$x^2 - xy^2 + 2z^2 - 3x + 2y - z + 3 = 0$$

задає алгебраїчну поверхню третього порядку.

Поверхня в розумінні Р.Декарта, що не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*. Наприклад, рівняння

$$\ln(x^2 + y^2) - 7z^2 + 5xy - 3 = 0$$

задає трансцендентну поверхню.

10. Сфера. Канонічне та загальне рівняння сфери. Відстань від точки до сфери.

Сферою називається геометричне місце точок простору, відділених від фіксованої точки (центра) на задану відстань r.

Канонічне рівняння сфери. Вивчимо сферу методом координат. Для цього виберемо в просторі прямокутну декартову систему координат. Нехай $O(a,b,c)$ — центр сфери γ, а r — її радіус. Якщо $M(x,y,z)$ — довільна точка сфери, то за означенням

$$|CM| = r,$$

що в координатній формі записується рівнянням:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r,$$

що рівносильно

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Останнє рівняння пов'язує координати (x, y, z) біжучої точки M з відомими параметрами a, b, c та r, а тому є рівнянням сфери. Його називають *канонічним*.

Загальне рівняння сфери. Рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D = 0, \qquad (2)$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$, $D = a^2+b^2+c^2-r^2$.

Рівняння (2) називається *загальним рівнянням сфери*. Це рівняння має наступні характеристичні властивості:

1) є алгебраїчним рівнянням другого степеня;
2) коефіцієнти при x^2, y^2 і z^2 рівні між собою;
3) не містить добутку біжучих координат.

Оскільки сфера задається рівнянням (2), то вона є алгебраїчною поверхнею другого порядку.

<u>Приклади розв'язування вправ:</u>

Приклад 1 Знайти центр і радіус сфери

$$\gamma: \; x^2+y^2+z^2+6x+8y-2z-38 = 0.$$

Розв'язання:

Переписавши рівняння сфери у вигляді:

$$(x^2+6x+9)-9+(y^2+8y+16)-16+(z^2-2z+1)-1-38 = 0,$$

а потім —

$$(x+3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2 = 8^2,$$

бачимо, що центром сфери є точка $C(-3;-4;1)$, а радіус сфери $r = 8$.

Відповідь**:** $C(-3;-4;1)$, $r = 8$.

Приклад 2. Скласти рівняння сфери, яка проходить через точку *M*(4;-1;-3) і *N*(0;3;-1) є кінцями одного з діаметрів сфери.

Розв'язання:

Щоб скласти рівняння сфери, спочатку потрібно знайти центр та радіус і знайдені значення підставити у канонічне рівняння сфери $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$.

Знаходимо середину відрізка *MN:*

$$x = \frac{4+0}{2} = 2, \; o = \frac{-1+3}{2} = 1, \; z = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Отже, центр сфери знаходиться у точці O(2;1;-2).

Для того, щоб знайти радіус сфери, потрібно знайти відстань від точки О до точки М

$d = \sqrt{(2-4)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

Отже, рівняння сфери має вигляд $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

Відповідь: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$

МОДУЛЬ2: Лінії і поверхні другого порядку

Тема1: Криві лінії другого порядку: коло, еліпс

1. Поняття кривих другого порядку.

Лінія другого порядку — це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C $\neq 0$, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Виявляється, що множиною точок $(x; y)$ з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (1), може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння (1) може визначати на площині Оху також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати жодної точки.

Отже, коло, еліпс, парабола і гіпербола задаються рівняннями другого степеня, але, на відміну від прямої лінії, обернене твердження неправильне.

2. Коло та його рівняння.

Колом називається геометричне місце точок площини, відділених від фіксованої точки (центра) на задану відстань r.

Загальне рівняння кола:

$$Ax^2 + +By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

де A,B,C,D – постійні коефіцієнти.

Це рівняння має наступні характеристичні властивості:

1) є алгебраїчним рівнянням другого степеня;
2) коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою;
3) не містить добутку біжучих координат, тобто доданку з добутком xy.

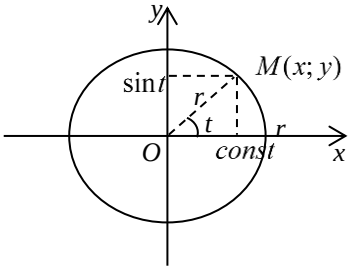
*Канонічне рівняння кола***.** Вивчимо коло методом координат. Для цього виберемо на площині прямокутну декартову систему координат. Нехай $C(a,b)$ — центр кола γ, а r — його радіус. Якщо $M(x,y)$ — довільна точка кола, то за означенням

$$|CM| = r,$$

що в координатній формі записується рівнянням:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2,$$

де R – радіус кола.



Зауваження. Якщо центр кола розміщений у початку координат, то рівняння кола має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Параметричні рівняння кола. Координати $(x; y)$ точки M кола γ з центром в початку координат і радіусом r виражаються формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

де t — кут, який утворює радіус-вектор $\vec{OM}$ точки M з віссю Ox.

3. Еліпс та його рівняння.

Еліпс — це множина всіх точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів) є величиною сталою і більшою відстані між фокусами.

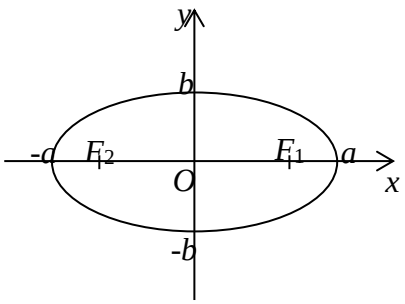


Рис.2

Дві фіксовані точки F_1 і F_2 називаються *фокусами еліпса,* а відстань між ними $(F_1F_2 = 2c)$ – *– фокусною відстанню.*

Для довільної точки еліпса M має місце рівність: $|MF_1| + |MF_2| \equiv 2a$ $(2a = const)$.

Канонічне рівняння еліпса (рівняння еліпса в прямокутній декартовій системі координат, вісь абсцис якої співпадає з прямою F_1F_2, а початок координат — з серединою відрізка F_1F_2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

Точка $O(0;0)$ називається *центром еліпса.* Точки $A_1(a;0)$, $A_2(0;-a)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ називаються *вершинами еліпса.* Відрізок A_1A_2 *— великою віссю еліпса,* B_1B_2 *— малою віссю еліпса.*

Еліпс має *центр симетрії,* який співпадає з центром еліпса, та *дві осі симетрії* — велику і малу осі еліпса.

Якщо центр еліпса знаходиться в точці $O(x_0; y_0)$, а велика і мала осі паралельні осям координат, то його рівняння в прямокутній декартовій системі координат має вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Властивості еліпса:

1) еліпс є алгебраїчною лінією 2-го порядку.
2) Кліпс є обмеженою фігурою.
3) Еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії.
4) Еліпс центрально-симетрична фігура. Вершинами еліпса називаються точки перетину еліпса з його осями симетрії.
5) Еліпс є неперервною замкненою кривою. Канонічне рівняння еліпса можна переписати у вигляді: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Звідки бачимо, що малим приростам x відповідають малі прирости y.

Рівняння еліпса в полярній системі координат (полюс якої знаходить в фокусі $F_1(c;0)$, а полярна вісь направлена вздовж великої осі):

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

де $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальний параметр еліпса, що дорівнює половині довжини фокальної хорди (хорди, яка проходить через фокус перпендикулярно великій осі).

Параметричні рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Точка $O(0;0)$ називається *центром еліпса.* Точки $A_1(a;0)$, $A_2(0;-a)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ називаються *вершинами еліпса.* Відрізок A_1A_2 — *великою віссю еліпса,* B_1B_2 *— малою віссю еліпса.*

Еліпс має *центр симетрії,* який співпадає з центром еліпса, та *дві осі симетрії* — велику і малу осі еліпса.

Ексцентриситетом еліпса називається число ε, яке дорівнює відношенню фокусної відстані до довжини великої осі еліпса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Властивості ексцентриситету еліпса:

1) $0 \le \varepsilon < 1$;

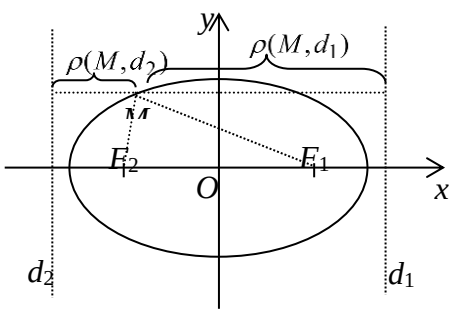
2) $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow a = b$, тобто, коли еліпс є колом;

3) $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$, тобто при збільшенні ексцентриситету еліпс витягується вздовж великої осі.

Лема. *Фокальні радіуси* $r_1 = |F_1M|$ *і* $r_2 = |F_2M|$ *точки* $M_0(x_0;y_0)$ *еліпса* $\gamma: \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *з ексцентриситетом* ε *виражаються наступним чином:*

$$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x_{0,} \\ r_2 = a + \varepsilon x_{0.} \end{cases}$$

Директрисами еліпса називаються прямі, які перпендикулярні до великої осі еліпса і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса.



Рівняння директрис еліпса, мають вид:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Рівняння дотичної до еліпса в точці $M(x_1;y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

*Теорема про фокальну властивість еліпса***.** Відношення відстані від довільної точки еліпса до фокуса до відстані від цієї точки до відповідної директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{MF_1}{\rho(M,d_1)}=\frac{MF_2}{\rho(M,d_2)}=\varepsilon.$$

*Теорема про оптичну властивість еліпса***.** Дотична до еліпса в довільній точці утворює однакові кути з фокальними радіусами цієї точки.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти точку перетину кола $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ і прямої $y=2x$**.**

Розв'язання:

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь, яка складається із заданого рівняння кола та прямої:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4\\ y=2x\end{cases}.$$

Підставимо і відкриємо дужки:

$x^2-2x+1+4x^2-8x+4=4,$

$5x^2-10x+1=0 \qquad D=100-20=80$

$$x_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{10}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

$$x_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{10}=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

Підставимо у друге рівняння $y=2x$ x_1.та x_2:

$$y_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{5} \qquad y_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}$$

Отже, точки перетину кола з прямою мають координати:

$$A\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5};\frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right) \qquad B\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5};\frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right).$$

Відповідь: $A\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5};\frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right)$, $B\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5};\frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Приклад 2. Написати рівняння кола, яке проходить через 3 точки $(0;1)$

$(2;0)$ $(3;-1)$.

Розв'язання:

Підставимо координати заданих точок в канонічне рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ і розв'яжемо систему трьох рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} a^2+(1-b)^2&=r^2\\ (2-a)^2+b^2&=r^2\\ (3-a)^2+(-1-b)^2&=r^2 \end{aligned}\right\}$$

Розглянемо 1 і 2 рівняння, 1 і 3 рівняння. Праві частини цих рівнянь рівні, а, отже, і ліві також рівні. Тому прирівняємо їх та знайдемо a і b:

$$\left.\begin{aligned} a^2+(1-b)^2&=(2-a)^2+b^2\\ a^2+(1-b)^2&=(3-a)^2+(-1-b)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2+1-2b+b^2-4+4a-a^2-b^2&=0\\ a^2+1-2b+b^2-9+6a-a^2-1-2b-b^2&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a-2b&=3\\ 6a-4b&=9 \end{aligned}\right\}$$

$$2a=-3 \qquad a=-\frac{3}{2}\Rightarrow b=-\frac{9}{2}.$$

Таким чином, координати центра кола знайдено: $C(-\frac{3}{2};-\frac{9}{2})$.

Підставимо у перше рівняння системи a і b і знаходимо радіус:

$$\frac{9}{4}+\left(1+\frac{9}{2}\right)^2=r^2,\ \frac{9}{4}+1+\frac{18}{2}+\frac{81}{4}=\frac{9+4+36+81}{4}=\frac{130}{4}=\frac{65}{2}.$$

Отже, рівняння кола, яке проходить через три точки має вигляд:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{65}{2}.$$

Відповідь: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника сторони якого задані рівнянями: $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Розв'язання:

Знайдемо координати вершин трикутника. Для цього складемо і розв'яжемо три системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 9x-2y-41=0\\ 7x+4y+7=0 \end{cases}$ $A(3;-7)$

2) $\begin{cases} 9x-2y-41=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases}$ $B(5;2)$

3) $\begin{cases} 7x+4y+7=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases}$ $C(-1;0)$

Складемо рівняння кола, яке проходить через три точки $A(3;-7)$, $B(5;2)$, $C(-1;0)$. Підставимо координати заданих точок в канонічне рівняння кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ і розв'яжемо систему трьох рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} (3-a)^2+(-7-b)^2=r^2 \\ (5-a)^2+(2-b)^2=r^2 \\ (-1-a)^2+b^2=r^2 \end{array}\right\}$$

Розглянемо 1 і 2 рівняння, 1 і 3 рівняння. Праві частини цих рівнянь рівні, а, отже, і ліві також рівні. Тому прирівняємо їх та знайдемо a і b:

$$\left.\begin{array}{l} (3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2 \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a+18b=-29 \\ 8a-14b=57 \end{array}\right\}$$

$$a=3{,}1 \qquad b=-2{,}3.$$

Таким чином, координати центра кола знайдено: $C(3{,}1;-2{,}3)$.

Знайдені параметри підставимо у 3 рівняння, знайдемо радіус кола $r^2=22{,}1$. Отже, рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC має вигляд: $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$.

Відповідь: $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$.

Приклад 4. Скласти рівняння кола з центром у точці (5; -7), що проходить через точку (2; -3).

Розв'язання:

Знайдемо радіус кола як відстань між двома точками:

$d=R^2=(2-5)^2+(-3+7)^2=25$.

Отже, $(x-5)^2+(y+7)^2=25$ – шукане рівняння кола.

Відповідь: $(x-5)^2+(y+7)^2=25$.

Приклад 5. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку M(5; 0), якщо фокальна відстань дорівнює 6.

Розв'язання:

$|F_1F_2|=2c=6$, $c=6:2=3$. Точка M(5; 0) належить еліпсу, тому

$\frac{25}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1,\ a^2=25,\ a^2-c^2=b^2,\ b_2=25-9=16.$

Отже, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ – шукане рівняння.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

Приклад 6. Скласти канонічне рівняння еліпса, яке проходить через дві точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання:

Підставимо в канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ координати даних точок:

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1 \text{ і } \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

Праві частини рівнянь рівні, тому ми можимо прирівняти знайдені рівняння:

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}.$$

Розв'язавши рівність, знайдемо параметри a і b:

$$a^2=10,\ b^2=1.$$

Отже, канонічне рівняння еліпса, яке проходить через дві точки має вигляд: $\frac{x^2}{10}+y^2=1.$

Відповідь: $\frac{x^2}{10}+y^2=1.$

Приклад 7 Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144.$

Розв'язання:

Приведемо рівняння до канонічного вигляду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Розділивши обидві частини рівняння на 144, одержимо:

$$\frac{4x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=1,$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Звідти одержуємо, що $a=6,\ 2a=12;\ b=4,\ 2b=8.$ Знаючи a і b, із співвідношення $a^2-c^2=b^2$ знаходимо c:

$$36 - c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = 20,$$

$$c = 2\sqrt{5}.$$

Координати фокусів будуть $F_1\left(2\sqrt{5};0\right)$ і $F_2\left(-2\sqrt{5};0\right)$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{5}}{6}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Відповідь: $2a = 12$, $2b = 8$ – довжина осей, $F_1\left(2\sqrt{5};0\right)$ і $F_2\left(-2\sqrt{5};0\right)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$

.

Приклад 8. Знайти рівняння кола описаного навколо трикутника ABC : $A(7;7)$, $B(0;8)$, $C(-2;4)$.

Розв'язання:

Нехай $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ — шукане рівняння кола γ.

$$A \in \gamma \quad \Leftrightarrow \quad 7^2 + 7^2 + 7A + 7B + C = 0;$$

$$B \in \gamma \quad \Leftrightarrow \quad 0^2 + 8^2 + 0 \cdot A + 8B + C = 0;$$

$$C \in \gamma \quad \Leftrightarrow \quad (-2)^2 + 4^2 - 2A + 4B + C = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7A + 7B + C = -98; \\ 8B + C = -64; \\ -2A + 4B + C = -20, \end{cases}$$

отримаємо: $A = -6$, $B = -8$, $C = 0$.

Отже,

$$\gamma: \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma: \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Відповідь: $\gamma: \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Приклад 9. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами, що лежать на осі *Ox* , дорівнює 24, а ексцентриситет дорівнює 3/4 .

Розв'язання:

Для того, щоб скласти канонічне рівняння еліпса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

необхідно знайти *a* та *b*. Враховуючи, що ексцентриситет $\varepsilon = c/a$, а 2c=24, маємо 3/4=12/*a,* звідки $a = 16$. Використовуючи співвідношення $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо b^2=256-144=112 , $b = 4\sqrt{7}$. Таким чином, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1, \qquad \text{або} \quad \frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{7})^2} = 1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1,$ або $\frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{7})^2} = 1.$

Приклад 10 Скласти рівняння еліпса: сума на піввісі $a+b=12$, а відстань між фокусами $2c=6\sqrt{2}$.

Розв'язання:

Для того, щоб скласти канонічне рівняння еліпса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

необхідно знайти a та b. Враховуючи, що $2c=6\sqrt{2}$, то

$$c^2=18 \qquad a^2-b^2=c^2$$
$$(a+b)(a-b)=18$$

За умовою задачі $a+b=12$, тоді $12(a-b)=18,\ a-b=1{,}5$.

Розв'яжемо систему рівнянь з двома невідомими:

$$\left.\begin{matrix} a+b=12 \\ a-b=1{,}5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12(a-b)=18$$
$$2b=10{,}5 \qquad b=5{,}25$$
$$a=6{,}75.$$

Підставимо знайдені параметри в канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{6{,}75^2}+\frac{y^2}{5{,}25^2}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{6{,}75^2}+\frac{y^2}{5{,}25^2}=1$.

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання 1:

1. Скласти рівняння кола, що проходить через точку М(1;2) і дотикається до координатних осей.
2. Скласти рівняння кола центром якого є точка С(6;-8) і коло проходить через початок координат.
3. Скласти рівняння кола якщо точки А (3; 2) і В (-1; 6) кінцями одного з діаметрів кола.
4. Скласти рівняння кола якщо центром кола є точка С (1;-1), а пряма 5х-12у+9=0 є дотичною до кола.
5. Скласти рівняння кола, що дотикається до двох паралельних прямих 2х+у-5=0 і 2х+у+15=0, причому до однієї з них – у точці А(2; 1).
6. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Ох у початку координат і перетинає вісь Оу у точці М (0;-8).
7. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Оу у початку координат і перетинає вісь Ох у точці М (4; 0).
8. Звести рівняння кола до канонічного виду. Знайти координати центру С та радіус R: х2+у2-4х+6у-3=0.
9. Звести рівняння кола до канонічного виду. Знайти координати центру С та радіус R: х2+у2—8х=0.

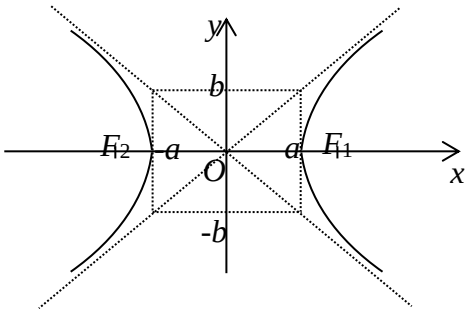
10. Звести рівняння кола до канонічного виду. Знайти координати центру С та радіус R: x2+уг+4y=0.
11. Звести рівняння кола до канонічного виду. Знайти координати центру С та радіус R: 2x2+2y2-12x+y+3=0.
12. Написати рівняння діаметра кола x2+y2+4x-6y-17=0, що перпендикулярний до прямої 5x+2y-13=0.
13. Знайти кут між радіусами кола x2+y2-4x+6y-5=0, проведеними через точки перетину його з віссю Ox.
14. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо більша вісь $2a$=20, а ексцентриситет e=0,8.
15. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо менша вісь $2b$=6, а ексцентриситет $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
16. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c$=8.
17. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c$=6, а ексцентриситет e=0,6.
18. Задано рівняння еліпса $25x^2+169y^2=4225$. Визначити: 1) довжину осей; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет; 4) координати точок еліпса, відстань яких до лівого фокуса F_1 дорівнює 14.
19. Задано рівняння еліпса $9x^2+5y^2=45$. Визначити: 1) його осі; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет.
20. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2+5y^2=1$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.
21. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.
22. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c$=8, а ексцентриситет e=4.
23. Знайти координати центра і радіус кола: $x^2+y^2+6x-10y+13=0$.
24. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо дано вершини $(0;3)$, $(0;-3)$ і відстань між фокусами, що дорівнює 8.
25. Скласти канонічне рівняння еліпса, еліпс проходить через точки $M_1\left(2\sqrt{3};\sqrt{6}\right)$ і $M_2(6;0)$.

Тема 2: Гіпербола та її рівняння.

Гіпербола — це геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів) є величиною сталою і меншою відстані між фокусами.

Дві фіксовані точки F_1 і F_2 називаються *фокусами гіперболи,* а відстань між ними ($F_1F_2 = 2c$) — *фокусною відстанню.*

Для довільної точки гіперболи M має місце рівність: $||MF_1| - |MF_2|| \equiv 2a$ $(2a = const)$.



Канонічне рівняння гіперболи (рівняння гіперболи в прямокутній декартовій системі координат, вісь абсцис якої співпадає з прямою F_1F_2, а початок координат — з серединою відрізка F_1F_2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Точка $O(0;0)$ називається *центром гіперболи.* Точки $A_1(a;0)$, $A_2(0;-a)$ називаються *вершинами гіперболи.* Відрізок A_1A_2 — *дійсною віссю гіперболи,* B_1B_2 — *уявною віссю гіперболи.*

Гіпербола має *центр симетрії,* який співпадає з початком координат, та *дві осі симетрії* — дійсну і уявну осі гіперболи.

Властивості гіперболи:

1) Гіпербола є алгебраїчною лінією 2-го порядку.
2) Обмеженість: в смузі $-a < x < a$ точок гіперболи немає.
3) Гіпербола має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, точка перетину яких є центром симетрії гіперболи. Гіпербола складається із двох конгруентних прямих (віток).
4) Вершинами гіперболи називають точки її перетину осями симетрії: $A_1(a;0)$, $A_2(0;-a)$.
5) Кожна вітка гіперболи є неперервною лінією. Канонічне рівняння гіперболи можна переписати у вигляді: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Звідки бачимо, що малим приростам аргументу відповідають малі прирости функції.

Рівняння гіперболи в полярній системі координат (полюс якої знаходить в фокусі, а полярна вісь направлена вздовж дійсної осі):

$$\rho = \frac{\pm p}{1 \mp \varepsilon \cos\varphi},$$

де $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальний параметр гіперболи, що дорівнює половині довжини хорди, яка проходить через фокус перпендикулярно дійсній осі.

Рівняння асимптот гіперболи: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Якщо центр гіперболи знаходиться в точці $O(x_0; y_0)$, а дійсна і уявна осі паралельні осям координат, то її рівняння в прямокутній декартовій системі координат має вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Ексцентриситетом гіперболи називається число ε, яке дорівнює відношенню фокусної відстані до довжини дійсної осі еліпса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Властивості ексцентриситету гіперболи:

1) $\varepsilon > 1$;

2) $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, тобто при зменшенні ексцентриситету вітки гіперболи стискуються до дійсної осі.

Директрисами гіперболи називаються прямі, які перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і лежать на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса.

Рівняння директрис гіперболи мають вид: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M(x_1; y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Теорема про фокальну властивість гіперболи. Відношення відстані від довільної точки гіперболи до фокуса до відстані від цієї точки до відповідної директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{MF_1}{\rho(M, d_1)} = \frac{MF_2}{\rho(M, d_2)} = \varepsilon.$$

Теорема про оптичну властивість гіперболи. Дотична і нормаль в довільній точці гіперболи є бісектрисами кутів між фокальними радіусами цієї точки.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти геометричне місце точок, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок $F_1\left(\sqrt{5},0\right)$ і $F_2\left(-\sqrt{5},0\right)$ дорівнює 4.

Розв'язання:

Нехай довільна точка $M(x,y)$ належить шуканому геометричному місцю точок. За умовою задачі $\left|\left|MF_1\right|-\left|MF_2\right|\right|=4$, що в координатній формі набуває вигляду:

$$\left|\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2}\right|=4.$$

Зведемо отримане рівняння до канонічного вигляду:

$$\sqrt{\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2}\pm 4;$$

$$\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2=\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2\pm 8\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2}+16;$$

$$\pm 2\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2}=4-\sqrt{5}x;$$

$$4\left(\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2}\right)^2=\left(4-\sqrt{5}x\right)^2;$$

$$4x^2-8\sqrt{5}x+20+4y^2=16-8\sqrt{5}x+5x^2;$$

$$x^2-4y^2=4;$$

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1.$$

Отримали канонічне рівняння гіперболи. Отже, шукане геометричне місце точок – гіпербола з півосями $a=2$, $b=2$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4}-y^2=1$, $a=2$, $b=2$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, в якої дійсна вісь і ексцентриситет відповідно дорівнюють 8 і $\frac{5}{4}$.

Розв'язання:

За умовою задачі $2a=8$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Отже, $a=4$, $c=5$. Оскільки для гіперболи $b^2=c^2-a^2$, то $b^2=25-16=9$. Канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ за даними задачі і знайденим b^2 набуває вигляду $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

.

Відповідь: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Приклад 3. Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, знаючи, що

відстань між директрисами першої з них дорівнює $3{,}6$, відстань між директрисами другої – становить $6{,}4$, вершини першої гіперболи лежать на осі Ox.

Розв'язання:

Якщо гіперболи спряжені, то їх рівняння мають вигляд : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – для гіперболи з дійсною віссю на осі Ox; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ – для гіперболи з дійсною віссю на осі Oy. Відповідно, рівняння директрис для першої гіперболи: $x=\frac{a}{\varepsilon}$; $x=-\frac{a}{\varepsilon}$. Але $\varepsilon=\frac{c}{a}$, значить $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

Для спряженої гіперболи рівняння директрис:

$$y=\pm\frac{b^2}{c}.$$

За умовою задачі $2x=3{,}6$; $2y=6{,}4$. Звідси $\frac{a^2}{c}=1{,}8$; $\frac{b^2}{c}=3{,}2$.

З означення гіперболи використаємо співвідношення між a, b і c, тобто $b^2=c^2-a^2$. Отже, маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases}\frac{a^2}{c}=1{,}8,\\ \frac{b^2}{c}=3{,}2,\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}\quad\begin{cases}a^2=1{,}8c,\\ b^2=3{,}2c,\\ 1{,}8c+3{,}2c=c^2,\end{cases}\quad\begin{cases}a^2=1{,}8c,\\ b^2=3{,}2c,\\ c=5\end{cases}$$

$a^2=1{,}8\cdot 5=9$, $b^2=3{,}2\cdot 5=16$.

Отже, рівняння гіпербол матимуть вигляд:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1.$

Приклад 4. Точка $M(1;-2)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2;2)$, а відповідна директриса задана рівнянням $2x-y-1=0$. Скласти рівняння гіперболи.

Розв'язання:

Відповідно другій фокальній властивості $\frac{|MF|}{\rho(M;d)}=\varepsilon$. Звідси $|MF|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $d=\left|\frac{2\cdot 1+2-1}{\sqrt{5}}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}\Rightarrow\varepsilon=\frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Нехай $P(x,y)$ – будь-яка точка гіперболи. Тоді $\frac{|PF|}{\rho(P;d)}=\varepsilon$. Отже,

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}}{|2x-y-1|}=\frac{5\sqrt{5}}{3};$$

$$91x^2+16y^2-100xy-136x+86y+47=0.$$

Відповідь: $91x^2+16y^2-100xy-136x+86y+47=0$.

Приклад 5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі О*x* симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет ε=$\frac{5}{3}$.

Розв'язання:

Оскільки 2*a*=6, то *a*=3. З формул $b^2=c^2-a^2$ і $\varepsilon=\frac{c}{a}$ знаходимо *b*.

$\frac{5}{3}=\frac{c}{3}\Leftrightarrow 3c=15,\ c=5$

$b^2=25-9,\ b^2=16, b=4.$

Шукане рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Приклад 6. Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2-8y^2=8$ від її асимптоти.

Розв'язання:

Запишемо канонічне рівняння даної гіперболи, розділимо праву і ліву частину даного рівняння на 8:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{1}=1,$$

звідки $a=\sqrt{8}$, *b*=1 – півосі гіперболи, тому згідно з формулою $y=\pm\frac{b}{a}x$ рівняння асимптоти має вигляд $x-y\sqrt{8}=0$.

З формули $b^2=c^2-a^2$ знаходимо, що *c*=3, тому $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ – фокуси гіперболи.

За формулою $d(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ обчислюємо відстань *d* від фокуса F_1 (або, що те саме, фокуса F_2) до знайденої асимптоти $x-y\sqrt{8}=0$: *d*=1.

Відповідь**:** *d*=1.

Домашні індивідуальні завдання:

1) Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$, а ексцентриситет – $\sqrt{1{,}2}$. Зробити рисунок.

2) Знайти рівняння гіперболи, якщо її вершини мають координати $(0;\pm 2)$, а фокусів – $(0;\pm 3)$. Зробити рисунок.

3) Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y = \pm 4x$, а директриси $x = \pm 6$.

4) Знайти рівняння гіперболи, якщо координати її вершин $A(5;0)$, $B(-5;0)$, а відстань між фокусами лорівнює 14. Зробити рисунок.

5) Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y = \pm 7x$, а директриси $x = \pm 6$.

6) Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої 8, а ексцентриситет 0,5. Побудувати гіперболу і її директриси.

7) Написати рівняння гіперболи, віддалі між фокусами якої дорівнюють 16, а між директрисами 8. Знайти кут її між асимптотами. Зробити рисунок.

8) Побудувати гіперболу $x^2 - 4y^2 = -16$, знайти координати її фокусів і ексцентриситет. Зробити рисунок.

9) Гіпербола проходить через точку $M\left(6;\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ і має дійсну піввісь $a = 4$. Знайти відстань від правого фокуса гіперболи до її асимптот. Зробити рисунок.

10) Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо уявна піввісь дорівнює $3\sqrt{3}$, а ексцентриситет – $\sqrt{2}$. Зробити рисунок.

11) Знайти відстань від фокуса гіперболи $9x^2 - 4y^2 = -36$ до її асимптот. Зробити рисунок.

12) Знайти рівняння гіперболи. Якщо координати її вершин $M(0;-4)$, $P(0;4)$, а відстань між фокусами дорівнює 10. Зробити рисунок.

13) Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y = \pm 2x$, а директриси $x = \pm 3$.

14). Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її фокусами дорівнює 10, а між вершинами – 8. Зробити рисунок.

15) Знайти відстань від фокуса гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$ до її асимптот. Зробити рисунок.

16) Написати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$, які проходять через точку $A(0;-2)$. Зробити рисунок.

17) Написати канонічне рівняння гіперболи, ексцентриситет якої

дорівнює $\sqrt{2}$ і яка проходить через точку $M(2;\sqrt{3})$. Написати рівняння цієї гіперболи. Зробити рисунок.

18) Написати рівняння гіперболи, вершини якої містяться у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Зробити рисунок.

19) Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y=\pm 4x$, а директриси $x=\pm 8$.

20) Знайти кут між асимптотами гіперболи $x^2-4y^2=-16x$. Зробити рисунок.

21) Знайти ексцентриситет гіперболи $16x^2-9y^2=144$. Зробити рисунок.

22) Знайти рівняння гіперболи, якщо координати її вершин $M(0;-4)$, $P(0;4)$, а відстань між фокусами дорівнює 10. Зробити рисунок.

23) Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо уявна піввісь дорівнює $3\sqrt{3}$, а ексцентриситет – $\sqrt{2}$. Зробити рисунок.

24) Задано гіперболу $16x^2-9y^2=-144$. Знайти: півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот, рівняння директрис.

25) Переконатись, що точка $M\left(-5;\frac{9}{4}\right)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ і визначити фокальні радіуси точки *M.*

Тема 3: Парабола та її рівняння

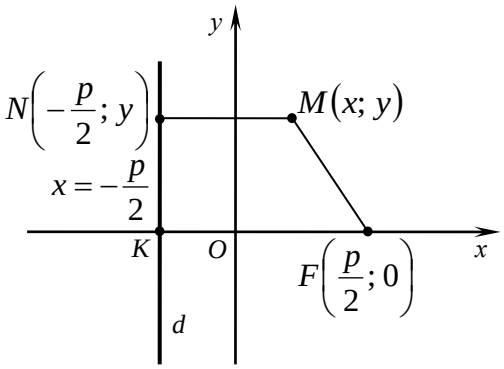


Рис. 1

Параболою називається геометричне місце точок площини рівновіддалених від фіксованої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

Відстань від фокуса *F* до директриси *d* називається *параметром параболи* і позначається через *p*, причому *p*>0. Сім'я всі парабол є одно параметричною.

З рис. 1 видно, що $p=FK$, значить, фокус має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x=-\frac{p}{2}$ або $x+\frac{p}{2}=0$.

Канонічне рівняння параболи: $y^2=2px$.

Фокальний радіусом точки *M* параболи з фокусом *F* називається

відрізок FM (а також його довжина).

Дослідження форми та побудова параболи

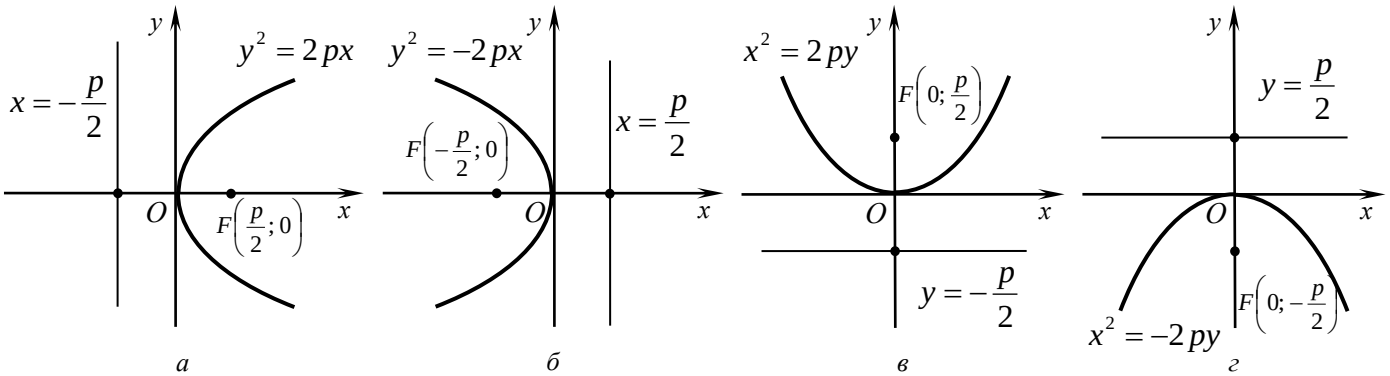
Визначимо форму параболи за її канонічним рівнянням і складемо таблицю 1.

Властивості канонічного рівняння параболи	**Властивості фігури**
1. Координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння.	**1.** Парабола проходить через початок координат.
2. Система, складена з рівняння параболи (II-го порядку) та прямої (I-го порядку), має не більше двох розв'язків: **1)** $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$,	**2.** Пряма $y = kx$ перетинає параболу не більш як в двох точках, пряма $x = 0$ є дотичною до параболи. **1)** парабола з віссю абсцис має одну спільну точку – початок координат що і є вершиною параболи **2)** парабола з віссю ординат також перетинається лише в початку координат.
3. Змінна y входять у рівняння параболи в парному ступені.	**3.** Парабола симетрична відносно осі абсцис.
4. Так як $p > 0$, то з рівняння (3) випливає, що $x \geq 0$.	**4**. Парабола розташована справа від осі Oy.
5. При зростанні x від 0 до $+\infty$ y змінюється відповідно від 0 до $\pm\infty$.	**5.** Це означає, що точки параболи необмежено віддаляються як від осі Ox, так і від осі Oy.

Парабола має форму, зображену на рис. 2, *а*.

Вісь Ox називається *віссю симетрії параболи*. Точка $O(0; 0)$ перетину параболи з віссю симетрії називається *вершиною параболи*. Відрізок FM називається *фокальним радіусом* точки M.

Зауваження. Парабола, яка задається рівнянням виду (3), має



а *б* *в* *г*

вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь абсцис і гілки, напрямлені вправо. Фокус цієї параболи знаходиться в точці $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю

симетрії якої є вісь абсцис і гілки напрямлені вліво (мал. 2, *б*) має вигляд: $y^2 = -2px$.

Рівняння її директриси $x = \frac{p}{2}$, а фокус знаходиться в точці $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.

Якщо парабола має вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь ординат, гілки напрямлені вгору і директрису з рівнянням $y = -\frac{p}{2}$ і фокус в точці $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ (рис. 2, *в*), то її рівняння виглядає: $x^2 = 2py$.

Якщо ж парабола має вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь ординат, директрису з рівнянням $y = \frac{p}{2}$, а гілки напрямлені вниз і фокус в точці $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ (рис. 2, *г*), то її рівняння: $x^2 = -2py$.

Рівняння параболи зі зміщеною вершиною в точці $O'(a; b)$, віссю симетрії, паралельною осі абсцис, і гілками, напрямленими вправо, має вигляд

$$(y-b)^2 = 2p(x-a).$$

Зауваження. Для кожного іншого способу розміщення параболи можна скласти відповідне рівняння параболи із зміщеною вершиною.

Дотична до параболи

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ задається рівнянням:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її фокус у канонічній системі координат міститься в точці $F(-2;0)$.

Розв'язання:

Оскільки фокус шуканої параболи лежить на осі *Ox* і має від'ємну абсцису, а система координа *xOy* є канонічною для параболи, то її вершина лежить у початку координат і канонічне рівняння має вигляд: $y^2 = -2px$.

Знайдемо параметр p.

За означенням, відстань від фокуса до вершини параболи дорівнює $\frac{p}{2} = 2$. Отже, $\frac{p}{2} = 2$, $p = 4$. Звідси шукане рівняння параболи набуває

вигляду: $y^2 = -8x$.

Відповідь: $y^2 = -8x$.

Приклад 2. Знайти канонічне рівняння параболи, що проходить через точки $(2;1), (-2;1)$ і має вершину в початку координа.

Розв'язання:

Оскільки дані точки симетричні відносно осі Oy, а вершина параболи міститься в початку координат, то дана система координат є канонічною для параболи. Обидві точки мають додатні ординати. Отже, канонічне рівняння параболи має вигляд: $x^2 = 2py$.

Параметр p знайдемо з умови, що дані точки належать параболі. Достатньо скористатись тим, що одна з точок (наприклад, перша) належить параболі. Підставляючи її координати в рівняння $x^2 = 2py$, знаходимо p:

$$4 = 2p \cdot 1, \quad 4 = 2p, \quad p = 2.$$

Отже, шукане рівняння параболи таке: $x^2 = 4y$.

Відповідь: $x^2 = 4y$.

Приклад 3. У канонічній системі координат знайти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо в цій системі відомі координати однієї з точок параболи $A(1;1)$.

Розв'язання:

Дана точка параболи має додатну абсцису і додатну ординату. Отже, її координати можуть задовільняти як рівнянню $y^2 = 2px$, так і рівнянню $x^2 = 2py$. Даних задачі недостатньо для того, щоб однозначно вибрати одне з цих рівнянь. Отже, задача допускає два випадки: 1) точка A належить параболі $y^2 = 2px$; 2) точка A належить параболі $x^2 = 2py$.

Знайдемо параметр p для кожного випадку:

$1) 1^2 = 2p \cdot 1;\ 1 = 2p;\ p = \frac{1}{2};$

$2) 1^2 = 2p \cdot 1;\ 1 = 2p;\ p = \frac{1}{2}.$

Отже, в першому випадку парабола має рівняння $y^2 = x$, а в другому $-x^2 = y$.

Відповідь: $y^2 = x$ або $x^2 = y$.

Приклад 4. Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Парабола симетрична відносно осі Oy.

Розв'язання:

Якщо парабола симетрична відносно осі Oy, то її рівняння матиме вигляд $x^2 = 2py$. Знайти p можна тоді, коли відома точка, що належить параболі. За умовою задачі парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Знайдемо ці точки із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 + 4y = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ 2y(y+2) = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -y, \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -2 \end{array}\right.; \end{cases}$$

Отже, має дві точки перетину: $O(0;0)$ і $M(2;-2)$. Але точка $O(0;0)$ - це вершина параболи. Підставимо координати точки $M(2;-2)$ у рівняння $x^2 = -2py$ (оскільки в точці M ордината від'ємна):

$$2^2 = -p(-2);\ 4 = 4p;\ p = 1.$$

Тому рівняння параболи є таким: $x^2 = -2y$. Рівняння директриси $y = -\frac{q}{2}$: $y = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $x^2 = -2y$, $y = \frac{1}{2}$.

Приклад 5. Знайти спільні дотичні до еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ і параболи $y^2 = \frac{20}{3}x$.

Розв'язання:

Дотична до еліпса має рівняння: $\frac{xx_0}{45} + \frac{yy_0}{20} = 1$. Дотична до параболи має рівняння: $yy_1 = \frac{10}{3}(x - x_1)$. Оскільки дотична є спільною, то записані рівняння задають одну і ту саму пряму:

$$\frac{x_0 \cdot 3}{45 \cdot 10} = \frac{-y_0}{20y_1} = \frac{-3}{10x_1} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-15y_0}{2x_0}, \\ x_1 = \dfrac{-45}{x_0} \end{cases}.$$

Точка $(x_1; y_1)$ належить параболі, значить:

$$y_1^2 = \frac{20}{3}x_1 \Rightarrow \left(\frac{-15y_0}{2x_0}\right)^2 = \frac{20}{3}\left(\frac{-45}{x_0}\right); \frac{15y_0^2}{4x_0} = -20;\ y_0^2 = \frac{16}{3}x_0,\ x_0 < 0.$$

Точка $(x_0; y_0)$ належить еліпсу, значить:

$$\frac{x_0^2}{45} + \frac{y_0^2}{20} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{45} + \frac{16x_0^2}{3 \cdot 20} = 1;\ x_0^2 - 12x_0 - 45 = 0.$$

Оскільки, $x_0 < 0$, то $x_0 = -3$, $y_0 = \mp 4$.

Отже шукані дотичні мають рівняння:

$-\frac{x}{15} + \frac{y}{5} = 1$ та $-\frac{x}{15} - \frac{y}{5} = 1$.

Відповідь: $3y - x - 15 = 0$, $x + 3y + 15 = 0$.

Приклад 6. Знайти координати фокуса параболи з вершиною в початку координат, якщо рівняння директриси $y = 3$.

Розв'язання:

Відстань від початку координат до директриси за означенням параболи дорівнює відстані від початку координат до фокуса, тобто $\frac{p}{2}$. З рівняння директриси випливає, що $\frac{p}{2} = 3$, отже цій директрисі відповідає парабола $x^2 = -2py$, фокус якої знаходиться в точці $(0; -3)$.

Відповідь: $(0; -3)$

Домашні індивідуальні завдання:

1) Побудувати параболи $y^2 = 8x$ і $x^2 = 4y$, знайти відстань між фокусами цих парабол.

2) На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 12. Зробити рисунок.

3) Знайти рівняння параболи з вершиною в початку координат, директриса якої має рівняння $x = 3$. Зробити рисунок.

4) Знайти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус розміщений в точці $A(4;0)$. Зробити рисунок.

5) Знайти параметр параболи $4x^2 - 4x - 80y + 61 = 0$. Зробити рисунок.

6) Знайти координати фокуса параболи $x^2 = 8y$. Зробити рисунок.

7) На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 12. Зробити рисунок.

8) Знайти віддаль від початку координат до фокуса параболи $y^2 - 4x + 6y - 29 = 0$. Зробити рисунок.

9) Скласти канонічне рівняння параболи за такими умовами: відстань від фокуса до лиректриси дорівнює 9; координати фокуса (5;0).

10) На параболі $x^2 = -12y$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 9.

11) На параболі $y^2 = 4{,}5x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка знаходиться від директриси на відстані $d = 125$. Знайти відстань цієї точки від вершин параболи.

12) Скласти рівняння параболи, якщо відомі координати фокуса $F(4;3)$

, а директриси має рівняння: $y+1=0$.

13) Знайти точки перетину параболи $y^2=18x$ з такими прямими: $4x-y+5=0;\ y-3=0$.

14) Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2=8x$ у точці $M(2;-4)$.

15) Знайти точки перетину двох парабол, які мають спільну вершину в початку координат, а фокуси – в точках $(2;0)$ і $(0;2)$.

16) Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ і параболи $y^2=8x$.

17) Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2=36x$, проведених з точки $A(2;9)$.

18) Скласти рівняння параболи, якщо довжина хорди, що проходить через хокус під кутом 45^o до осі параболи, дорівнює 18.

19) Скласти рівняння параболи, якщо відомі її фокус $F(2;-1)$ і рівняння директриси $x-y-1=0$.

20) Знайти спільні дотичні до параболи $y^2=4x$ і еліпса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

21) Провести дотичні до параболи $y^2=12x$ паралельно прямій $3x-2y+30=0$. Обчислити відстань між цією дотичною і даною прямою.

22) Знайти координати вершин параболи, параметр і напрям осі, якщо парабола задана рівнянням $y^2-10x-2y-19=0$.

23) Знайти довжину фокального радіуса точки A параболи, якщо рівняння параболи $y^2=3x$, абсциса точки A дорівнює 5.

24) Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат і відомо, що: Ox – вісь симетрії, точка $M(9;6)$ - точка параболи; парабола симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $N(4;-8)$.

25) Знайти площу трикутника, у якого одна вершина належить директрисі параболи $y^2=14x$, а дві інші вершини є кінцями хорди, яка проходить через фокус і перпендикулярна до осі Ox.

Тема4: Загальна теорія алгебраїчних ліній другого порядку.

Лінія на площині називається *алгебраїчною,* якщо її рівняння може бути подано у вигляді $F(x;y)=0$, де $F(x;y)$ - многочлен від змінних x,y. Порядок многочлена, або його степінь, називається порядком алгебраїчної лінії. Порядок та напрям алгебраїчної лінії не залежить від вибору системи координат.

Лінія другого порядку γ має загальне рівняння:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (1)$$

де a_{ij} - дійсні числа, причому a_{11},a_{12},a_{22}, одночасно не дорівнюють нулю (тут і надалі використовується тільки прямокутна декартова система координат).

Нехай $F(x;y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$.

Якщо ввести допоміжні многочлени:

$$F_1(x;y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13};$$
$$F_2(x;y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23};$$
$$F_3(x;y)=a_{31}x+a_{32}y+a_{33},$$

то

$$F(x;y)=F_1(x;y)x+F_2(x;y)y+F_3(x;y)=0. \qquad (2)$$

Лінія визначається заданням відношень коефіцієнтів її рівняння. Таких відношень п’ять (так як у рівнянні всього шість коефіцієнтів),тому множина всіх ліній другого порядку на площині залежить від п’яти параметрів. Геометрично лінія другого порядку задається птьма точками.

Функція від коефіцієнтів загального рівняння лінії другого порядку, які не змінюють свого значення при будь-яких ортогональних перетвореннях системи координа, називаються інваріантами загального рівняння лінії другого порядку. Таких інваріантів три:

$$I_1=a_{11}+a_{22};\ I_2=\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix};\ I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}, \qquad (3)$$

Нехай деяка пряма l задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases}x=l_1t+x_0,\\y=l_2t+y_0,\end{cases} \qquad (4)$$

А лінія другого порядку γ загальним рівнянням (1).

Для дослідженням взаємного розташування прямої l і лінії другого порядку γ потрібно розв’язати відносно параметра t систему, до якої входить рівняння (1) і рівняння (4). У загальному випадку задача зводиться до дослідження рівняння відносно параметра t, яке одержуєм в результаті підстановки рівнянь (4) у рівняння (1):

$$Pt^2+2Qt+R=0, \qquad (5)$$

де

$$P = a_{11}l_1^2 + 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_2^2;$$

$$Q = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l_1 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})l_2 = F_1(x_0; y_0)l_1 + F_2(x_0; y_0)l_2;$$

$$R = F(x_0; y_0).$$

В залежності від значень коефіцієнтів P, Q, R цього рівняння маємо шість випадків:

1) $P \neq 0, Q^2 - PR > 0$ - дві дійсні спільні точки у прямої l і лінії другого порядку γ;

2) $P \neq 0, Q^2 - PR = 0$ - дві уявні комплексно спряжені спільні точки;

3) $P \neq 0, Q^2 - PR = 0$ (або $Q = 0, R = 0$) – дві дійсні спільні точки, що зливаються;

4) $P = 0, Q \neq 0,$ R - довільне – одна дійсна спільна точка;

5) $P = 0, Q = 0,$ $R \neq 0$ - нема спільних точок;

6) $P = 0, Q = 0,$ $R = 0$ - пряма l належить лінії другого порядку γ.

Напрям, який задає ненульовий вектор $\bar{l}$, *асимптотичним* відносно лінії другого порядку γ, якщо пряма l має з лінією другого порядку γ не більше, як одну спільну точку, або повністю міститься в ній.

Напрям $\bar{l}$ є асимптотичним відносно лінії другого порядку γ тоді й тільки, коли $P = 0$, тобто

$$a_{11}l_1^2 + 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_2^2 = 0. \qquad (6)$$

Кількість асимптотичних напрямів, які існують відносно певної лінії другого порядку, можна встановити за її загальним рівнянням (1) за допомогою другого інваріанта I_2:

1) $I_2 > 0$ - лінія не має асимптотичних напрямів;

2) $I_2 < 0$ - лінія має два асимптотичних напрями;

3) $I_2 = 0$ - лінія має єдиний асимптотичний напрям.

За наявністю і кількістю асимптотичних напрямів множину ліній другого порядку поділяють на типи:

1) еліптичний ($I_2 > 0$);

2) гіперболічний ($I_2 < 0$);

3) параболічний ($I_2 = 0$).

Центром лінії другого порядку називається центр її симетрії. Для того, щоб точка $C(x_0; y_0)$ була центром лінії другого порядку, необхідно і достатньо, щоб координати задовільняли системі рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0 \\ F_2(x; y) = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Якщо в певній системі координат загальне рівняння лінії γ не містить доданків з x і y в першому степені (тобто $a_{13} = a_{22} = 0$), то

початок координат є центром цієї лінії. У такому випадку кажуть, що лінія γ віднесена до свого центра.

Якщо система (7) має єдиний розв'язок, то лінія другого порядку γ має єдиний центр і називається центральною. Якщо система (7) несумісна, то лінія γ, то лінія не має центрів і називається нецентральною. Якщо система (7) має безліч розв'язків, то лінія γ має безліч центрів (або лінію центрів) і також називається нецентральною.

Лінія другого порядку γ є центральною, якщо $I_2 \neq 0$, і нецентральною, якщо $I_2 = 0$. Лінії гіперболічного та параболічного типу – нецентральні. У параболи центра немає.

Для того, щоб знайти координати центра лінії другого порядку, заданої рівнянням (1), потрібно за його коефіцієнтами скласти систему рівнянь (7) та розв'язати її.

Дотичною до лінії другого порядку γ в точці $M(x_0; y_0)$ називається граничне положення січної MN, при якому точка N необмежено наближається до точки $M(x_0; y_0)$, рухаючись по лінії γ.

Отже, умова дотику:

$$P \neq 0, Q = 0, R = 0. \qquad (8)$$

У кожній звичайній точці лінії γ (тобто у точці яка не є її центром) існує єдина дотична до γ. Її рівняння:

$$F_1(x_0; y_0)x + F_2(x_0; y_0)y + F_3(x_0; y_0) = 0. \qquad (9)$$

Пряма d, яка містить середини всіх хорд лінії другого порядку, паралельних вектору $\bar{l}$ не асимптотичного напряму, називається *діаметром* лінії γ, спряженим з даним напрямом $\bar{l}$.

Рівняння діаметра d:

$$F_1(x_0; y_0)l_1 + F_2(x_0; y_0)l_2 = 0 \qquad (10)$$

Якщо лінія другого порядку має центри, то кожен центр належить кожному діаметру. У центральної лінії другого порядку ($I_2 \neq 0$) має асимптотичний напрям. Діаметри нецентральної лінії другого порядку паралельні.

Два діаметри центральної лінії другого порядку називаються *взаємно спряженими, якщо* кожний з них поділяє навпіл хорди, паралельні іншому діаметру.

Два напрями $\bar{l}(l_1; l_2)$ і $\bar{m}(m_1; m_2)$ називаються *взаємно спряженими* відносно лінії другого порядку γ, якщо виконується умова:

$$a_{11}l_1m_1 + a_{12}l_1m_1 + a_{21}l_2m_2 + a_{22}l_2m_2 = 0. \qquad (11)$$

Напрям $\bar{l}$ називається *самоспряженим,* якщо він спряжений самому собі. Отже умова самоспряженості:

$$a_{11}l_1^2 + 2a_{12}l_1l_2 + a_{22}l_2^2 = 0 \qquad (12)$$

Звідси, напрям є самоспряженим, якщо він асимптотичний, і

навпаки.

Асимптотичні напрями лінії гіперболічного типу є самоспряженими.

Напрям $\bar{l}$ називається *особливим* відносно лінії другого порядку , якщо спряжений йому напрям $\overline{m}$ є невизначеним. Це відбувається тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + a_{12}l_2 = 0, \\ a_{21}l + a_{22}l_2 = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Лінія γ має особливий напрям тоді і тільки тоді, коли $I_2 \neq 0$. Отже, тільки лінії параболічного типу мають особливий напрям. Особливий напрям відносно лінії параболічного типу є асимптотичним і навпаки. Цей напрям спряжений будь-якому напряму.

Напрям $\bar{l}$ називається головним відносно лінії другого порядку γ, якщо він самоспряжений перпендикулярному до нього напряму $\overline{m}$.

Напрям $\bar{l}(l_1;l_2)$ є головним відносно лінії γ тоді і тільки тоді, коли

$$(a_{22} - a_{11})l_1l_2 + a_{12}(l_1^2 - l_2^2) = 0 \qquad (14)$$

Відносно будь-якої лінії другого порядку, за винятком кола, існують два і тільки два головних напрями. Відносно кола будь-який напрям є головним.

Діаметр лінії другого порядку називається *головним*, якщо він спряжений перпендикулярним до нього хордам.

Центральна лінія другого порядку має два і тільки головних діаметри. Кожний діаметр кола є головним. Нецентральна лінія другого порядку має єдиний головний діаметр.

Якщо в певній системі координат координатні осі мають головні напрями відносно лінії другого порядку, то в її загальному рівнянні відсутній доданок з добутком змінних xy, тобто

$$a_{12} = 0 \qquad (15)$$

У цьому випадку кажуть, що лінія другого порядку віднесена до головних напрямів.

В еліпса і гіперболи вісі канонічної системи координат є головними діаметрами. У параболи $y^2 = 2px$ вісь Ox є головним діаметром, а вісь Oy - головною дотичною.

Ідея класифікації ліній другого порядку полягає в тому, щоб:

1) відшукати канонічну для певної лінії систему координат;
2) отримати канонічне рівняння лінії;
3) класифікувати множину ліній другого порядку за їх канонічними рівняннями.

Характеристичним рівнянням лінії другого порядку називається рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

або через інваріанти:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \qquad (17)$$

де λ – деяке дійсне число.

Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння завжди існують і не дорівнюють одночасно нулю:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = I_2 \qquad (18)$$

$I_2 > 0$ – у ліній еліптичного типу;

$I_2 < 0$ – у ліній гіперболічного типу;

$I_2 = 0$ – у ліній параболічного типу;

$\lambda_1 = \lambda_2$ – у кола;

$\lambda_1 = -\lambda_2$ – у рівносторонньої гіперболи.

Кожному кореню характеристичного рівняння відповідає головний напрям лінії другого порядку.

Якщо лінія другого порядку віднесена до головних напрямів, то в її рівнянні коефіцієнти при квадрата змінних дорівнюють кореням характеристичного рівняння.

Нехай в першій системі координат лінія другого порядку має загальне рівняння (1), а в другій системі координат вісі мають головні напрями. Нову систему координат можна отримати із старої поворотом її на кут α (кут між старою і новою осями абсцис), який обчислюється за формулою:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \qquad (19)$$

За відомим тангенсом кута неважко знайти його синус і косинус:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \qquad (20)$$

А значить і координати нових базисних векторів, які відповідають головним напрямам лінії (1):

$$\bar{i}'(\cos\alpha;\sin\alpha); \quad \bar{j}'(-\sin\alpha;\cos\alpha). \qquad (21)$$

Використавши формули переходу від першої до другої системи координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \qquad (22)$$

перейдемо від рівняння (1) до рівняння, яке задає дану лінію в новій системі координат. Воно не буде містити доданок із добутком змінних $x'y'$, а коефіцієнти при x'^2 і y'^2 відповідно будуть дорівнювати λ_1 і λ_2, бо в новій системі координат дана лінія віднесена до головних напрямів.

Канонічна система координат отримується з другої системи координат її паралельним перенесенням:

1) у центр даної лінії, якщо лінія центральна;
2) в будь-який центр даної лінії, якщо центрів безліч
3) у точку дотику прямої, паралельної осі Oy', з даною лінією, якщо лінія не має центрів.

У цій (третій) системі координат рівняння лінії другого порядку набуде найпростішого (канонічного) вигляду. До неї можна перейти від другої системи координат за формулами:

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0, \\ y' = y'' + y_0, \end{cases} \qquad (23)$$

де $(x_0; y_0)$ - координати початку третьої системи координат у другій системі.

За канонічними рівняннями лінії другого порядку поділяються на дев'ять видів:

1. Еліптичного типу ($I_2 > 0$)

1.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліпс;

1.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліпс;

1.3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — сукупність двох уявних прямих, які перетинаються у дійсній точці (0;0).

2. Гіперболічного типу ($I_2 < 0$)

2.1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гіпербола;

2.2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — дві прямі, які перетинаються.

3. Параболічного типу ($I_2 = 0$)

3.1. $y^2 = 2px$ — парабола;

3.2. $y^2 - a^2 = 0$ — сукупність двох паралельних прямих: $y - a = 0$ і $y + a = 0$;

3.3. $y^2 + a^2 = 0$ — сукупність двох уявних паралельних прямих: $y - ia = 0$ і $y + ia = 0$;

3.4. $y^2 = 0$ — сукупність двох співпадаючих прямих $y = 0$.

Отже, серед дев'яти існуючих алгебраїчних ліній 2-го порядку 6 дійсних і 3 уявні. Серед шести дійсних 3 вироджені.

Лінії, в яких інваріант третього порядку $I_3 \neq 0$ не дорівнює нулю, є невиродженими. Якщо ж $I_3 = 0$, то лінії другого порядку є виродженими, тобто розпадаються у пару кривих.

Для побудови невироджених і вироджених ліній другого порядку, заданих загальним рівнянням, доцільно використовувати дещо різні підходи.

Для невироджених ліній послідовність дій така:

1) зведення загального рівняння лінії до канонічного вигляду;
2) побудова канонічної системи координат в даній системі;
3) побудова лінії в канонічній системі координат за її канонічним рівнянням.

За допомогою інваріантів можна значно спростити зведення загального рівняння (1) невиродженої лінії другого порядку до канонічного вигляду. для цього потрібно виконати такі дії.

1) Обчислити інваріанти $I_1 = a_{11} + a_{22}$; $I_2 = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2) Встановити, що дана лінія є невиродженою ($I_3 \neq 0$).
3) Охарактеризувати дану лінію: центральна чи нецентральна; еліптичного чи гіперболічного типу.
4) Знайти корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2.
5) Скласти рівняння лінії в канонічній системі координат:

а) $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$, якщо лінія центральна;

б) $\lambda_2 y''^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{I_3}{\lambda_2}}x'' = 0$, якщо лінія нецентральна, знак перед коренем потрібно обрати протилежним до знаку λ_2.

6) Звести отримане рівняння до канонічного вигляду.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Через точку $M(1;0)$ провести дотичну до лінії

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Розв'язання:

Нехай k - кутовий коефіцієнт шуканої дотичної. Так як точка M належить дотичній, то рівняння дотичної має вигляд: $y = k(x-1)$. Зведемо це рівняння до загального вигляду: $kx - y - k = 0$. Звідси, координати вектора нормалі: $\bar{n}(k;-1)$, а напрямного вектора $\bar{p}(1;k)$. Отже, рівняння дотичної в параметричному вигляді буде таким:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = k \cdot t \end{cases}$$

Значення x і y підставимо в рівняння лінії, щоб знайти при якому, значенні k пряма і лінія матимуть єдину спільну точку.

Отже:

$3(t+1)^2 + 7(t+1)kt + 5(kt)^2 - 2(t+1) - 2kt = 0,$

$3t^2 + 6t + 3 + 7kt^2 + 7kt + 5k^2t^2 - 2t - 2 - 2kt = 0,$

$t^2(5k^2 + 7k + 3) + t(5k + 4) + 1 = 0.$

Квадратне рівняння відносно змінної t матиме єдиний корінь, якщо $D = 0$. Значить

$D = (5k+4)^2 - 4(5k^2 + 7k + 3) = 0;$

$5k^2 + 7k + 3 = 0;$

$D = 36 - 20 = 16;$

$k_1 = \frac{-6+4}{5} = \frac{2}{5},\ k_2 = \frac{-6-4}{5} = -2.$

Знайдені кутові коефіцієнти підставимо в загальне рівняння дотичної:

1) $-\frac{2}{5}x - y + \frac{2}{5} = 0$ або $2x + 5y - 2 = 0;$

2) $-2x - y + 2 = 0$ або $2x + y - 2 = 0.$

Відповідь: $2x + 5y - 2 = 0;\ 2x + y - 2 = 0.$

Приклад 2. написати рівняння асимптоти лінії, заданої рівняння:

$$2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0.$$

Розв'язання:

Якщо $M(x;y)$ - точка асимптоти, а $\bar{p}(\alpha;\beta)$ - вектор асимптотичного напряму, то рівняння асимптоти має вигляд:

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Найпростіше знайти кутовий коефіцієнт $k = \frac{\beta}{\alpha}$ асимптоти, тому її рівняння запишемо в такому вигляді:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Через відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ виразимо і зв'язок координат вектора асимптотичного напряму даної лінії з коефіцієнтами її загального рівняння:

якщо $p = 0$, то $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$

Розділимо цю рівність на $\alpha^2 \neq 0$:

$$a_{11} + 2a_{12}\frac{\beta}{\alpha} + a_{22}\frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0;\ \frac{\beta}{\alpha} = k.$$

Підставляючи дані умови, одержуємо:

$$k^2 + 3k + 2 = 0,$$

звідки $k_1 = -1,\ k_2 = -2.$

Отже, рівняння асимптот мають вигляд:

$$2x+\frac{3}{2}y-1+k\left(\frac{3}{2}x+y+\frac{1}{2}\right)=0.$$

При $k_1=-1$: $2x+\frac{3}{2}y-1-\frac{3}{2}x-y-\frac{1}{2}=0$ або $x+y-3=0$.

При $k_2=-2$: $2x+\frac{3}{2}y-1-3x-2y-1=0$ або $2x+y+4=0$.

Відповідь: $x+y-3=0,\ 2x+y+4=0$.

Приклад 3. Написати рівняння діаметра лінії: $2x^2+3xy+y^2-2x+y=0$, який поділяє навпіл хорди з кутовим коефіцієнтом $k=-\frac{2}{3}$.

Розв'язання:

Якщо діаметр лінії ділить навпіл хорди з кутовим коефіцієнтом $k=-\frac{2}{3}$, то можна вважати шуканий діаметр спряженим вектору $\bar{a}(3;-2)$. умова спряженості діаметра вектору $\bar{p}(\beta_1;\beta_2)$ виражається залежністю:

$$\beta_1(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+\beta_2(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0.$$

Згідно рівняння лінії $a_{11}=3,\ a_{12}-\frac{5}{2},\ a_{22}=1,\ a_{13}=4.$

Звідси,

$$3\left(3x-\frac{5}{2}y+4\right)-2\left(-\frac{5}{2}x+y\right)=0$$

або

$$28x-19y+24=0.$$

Відповідь: $28x-19y+24=0$.

Приклад 4. Скласти рівняння осей симетрії лінії:

$$3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0.$$

Розв'язання:

$I_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9-1=8$ - лінія центральна, тому лінія другого порядку має дві осі симетрії. Осі – це головні діаметри: $a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0$. Для даної лінії: $k-1=0\ \Rightarrow\ k=\pm 1$.

Рівняння осей:

$$F_x+F_y=0,\ F_x-F_y=0$$

або

$$2x+2y+1=0,\ x-y+1=0.$$

Відповідь: $2x+2y+1=0,\ x-y+1=0.$

Приклад 5. Звести рівняння кола $x^2+y^2+4x-6y-23=0$ до канонічного вигляду

Розв'язання:

Згрупуємо члени з x і y і доповнимо здобуті вирази до повних квадратів.

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)-4-9-23=0.$

$(x+2)^2+(y-3)^2=36.$

Рівняння кола, центр $(-2;3),\ r=6.$

Відповідь: $C(-2;3),\ r=6.$

Приклад 6. Привести загальне рівняння кривої до канонічного вигляду методом паралельного перенесення осей координат, встановити вид кривої та напівосі: $x^2+9y^2-30x+18y+9=0.$

Згрупуємо члени з x і y і доповнимо здобуті вирази до повних квадратів.

$(5x^2-30x)+(9y^2+18y)+9=0,$

$5(x^2-6x)+9(y^2+2y)+9=0,$

$5(x^2-6x+9-9)+9(y^2+2y+1-1)+9=0,$

$5(x-3)^2+9(y+1)^2-45=0,$

$x_1=x-3 \quad y_1=y+1,$

$$\begin{bmatrix} x=x_1+x_0 \Rightarrow x=x-3+x_0 \Rightarrow x_0=3 \\ y=y_1+y_0 \Rightarrow y=y+1+y_0 \Rightarrow y_0=-1 \end{bmatrix}.$$

Новий початок координат в т. $(3;-1)$

$5x_1^2+9y_1^2=45$

Розділимо обидві частини рівняння на 45, в результаті отримаємо канонічне рівняння кривої:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{5}=1.$$

Відповідь: рівняння еліпса з на півосями $a=3,\ b=\sqrt{5}.$

Приклад 7. Встановити, що рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ визначає гіперболу. Знайти її центр і півосі.

Розв'язання:

Згрупуємо члени з x і y і доповнимо здобуті вирази до повних квадратів $16(x^2-4x)-9(y^2+6y)-161=0,$

$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+6y+9-9)-161=0$

$16(x-2)^2-64-9(y+3)^2+81-161=0,$

$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144$.

Розділимо праву і ліву частину останнього рівняння на 144, отримаємо: $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$.

Врахувавши формули паралельного переносу:

$$\begin{cases} x=x_1+x_0 \Leftrightarrow x=x-2+x_0 \Leftrightarrow x_0=2 \\ y=y_1+y_0 \Leftrightarrow y=y+3+y_0 \Leftrightarrow y_0=-3 \end{cases},$$

дійдемо висновку, що задане рівняння визначає гіперболу з центром у точці O_1 (2;-3) і півосями a=3; b=4.

Відповідь: рівняння визначає гіперболу з центром у точці O_1 (2;-3), a=3; b=4.

Приклад 8. Привести загальне рівняння кривої до канонічного вигляду методом повороту осей координат, встановити вид кривої та її напівосі: $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$.

Розв'язання:

Розпочнемо з повороту осей координат.

$$\begin{cases} x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha \\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha \end{cases}.$$

Замість x та y в загальному рівнянні підставляємо формули повороту осей координат:

$$8(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)^2+4(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)+5(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)^2+$$
$$+16(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+4(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)-28=0$$
$$8x_1^2\cos^2\alpha-16x_1y_1\sin\alpha\cos\alpha+8y_1^2\sin^2\alpha+4x_1^2\cos\alpha\sin\alpha+4x_1y_1\cos^2\alpha-4x_1y_1\sin^2\alpha-$$
$$-4y_1^2\sin\alpha\cos\alpha+5x_1^2\sin^2\alpha+10x_1y_1\sin\alpha\cos\alpha+5y_1^2\cos^2\alpha+16x_1\cos\alpha-16y_1\sin\alpha+$$
$$+4x_1\sin\alpha+4y_1\cos\alpha-28=0$$

Згрупуємо члени з x_1^2, y_1^2, x_1y_1, x_1 і y_1:

$$(8\cos^2\alpha+4\cos\alpha\sin\alpha+5\sin^2\alpha)x_1^2+(4\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha-4\sin^2\alpha)x_1y_1+$$
$$+(8\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha)y_1^2+(16\cos\alpha+4\sin\alpha)x_1+(4\cos\alpha-16\sin\alpha)y_1-28=0$$

(1)

Прирівняємо добуток x_1y_1 до нуля, знайдемо значення $tg\alpha$.

$$4\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha-4\sin^2\alpha=0$$
$$4-\frac{6\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=0$$
$$4-6tg\alpha-4tg^2\alpha=0$$
$$4x^2+6x-4=0$$
$$D=36+64=100 \qquad \sqrt{D}=10$$
$$x_1=\frac{-6+10}{8}=\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-6-10}{8} = -2$$

$$tg\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad tg\alpha_2 = -2$$

Два значення $tg\alpha$ відповідає двом взаємно перпендикулярним напрямкам. (так як добуток =1), з цих двох розв'язків візьмемо одне значення $tg\alpha$: $tg = -2$.

$$\sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Підставимо значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ в рівняння (1).

$$\left[8\cdot\frac{1}{5}+4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+5\cdot\frac{4}{5}\right]x_1^2+\left[8\cdot\frac{4}{5}-4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5}+5\frac{1}{5}\right)\right]y_1^2+\left[16\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]x_1 +$$

$$+\left[4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-16\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]y_1-28=0$$

$$4x_1^2+9y_1^2+\frac{8}{\sqrt{5}}x_1+\frac{36}{\sqrt{5}}y_1-28=0$$

Групуємо і приводимо до повних квадратів.

$$\left(4x_1^2+\frac{8}{\sqrt{5}}x_1\right)+\left(9y_1^2+\frac{36}{\sqrt{5}}y_1\right)-28=0$$

$$4\left[\left(x_1^2+\frac{8}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]+9\left[\left(y_1^2+\frac{4}{\sqrt{5}}y_1+\frac{4}{5}\right)-\frac{4}{5}\right]-28=0$$

$$4\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=36$$

$$x_2 = x_1+\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad y_2 = y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad y_0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

т. $O\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$4x^2+9y^2=36$$

$$\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1$$

Відповідь: Еліпс з напівосями $a=3,\ b=2$ і центром в т. $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ повернений відносно системи координат x_1Oy_1.

Приклад 9. Знайти канонічне рівняння лінії: $x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Розв'язання:

Обчислимо інваріанти рівняння даної лінії:

$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2;$

$$I_2 = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix} = 25 + 15 + 15 - 25 - 25 - 9 = -4.$$

$I_3 \neq 0$ - лінія невироджена, $I_2 = 0$ - лінія параболічного типу, отже є параболою. Складаємо її характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Його корені: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

Зведене рівняння параболи має вигляд:

$$\lambda_2 y''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}}x'' = 0$$

У нашому випадку $2y''^2 - 2\sqrt{-\frac{-4}{2}}x'' = 0$, або $y''^2 = \sqrt{2}x''.$

Фокус цієї параболи міститься в точці $F\left(\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$ відносно канонічної системи координат, а довжина її фокальної хорди дорівнює $2p = \sqrt{2}$.

Для побудови параболи знайдемо її головні напрями:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{i}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \overline{j}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Вектор $\overline{i}'$ задає напрям головного діаметра параболи (осі $O'x'$), а вектор $\overline{j}'$ – напрям головної дотичної (тобто осі $O'y'$ канонічної системи координат).

Отже, головний діаметр і головна дотична даної параболи мають відповідно рівняння:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t + x_{0,} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}t + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

та

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t + x_{0,} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t + y_0 \end{cases} \quad (2)$$

де x_0, y_0 - координати вершини параболи. Координати вершини параболи x_0, y_0 знайдемо з умови дотику головної дотичної (2) до даної параболи, а саме:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x_0; y_0)l_1 + F_2(x_0; y_0)l_2 = 0, \\ F(x_0; y_0) = 0. \end{cases}$$

Враховуючи коефіцієнти загального рівняння даної лінії, маємо:

$$\begin{cases} (x_0 + y_0 - 5)\dfrac{\sqrt{2}}{2} + (x_0 + y_0 - 3)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ x_0^{\,2} + 2x_0y_0 + y_0^{\,2} - 10x_0 - 6y_0 + 25 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 4, \\ (x_0 + y_0)^2 - 10x_0 - 6y_0 + 25 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 + y_0 = 4, \\ 16 - 10x_0 - 6y_0 + 25 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 + y_0 - 4 = 0, \\ 10x_0 - 6y_0 - 41 = 0; \end{cases}$$

звідки $x_0 = \dfrac{17}{4}, y_0 - \dfrac{1}{4}$. Отже, вершини параболи міститься в точці $O\left(\dfrac{17}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$.

Відповідь: $y''^2 = \sqrt{2}x''$, $\overline{i}''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\overline{j}''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $O''\left(\dfrac{17}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$.

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання 1: Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду методом паралельного перенесення або кута відхилення осей координат. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів

1. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$
2. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$
3. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$
4. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$
5. $x^2 + 4y^2 + 6y + 5 = 0$
6. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$
7. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$
9. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
10. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
11. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$
12. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y + -139 = 0$
13. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
14. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
15. $y^2 + +5xy - 14x^2 = 0$
16. $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
18. $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$
19. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
20. $5x^2 + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$
21. $4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$
22. $21x^2 + xy - 10y^2 = 0$
23. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
24. $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0$
25. $2x^2 + 4xy - 2y^2 - 8x - 10y = 0$

Завдання 2: Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої.

1. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 7 = 0$
2. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x - 32 = 0$
3. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x + 60y + 7 = 0$

4. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$
5. $4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0$
6. $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$
7. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
8. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$
9. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$
10. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$
11. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$
12. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$
13. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
14. $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 7 = 0$
15. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$
16. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$
17. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$
18. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$
19. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$
20. $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$
21. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
22. $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$
23. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$
24. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$
25. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

Тема 5: Вивчення алгебраїчних поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями

Поверхнею другого порядку називається *множина точок*, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$Ax^2 + Bby^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0, \quad (1)$$

де принаймні один з коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* відмінний від нуля.

Рівняння (1) називається *загальним рівнянням поверхні другого порядку*.

Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння (1) і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентними.

Рівняння (1) визначає не лише поверхні другого порядку, але ще і

сукупність двох площин, пряму, точку, а може, взагалі не мати геометричного змісту (тобто визначати „уявну” поверхню). Для встановлення, яку фігуру визначає рівняння (1) іноді буває достатньо елементарних перетворень (згрупувати доданки, помножити або поділити рівняння на число тощо).

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

1. Конічна поверхня

***Конічна поверхня* (*конус*)** — це поверхня, яка разом з кожною своєю точкою містить пряму, яка проходить через цю точку і фіксовану точку простору (вершину).

Поверхня, утворена рухом прямої l, яка при русі, пробігаючи всі точки заданої кривої γ, проходить через фіксовану точку простору C, називається *конічною поверхнею.* При цьому точка C називається *вершиною* або *центром* конічної поверхні, різні положення прямої l при русі — *твірними*, а крива γ — *напрямною.*

Загальна схема складання рівняння конічної поверхні з вершиною $S(a,b,c)$ і напрямною γ: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$

1. Нехай $M'(x',y',z')\in\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_1(x',y',z')=0, \\ F_2(x',y',z')=0. \end{cases}$
2. Тоді $\dfrac{x-a}{x'-a}=\dfrac{y-b}{y'-b}=\dfrac{z-c}{z'-c}$ — рівняння твірної l. При цьому біжуча її точка є біжучою точкою поверхні.
3. Виключивши з системи
$$\begin{cases} F_1(x',y',z')=0, \\ F_2(x',y',z')=0, \\ \dfrac{x-a}{x'-a}=\dfrac{y-b}{y'-b}=\dfrac{z-c}{z'-c}; \end{cases}$$
змінні x', y', z', отримаємо рівняння конічної поверхні.

Канонічне рівняння конуса з вершиною в початку координат, віссю якого служить вісь Oz, записується у вигляді
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Аналогічно, рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ і $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ визначають конуси другого порядку з вершиною в початку координат, осями яких служать відповідно вісі *Oy* і *Ox*.

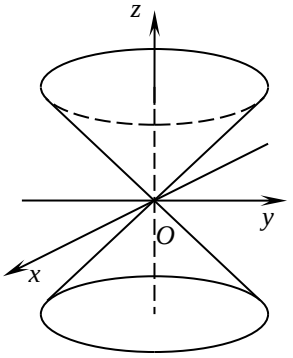


Рис. 1

При $a=b$ маємо поверхню, яка називається *прямим круговим конусом* (рис. 1), напрямною якої L є коло $X^2+Y^2=a^2$, $Z=c$, значить, рівняння такої конічної поверхні має вигляд $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Теорема 1. *Кожне однорідне алгебраїчне рівняння 2-го порядку відносно змінних* x, y, z, *тобто рівняння виду* $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz=0$, *є рівнянням конічної поверхні з вершиною в початку координат.*

Наприклад, $x^2-2y^2+3z^2-4xy+5xz-yz=0$ — рівняння конічної поверхні з вершиною в початку координат.

Теорема 2. *Кожне алгебраїчне однорідне рівняння 2-го порядку відносно виразів* $(x-a), (y-b), (z-c)$, *тобто рівняння виду*

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+C(z-c)^2+D(x-a)(y-b)+E(x-a)(z-c)+F(y-b)(z-c)=0,$$

є рівнянням конічної поверхні з вершиною в точці $S(a;b;c)$.

Наприклад, $(x-1)^2+(y+2)^2-z^2+3(y+2)z=0$ — рівняння конічної поверхні з вершиною $S(1;-2;0)$.

2. Циліндрична поверхня

Циліндрична поверхня (циліндр) — це поверхня, яка разом з кожною своєю точкою містить пряму, яка проходить через цю точку і паралельна фіксованій прямій (вектору).

Циліндрична поверхня є лінійчатою, оскільки може бути утворена рухом прямої ℓ, яка, залишаючись паралельною фіксованій прямій (вектору), пробігає всі точки заданої кривої γ. При цьому крива γ називається *напрямною*, а різні положення прямої ℓ — *твірними*.

Часто циліндричні поверхні класифікують за типом напрямної. Якщо напрямною є еліпс, то циліндр називають еліптичним, якщо гіпербола — гіперболічним, якщо парабола — параболічним, тощо.

Приклади циліндричних поверхонь

1). $x^2+y^2=R^2$ – коловий циліндр, напрямною якого є коло $x^2+y^2=R^2$, z=0 в площині xOy, а твірні паралельні осі OZ . (рис. *а*)

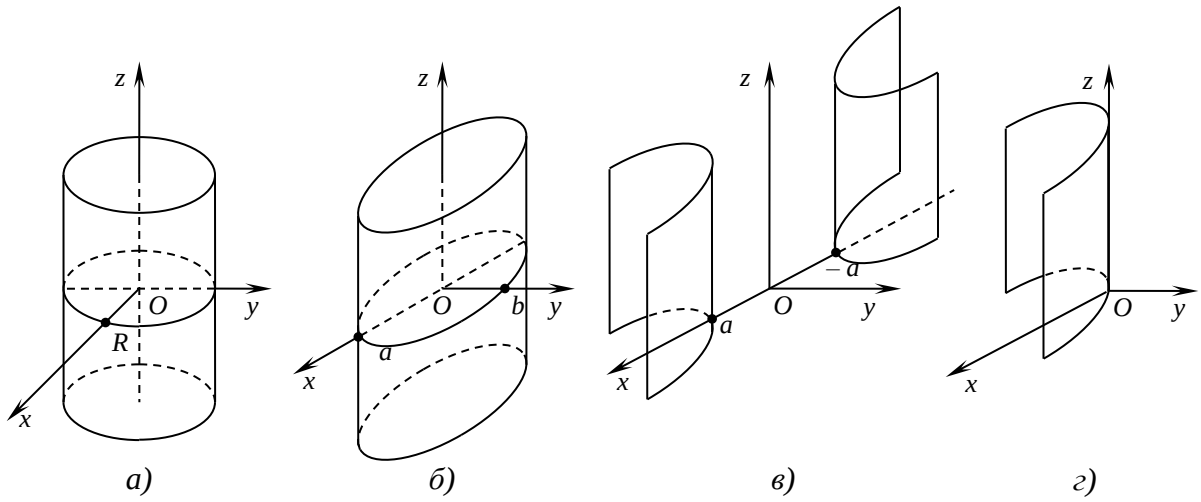
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – еліптичний циліндр напрямною якого є еліпс

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z=0 в площині xOy, твірні паралельні площині Oz (рис. *б*).

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гіперболічний циліндр напрямком якого гіпербола z=0, в

площині *xOy*, а твірні паралельні осі *Oz* (рис. *в*).

4) $\acute{o}^2 = 2\eth\tilde{o}$ – параболічний циліндр напрям якого є парабола $\acute{o}^2 = 2\eth\tilde{o}$, в



а) *б)* *в)* *г)*

площині *xOy*, а твірні паралельні осі *Oz* (рис. *г*).

3. Поверхня обертання

Поверхня обертання — це поверхня, яка утворюється обертанням деякої кривої γ навколо фіксованої прямої ℓ. При цьому крива γ називається твірною, а пряма ℓ — віссю обертання; різні положення кривої γ при обертанні — *меридіанами,* а траєкторії кожної точки кривої γ — *паралелями* поверхні обертання.

Теорема. *В прямокутній декартовій системі координат простору* $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *рівняння* $x^2 + y^2 = f_1^2(z) + f_2^2(z)$, *задає поверхню обертання, утворену обертанням кривої* $\gamma: \begin{cases} x = f_1(z), \\ y = f_2(z); \end{cases}$ *навколо осі* Oz.

Наприклад, $x^2 + y^2 = (\sqrt{z})^2 + (z+1)^2$ — рівняння алгебраїчної поверхні обертання навколо осі Oz;

$x^2 + z^2 = \sin^2 y$ — рівняння трансцендентної поверхні з віссю обертання Oy.

Загальна схема складання рівняння поверхні обертання кривої $\gamma: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ навколо прямої $l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

1. Нехай $M(x,y,z)$ — біжуча точка поверхні; π — площина, яка проходить через точку M і перпендикулярна прямій l, $M_* = \pi \bigcap l$; $M' = \pi \bigcap \gamma$. Тоді

$$
\left.
\begin{array}{lll}
M'\in\gamma & \Leftrightarrow & \begin{cases} F_1(x',y',z')=0, \\ F_2(x',y',z')=0, \end{cases} \\
2.\ |M_*M|^2=|M_*M'|^2 & \Leftrightarrow & (x-x_*)^2+(y-y_*)^2+(z-z_*)^2= \\
 & & =(x'-x_*)^2+(y-y_*)^2+(z-z_*)^2, \\
M_*\in l & \Leftrightarrow & \dfrac{x_*-x_0}{m}=\dfrac{y_*-y_0}{n}=\dfrac{z_*-z_0}{p}
\end{array}
\right\} \quad (*)
$$

3. Виключивши з системи (*) невідомі x', y', z', x_*, y_*, z_*, отримаємо рівняння (відносно x, y, z) поверхні обертання.

Види поверхні обертання:

1) *еліпсоїд обертання.*

Еліпсоїдом обертання називають поверхню утворену обертанням еліпса навколо однієї з його осей симетрії.
Якщо еліпс обертається навколо його великої осі, то він – стиснутий.

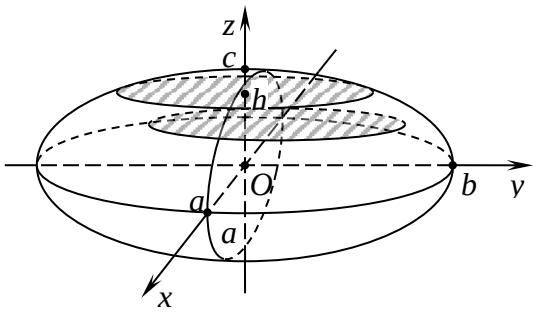


Рис. 2

Еліпсоїдом називають поверхню утворену внаслідок рівномірного стиску (розгину) еліпсоїда обертання відносно однієї з його площин симетрії, наприклад *xOz*.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\tilde{n}^2}{z^2}=1 - \textit{канонічне рівняння еліпсоїда}$$

де *a,b,c* – параметри еліпсоїда. Якщо два параметри еліпсоїда рівні, то отримаємо еліпсоїд обертання, якщо рівні всі три параметри – сферу.

Початок координат т.*O* є центром симетрії і є центром еліпсоїда, осі – головними осями, площини координат – головними площинами.

Точки перетину еліпсоїда з осями симетрії називаються *вершинами*. Еліпсоїд має шість вершин : $\grave{A}_1(\grave{a};0;0)$ $\grave{A}_2(-\grave{a};0;0)$, $\hat{A}_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$.

Відрізки *a,b,c* – називаються довжинами *півосей* еліпсоїда.

Перерізи еліпсоїда з його площинами симетрії називається головними перерізами. Еліпсоїд має три головні перерізи. Ними є еліпси.

Площина *xOy* перетинає еліпсоїд по лінії $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ або

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Площина *xOz* перетинає еліпсоїд по лінії $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ або

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ ó=0\end{cases}$.

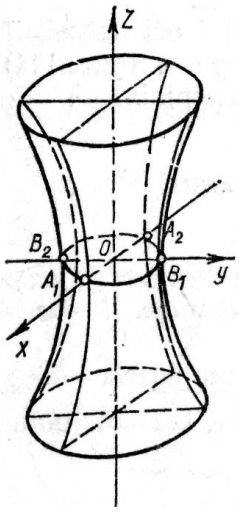
Площина *yOz* перетинає еліпсоїд по лінії $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ õ=0\end{cases}$ або

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{ó^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$.

2*) Гіперболоїд обертання*

Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом обертання називають поверхню, утворену обертанням гіперболи навколо її уявної осі симетрії.



Нехай обертання утворюється обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, ó=0$ навколо осі *Oz*, тоді рівняння гіперболоїда буде таким: $\frac{x^2+ó^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *– канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда*,

де *a,b,c* – параметри гіперболоїда. Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної труби. Головними перерізами однопорожнинного гіперболоїда є дві гіперболи та один еліпс:

Площина *xOy* перетинає однопорожнинний гіперболоїд по лінії:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

Площина *xOz* перетинає однопорожнинний гіперболоїд по лінії:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ ó=0\end{cases}$$

Площина *yOz* перетинає однопорожнинний гіперболоїд по лінії:

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ õ=0\end{cases}$.

Однопоржнинний гіперболоїд має чотири вершини $À_1(à;0;0)$ $À_2(-à;0;0)$, $Â_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, *a,b*– довжина дійсних півосей, *c* –

довжини уявної осі.

Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називають поверхню, утворебну обертанням гіперболи навколо її дійсної осі симетрії.

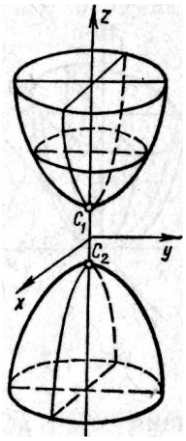
Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох окремих порожнин, кожна з яких має форму опуклої нескінченної чаші.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ - *канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда,*

де *a,b,c* – параметри гіперболоїда, *a,b* – довжини уявних півосей, *c* – довжина явної півосі.

Має три площини симетрії

Головні перерізи двопорожнинного гіперболоїда:



Площина *xOz* перетинає двопорожнинний гіперболоїд по лінії:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ ó=0\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ ó=0\end{cases}$$

Площина *yOz* перетинає двопорожнинний гіперболоїд по лінії

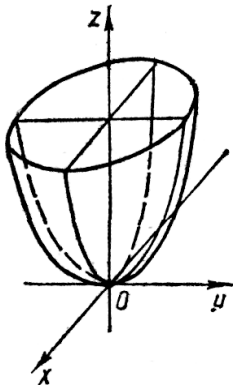
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ õ=0\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\\ õ=0\end{cases}$$

Пощина *xOy* двопорожнинний гіперболоїд не перетинає.

Двопорожнинний гіперболоїд має тільки дві вершини $\tilde{N}_1(0;0;\tilde{n})$, $\tilde{N}_2(0;0;-\tilde{n})$.

3) Параболоїд обертання

Еліптичний параболоїд



Параболоїдом обертання називають поверхню, утворену обертанням параболи навколо її осі симетрії.

$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$ *– канонічне рівняння,*

де *p, q* – параметри.

Має дві площини симетрії, які збігаються з координатними площинами *xOy*, *xOz і* одну вісь симетрії *Oz*. Вершина параболоїдаобертання *O*(0;0;0).

Головні перерізи:

Площина *yOz* перетинає еліптичний параболоїд по лінії:

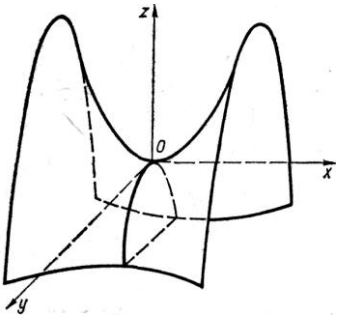
$$\begin{cases}\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z\\ \tilde{o}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y^2=2qz\\ \tilde{o}=0\end{cases}$$

Площина *xOz* перетинає еліптичний параболоїд по лінії:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=2z \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=2qz \\ y=0 \end{cases}$$

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називають поверхню, яка має одним з *канонічних рівнянь рівняння* $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=2z$.



де *p, q* – параметри, *xOz* і *yOz* – площини симетрії, *Oz* – вісь симетрії.

В перерізі цими площинами отримали параболу, вітками напрямленими в протилежні сторони.

4. **За канонічними рівняннями лінії другого порядку поділяються на сімнадцять видів**:

1. Еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
2. Неявний еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
3. Однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
4. Двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
5. Конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
6. Уявний конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$
7. Еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$
8. Гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$
9. Еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
10. Уявний еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$
11. Дві уявні площини, що перетинаються $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$

12. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
13. Дві площини, що перетинаються $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
14. Параболічний циліндр $x^2=2py$
15. Дві паралельні площини $x^2=a^2 \qquad a\neq 0$
16. Дві уявні паралельні площини $x^2=-a^2$
17. Дві площини, що співпадають $x^2=0$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Еліпс з півосями 5 та 3 обертається навколо своєї великої осі, яка співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, що описує еліпс при обертанні.

Розв'язання:

Складемо канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат, який розміщений в площині $yOz: a=5;\ b=3.$

$$\begin{cases}\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1\\ x=0\end{cases}$$

Щоб одержати рівняння поверхні, яка утворена обертанням еліпса, що розміщений в $-$ площині yOz, навколо осі Oy, необхідно в рівняння еліпса замінити z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}.$ Одержуємо еліпсоїд обертання, який витягнуто вздовж осі Oy:

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2+z^2}{9}=1, \text{ або } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$

Приклад 2. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і напрямною:

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=c\end{cases}.$$

Розв'язання:

Канонічні рівняння твірних, що проходять через вершину $O(o;o;o)$ конуса і точку $(x;y;z)$ напрямної, будуть:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Виключимо *x, y, z* із заданих рівнянь. Замінюючи z через c, визначимо x і y із останніх двох рівнянь: $x = c\frac{X}{z}, \quad y = c\frac{Y}{z}$.

Підставимо одержані значення x і y в перше рівняння напрямної, будемо мати:

$$\frac{c^2X^2}{z^2} + \frac{c^2Y^2}{z^2} = a^2 \text{ , або } \frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Відповідь: $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Приклад 3. Які поверхні визначаються рівняннями:

1). $x^2 + z^2 = 16$;

2). $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$;

3). $x = 2z^2$;

4). $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{7} = 1$.

Розв'язання:

Кожне із цих рівнянь містить тільки дві змінні *x* і *z*, та визначає на площині *xOz* криві: 1). Коло; 2). Еліпс; 3). Параболу; 4). Гіперболу.
В просторі ж кожне із них визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі *Oy*, так як ці рівняння не містять змінної *y*. Напрямними цих циліндричних поверхонь являються вказані криві:

1). $x^2 + z^2 = 16$ - рівняння прямого кругового циліндра;

2). $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ - рівняння еліптичного циліндра;

3). $x = 2z^2$ - рівняння параболічного циліндра;

4). $\frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{7} = 1$ - рівняння гіперболічного циліндра.

Приклад 4. Гіпербола з півосями 3 і 4 обертається навколо своєї уявної осі, яка співпадає з віссю *Oz*. Центр гіперболи співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, яку одержуємо при обертанні гіперболи.

Розв'язання:

Складемо канонічне рівняння гіперболи з центром в початку координат, що знаходяться в площині *yOz: a*=3*; b*=4*;*

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Щоб скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи, що знаходиться в площині *yOz*, навколо осі *Oz*, необхідно в рівняння

гіперболи замість у підставити $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \text{ або } \frac{x^2+y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Отже, одержуємо одно порожнинний гіперболоїд обертання:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$

Приклад 5. З'ясувати, яку поверхню в R^3 визначає рівняння $x^2-3z=0$.

Розв'язання:

Враховуючи, що в заданому рівнянні відсутня змінна y, а на площині *Oxz* йому відповідає парабола, то рівняння $x^2-3z=0$ в R^3 визначає циліндричну поверхню. Твірна цієї циліндричної поверхні паралельна осі *Oy*, напрямною є парабола, задана рівнянням $x^2-3z=0$ у площині *Oxz*. Отже, задане рівняння визначає параболічний циліндр.

Відповідь: параболічний циліндр.

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні:

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

Розв'язання:

Згрупуємо члени, які містять *x, y* та *z*:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-3.$$

Доповнивши до повних квадратів вирази у дужках, отримуємо

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$$

або

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{1}=1.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1, 1, 1)$. Формули перетворення координат мають вигляд:

$$x_1=x-1,\ \ y_1=y-1,\ \ z_1=z-1.$$

Тоді рівняння поверхні запишеться так:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}+\frac{z_1^2}{1}=1.$$

Це рівняння визначає еліпсоїд; його центр знаходиться в новому початку координат, а півосі відповідно дорівнюють 3, 2 та 1.

Приклад 7. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

Розв'язання:

Згрупуємо члени, які містять *x* та *y*:

$$(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази у дужках:

$$(x^2\text{-}4x\text{+}4)\text{-}(y^2\text{-}8y\text{+}16)=2z\text{+}4\text{-}16$$

або

$$(x\text{-}2)^2\text{-}(y\text{-}4)^2=2(z\text{-}6).$$

Виконаємо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок *точку* $O_1(2, 4, 6)$. Тоді $x_1 = x - 2,\ y_1 = y - 4,\ z_1 = z - 6.$

В результаті отримуємо рівняння: $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$.яке визначає гіперболічний параболоїд.

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання 1:

1. Звести до канонічного виду рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z - 7 = 0$.
2. Скласти рівняння сфери радіуса R=6 з центром в точці С(-1;-2;-4).
3. Сфера проходить через точку А(2;3;-5), а її центр знаходиться в точці В(1;1;1). Скласти рівняння сфери.
4. Знайти радіус і координати центра сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$.
5. Скласти рівняння сфери, яка проходить через три точки А(2;4;-8), В(2;-6;2), С(4;4;6), якщо центр її лежить на площині хОу.
6. Визначити тип лінії по якій перетинаються конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ з площиною $y = 4$.
7. Сфера проходить через точку А(5;7;-1), а її центр знаходиться на початку координат. Скласти рівняння сфери.
8. По якій лінії перетинаються конус $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ з площинами y=4, x=8, z=2.
9. Визначити, які поверхні визначаються наступними рівняннями:
   $x^2 - y^2 = 1;$
   $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0;$
10. Знайти координати центру і радіус сфери, яка задана рівнянням: $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$
11. Скласти рівняння сфери, яка проходить через три точки А(1;2;-6), В(1;-6;2), С(2;2;3), якщо центр її лежить на площині хОу.
12. Скласти рівняння сфери, якщо точка М(8;-2;-6) і т.К(0;6;-2) є кінцями одного із діаметрів сфери.
13. Знайти радіус і координати центра сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 5 = 0$.
14. Сфера проходить через точку К(5;3;-1), а її центр знаходиться на початку координат. Скласти рівняння сфери.

15. По якій лінії перетинаються конус $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ з координатними площинами.
16. Яка лінія зображується системою рівняння: $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-7)^2 = 16 \\ z = 6 \end{cases}$.
17. Скласти рівняння сфери, яка проходить через три точки A(1;2;-4), B(2;-6;2), C(4;4;6), якщо центр її лежить на площині xOz.
18. По якій лінії перетинаються конус $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ з площинами y=4, x=6, z=2.
19. Визначити, які поверхні визначаються наступними рівняннями: $4x^2 - 2y^2 + 12z^2 - 24 = 0$; $3x^2 + 5y^2 - 12z = 0$.
20. Скласти рівняння сфери, якщо точка M(1;0;-6) і K(4;6;-2) є кінцями одного із діаметрів сфери.
21. Скласти рівняння сфери, яка проходить через три точки A(-2;1;-3), B(2;2;2), C(4;4;6), якщо центр її лежить на площині xOz.
22. Сфера проходить через точку A(1;3;4), а її центр знаходиться в точці B(1;3;1). Скласти рівняння сфери.
23. Яка лінія зображується системою рівняння: $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x = 1 \end{cases}$.
24. По якій лінії перетинаються конус $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 0$ з координатними площинами.
25. Знайти координати центру і радіус сфери, яка задана рівнянням: $2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

<u>Завдання 2</u>:

Знайдіть точки перетину поверхні Ф із прямою l.

	Ф	l
1.	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$	$\frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}$

2. $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$

3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$

4. $4z=x^2-4y^2$ $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$

5. $x^2+4y^2=4z$ $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$

6. $x^2+\frac{y^2}{2}=4$ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-6}{2}$

7. $x^2+y^2=0$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$

8. $x^2-y^2=6z$ $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$

9. $x^2+y^2=z^2$ $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$

10. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$

11. $\frac{x^2}{4}+y^2=2z$ $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{0}$

12. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

13. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$ $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$

14. $x^2+\frac{y^2}{2}=6z$ $\frac{x-2}{1}=\frac{y1}{-2}=\frac{z+1}{2}$

15. $\frac{x^2}{2}+y^2-\frac{z^2}{4}=1$ $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$

16. $x^2+4y^2=4z$ $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-2}$

17. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=2z$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$

18. $\frac{x^2}{16}-y^2=1$ $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-2}$

19. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=2z$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{3}$

20. $\frac{x^2}{3}-y^2=2z$ $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$

21. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$

22. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 3z$ $\qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$

23. $x^2 + 2y^2 = z$ $\qquad \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$

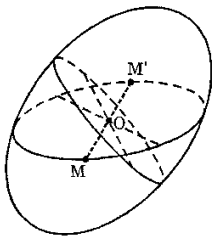
24. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{1} = 1$ $\qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$

25. $x^2 + 3y^2 + z^2 = 0$ $\qquad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Тема 6: Загальня теорія поверхонь другого порядку

Центр поверхні другого порядку.

Точка O називається центром поверхні другого поряд разом з довільною точкою M цієї поверхні їй належить і т симетрична відносно точки O.



(рис.1)

Нехай в деякій системі координат поверхня другого задана загальним рівнянням

$$F(x;y;z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

Точка $O(x_0;y_0;z_0)$ буде центром даної поверхні тоді і тільки тоді, коли вона буде серединою будь-якої хорди, яка проходить через неї. Це означає, що всі діаметральні площини поверхні проходять через точку O, тому координати точки O задовольняють рівняння довільної діаметральної площини (рис.1).

$$lF_1(x_0;y_0;z_0) + mF_2(x_0;y_0;z_0) + nF_3(x_0;y_0;z_0) = 0 \qquad (2)$$

Отже, точка O буде центром даної поверхні тоді і тільки тоді, коли при довільних l, m, n виконується рівність (2).

А це можливо тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$\begin{cases} F_1(x_0;y_0;z_0) = 0, \\ F_2(x_0;y_0;z_0) = 0, \\ F_3(x_0;y_0;z_0) = 0. \end{cases}$$

Отже, щоб знайти центр поверхні (1), необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x_0;y_0;z_0) = 0, \\ F_2(x_0;y_0;z_0) = 0, \\ F_3(x_0;y_0;z_0) = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a_{12}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

(3)

Якщо система (3) має тільки один розв'язок, а відповідно поверхня (1) має тільки один центр, то вона називається центральною. До таких поверхонь належать: еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди, конус.

Якщо ж ця система має безліч розв'язків, то можливі два випадки:

1) Ця поверхня має лінію центрів, тобто всі її центри розміщені на прямій (еліптичний та гіперболічний циліндри, пара площин, що перетинаються);
2) Якщо два рівняння системи (3) є наслідком третього рівняння, тоді поверхня має площину центрів (пара паралельних площин).

Якщо поверхня немає центра, то вона називається нецентральною. Такими поверхнями є еліптичний і гіперболічний параболоїди.

Діаметральні площини поверхні другого порядку.

Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні другого порядку, називається *хордою* цієї поверхні.

Середини паралельних хорд поверхні другого порядку лежать на площині.

Площина, яка проходить через середини хорд аоверхні другого порядку, паралельних до деякого вектора $\vec{a}$, називається *діаметральною площиною цієї поверхні*, спряженим з вектором $\vec{a}$.

Рівняння діаметральної площини, спряжений з вектором $\vec{a} = (l; m; n)$, має вигляд:

$$lF_1 + mF_2 + nF_3 = 0.$$

(4)

Дотична площина до поверхні другого порядку.

Нехай поверхня другого порядку задана загальним ріняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

а точка $P_0(x_0; y_0; z_0)$ лежить на цій поверхні.

Теорема: Геометричне місце прямих, яке проходить через точку $P_0(x_0; y_0; z_0)$ і дотикається до поверхні в цій точці, є площиною. Ця площина називається *дотичною площиною до поверхні* в цій точці.

Рівняння дотичної площини до поверхні у точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$F_1(x_0; y_0; z_0)x + F_2(x_0; y_0; z_0)y + F_3(x_0; y_0; z_0)z + F_4(x_0; y_0; z_0) = 0 \qquad (5)$$

або

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})y +$$
$$+ (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})z + (a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}) = 0 \qquad (6)$$

Геометричне місце дотичних до поверхні другого порядку в точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$ є площина.

Характеристичним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння виду

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або через інваріанти:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

де λ – деяке дійсне число.

Розв'язки характеристичного рівняння поверхні другого порядку не залежать від того, відносно якої системи координат складене рівняння поверхні.

Корені λ_1, λ_2 і λ_3 характеристичного рівняння завжди існують і не дорівнюють одночасно нулю:

Інваріанти рівняння поверхні другого порядку відносно перетворення координат:

$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Зведення рівнянь поверхні до канонічного виду

а) Перетворення рівняння поверхні другого порядку при паралельному перенесенні координатного базису.

Теорема1: При паралельному перенесенні координатного базису коефіцієнти старших членів рівняння поверхні другого порядку не змінюються.

Нехай задано загальне рівняння поверхні другого порядку $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$,

то формули перетворення рівняння поверхні другого порядку при паралельному перенесенні координатного базису:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases} \qquad (7)$$

де $O(x_0; y_0; z_0)$ – новий початок координат.

б) Перетворення рівняння поверхні другого порядку за допомогою інваріантів.

Нехай задано загальне рівняння поверхні другого порядку $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Дослідимо, які поверхні воно виражає при різних значеннях його

коефіцієнтів. Найзручніше це зробити, виходячи з дослідження розв'язків характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \qquad (8)$$

Розглянемо ці випадки:

I. Всі три розв'язки характеристичного рівняння відмінні від нуля.

Отже, в цьому випадку $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$,

тобто досліджувальна поверхня *центральна*. Канонічне рівняння даної поверхні буде мати вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0,$$

де $a_{44} = \frac{I_4}{I_3}$.

Потрібно розрізняти два окремі випадки:

1) $I_4 \neq 0$ – поверхня *невироджена*ю залежно від знаків розв'язків характеристичного рівняння і дискремінантів поверхні рівняння виражає еліпсоїд (дійсний або уявний) або гіперболоїд (однопорожнинний чи двопорожнинний);

2) $I_4 = 0$ – поверхня *вироджена.* Однорідне рівняння

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = 0$$

виражпє конус (дійсний або уявний).

II. Два розв'язки характеристичного рівняння поверхні відмінні від нуля, але третій наприклад λ_3, дорівнює нулю. Це можливо лише тоді, коли вільний член характеристичного рівняння $I_3 = 0, I_2 \neq 0$. З умови

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

випливає, що поверхня *нецентральна*, або має нескінченну множину центрів.

Розглянемо невироджені поверхні:

1) $I_4 \neq 0$. Канонічне рівняння даного виду поверхні матиме вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \pm 2z'' \sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}} = 0.$$

Знак перед радикалом в цьому рівнянні можна вибрати довільно. Треба лише пам'ятати, щоіз змінною знака змінюється орієнтація осі $O''Z''$.

Дане канонічне рівняння виражає параболоїд (еліптичний або параболічний залежно від знаків коренів характеристичного рівняння).

2) $I_4 = 0$, то поверхня вироджена. Розглянемо два випадки:

а) Пряма центрів не лежить на поверхні, отже, вільний член в рівнянні поверхні $a''_{44} \neq 0$. Тоді канонічне рівняння поверхні матиме вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a''_{44} = 0,$$

де $a''_{44} = \lambda_1 x'^2_0 + \lambda_2 y'^2_0 + 2a'_{14}x'_0 + 2a'_{24}y'_0 + a'_{44}$, x'_0, y'_0, z'_0 координати центра.

Залежно від знаків λ_1, λ_2, a_{44} поверхня виражає циліндр еліптичний (дійсний або уявний) або гіперболічний циліндр.

б) Пряма центрів лежить на поверхні, отже, вільний член в рівнянні поверхні $a''_{44} = 0$. Канонічне рівняння поверхні має вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0.$$

Поверхня вироджується в пару площин.

III. Один з розв'язків характеристичного рівняння поверхні, наприклад $\lambda_2 \neq 0$, а $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $I_2 = 0$, $I_1 \neq 0$. Розглянемо два випадки:

а) Принаймні один із коефіцієнтів a'_{14} і a'_{34} не дорівнюють нулю. Канонічне рівняння поверхні буде таким:

$$\lambda_2 y''^2 + 2a''_{14}x' = 0$$

Поверхня є параболічний циліндр.

б) Обидва коефіцієнта a'_{14} і a'_{34} дорівнюють нулю. Канонічне рівняння поверхні буде таким:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0.$$

Рівняння двох паралельних площин. В залежності від дискримінанта рівняння $\lambda_2 y'^2 + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0$ ці площини будуть дійсними і різними, дійсними і збіжними або уявними комплексно-спряженими.

Отже, всі поверхні другого порядку розподіляються на такі основні типи:

I. Невироджені поверхні, при умові $I_4 \neq 0$

1). Центральні для яких $I_3 \neq 0$ (еліпсоїд дійсний та уявний, одно порожнинний та двопорожнинний гіперболоїд).

2). Нецентральні, $I_3 = 0$ (еліптичний та гіперболічний параболоїд).

II. Вироджені поверхні, $I_4 = 0$

1). Центральні $I_3 \neq 0$ (конуси, дійсні та уявні).

2). Поверхні з лінією центрів $I_3 = 0$, $I_2 \neq 0$ (еліптичний циліндр та уявний, гіперболічний циліндр та пара дійсний та уявних площин які перетинаються).

3). Поверхні, які системою умов: $I_3 = 0$, $I_2 = 0, I_1 \neq 0$. До цих поверхонь належить параболічний циліндр з лінією центрів на нескінченності та пара паралельних площин (дійсних або уявних), які мають площину центрів.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1 Знайти центр еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Розв'язання:

Для еліпсоїда $F_1=\frac{x}{a^2}$, $F_2=\frac{y}{b^2}$, $F_3=\frac{z}{c^2}$. Тому система (3) записується у вигляді

$$\begin{cases}\frac{x}{a^2}=0,\\ \frac{y}{b^2}=0,\\ \frac{z}{c^2}=0.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0,\\ y=0,\\ z=0.\end{cases}$$

Отже, ми переконалися, що точка $O(0;0;0)$ є єдиним центром еліпсоїда, заданого канонічним рівнянням.

Відповідь: $O(0;0;0)$.

Приклад 2. Знайти центр поверхні $x^2-2xy+y^2+x-y=0.$

Розв'язання:

Зауважимо, що це – вироджена поверхня другого порядку, що розпадається на пару паралельних площин:

$(x-y)^2+(x-y)=0;$

$(x-y)(x-y-1)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x-y+1=0\end{array}\right.$$

Для цієї поверхні $F_1=x-y+\frac{1}{2}$, $F_2=-x+y-\frac{1}{2}$, $F_3=0$. За формулами (3) маємо:

$$\begin{cases}x-y+\frac{1}{2}=0,\\ -x+y-\frac{1}{2}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\ 2x-2y+1=0.$$

Отже, ця поверхня має площину центрів.

Відповідь: площина центрів.

Приклад 3. Скласти рівняння діаметральної площини поверхні $x^2-4y^2+z^2-2x+6y-4xy+2yz-8=0$ спряженої з вектором $\vec{a}(1;-2;3)$.

Розв'язання:

Для даної поверхні $F_1=x-2y-1,\ F_2=-2x-4y+z+3,\ F_3=y+z$.

Із рівняння (4) маємо:

$1\cdot(x-2y-1)-2(-2x-4y+z+3)+3(y+z)=0;$

$5x+9y+z-7=0.$

Відповідь: $5x+9y+z-7=0.$

Приклад 4. Записати рівняння дотичної площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ у його точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Розв'язання:

Для еліпсоїда $F_1=\frac{x}{a^2}$, $F_2=\frac{y}{b^2}$, $F_3=\frac{z}{c^2}$, $F_4=-1$.

За формулою (5)

$\frac{x_0}{a^2}\cdot x+\frac{y_0}{b^2}\cdot y+\frac{z_0}{c^2}\cdot z-1=0$ або $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$.

Відповідь: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$.

Приклад 5 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні:

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

Розв'язання:

Зведемо до канонічного вигляду рівняння поверхні методом паралельного перенесення. Згрупуємо члени, які містять *x, y* та *z* :

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-3.$$

Доповнивши до повних квадратів вирази у дужках, отримуємо

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$$

або

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{1}=1.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1, 1, 1)$. Формули перетворення координат мають вигляд:

$$x_1=x-1,\ \ y_1=y-1,\ \ z_1=z-1.$$

Тоді рівняння поверхні запишеться так:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}+\frac{z_1^2}{1}=1.$$

Це рівняння визначає еліпсоїд; його центр знаходиться в новому початку координат, а півосі відповідно дорівнюють 3, 2 та 1.

Відповідь: $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}+\frac{z_1^2}{1}=1$. - еліпсоїд.

Приклад 6 Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

Розв'язання:

Згрупуємо члени, які містять *x* та *y* :

$$(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази у дужках:

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16$$

або

$$(x\text{-}2)^2\text{-}(y\text{-}4)^2=2(z\text{-}6).$$

Виконаємо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок *точку* $O_1(2,\ 4,\ 6)$. Тоді $x_1 = x - 2,\ \ y_1 = y - 4,\ \ z_1 = z - 6.$

В результаті отримуємо рівняння: $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$.яке визначає гіперболічний параболоїд.

Відповідь: гіперболічний параболоїд $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$.

Приклад 7 Звести до канонічного вигляду рівняння

$$2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 5 = 0.$$

Розв'язання:

$$2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 3y^2 - 3\left(z^2 - 2z + 1\right) + 3 - 5 = 0$$

$$2\left(x+1\right)^2 - 3y^2 - 3\left(z-1\right)^2 = 4$$

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\left(z-1\right)^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

$$-\frac{\left(x+1\right)^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} + \frac{\left(z-1\right)^2}{\frac{4}{3}} = -1$$

$$x+1 = x'$$
$$y = y' \qquad\qquad -\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} + \frac{z'^2}{\frac{4}{3}} = -1.$$
$$z-1 = z'$$

Відповідь: $-\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} + \frac{z'^2}{\frac{4}{3}} = -1.$

Приклад 8 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні методом інваріантів:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0.$$

Розв'язання:

Знаходимо інваріант четвертого порядку і визначаємо вид поверхні.

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & -3 & 3 \\ -7 & -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -2\left(243 - 243\right) = 0$$

Оскільки визначник дорівнює нуля, тому поверхня вироджена.

$$I_3=\begin{vmatrix}1&2&-4\\2&-2&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-3\\2&0&0\\-4&-6&-3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}3&-3\\-6&-3\end{vmatrix}=-2(-27)=54$$

Оскільки визначник відмінний від нулю, поверхня центральна (конус).

Складаємо характеристичне рівняння поверхні $\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$ і знаходимо його розв'язки:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-4\\2&-2-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-3-\lambda\\2&-2-\lambda&0\\-4&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\2&-2-\lambda&0\\-5-\lambda&-4&0\end{vmatrix}=$$

$$=(-3-\lambda)(-8-10-5\lambda+2\lambda+\lambda^2)=(-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-18)$$

$\lambda_1=-3 \qquad \lambda_2=-3 \qquad \lambda_3=6$

$-3x'^2+y'^2+6z'^2=0$

Відповідь: $x'^2+y'^2-2z'^2=0$ - конус обертання.

Приклад 9 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні методом інваріантів: $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$.

Розв'язання:

Знаходимо інваріант четвертого порядку і визначаємо вид поверхні.

$$I_4=\begin{vmatrix}2&6&0&6\\6&10&4&2\\0&4&-2&4\\6&2&4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&6\\6&8&4&10\\6&8&-2&0\\6&1&4&7\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}1&0&3\\3&4&5\\6&3&7\end{vmatrix}=256$$

Оскільки визначник відмінний від нуля, тому поверхня невироджена.

$$I_3=\begin{vmatrix}2&6&0\\6&10&4\\0&4&-2\end{vmatrix}=-40-32+72=0$$

Оскільки визначник дорівнює нуля, то поверхня центрадьна, тобто параболоїд.

Складаємо х-чне рівняння

$$I_2=\begin{vmatrix}10&4\\4&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&6\\6&-10\end{vmatrix}=-36-4+24=$$

$I_1=10 \qquad I_2=-56$

$\lambda^3-10\lambda^2-56\lambda=0 \qquad \lambda=0$

$\lambda^2-10\lambda-56=0 \quad \lambda_1=14 \qquad \lambda_2=-4$

Знайдені значення підставляємо в канонічне рівняння параболоїда

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=2\sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}}Z''$$

$$a_{34} = \pm\sqrt{\frac{8\cdot 32}{14\cdot 4}} = \pm\frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$14x''^2 - 4y''^2 \pm \frac{16}{\sqrt{14}}z'' = 0$$

Виберемо додатній напрям осі OZ:

$$7x''^2 - 2y''^2 = \frac{8}{\sqrt{14}}z''$$

Відповідь: гіперболічний параболоїд $7x''^2 - 2y''^2 = \frac{8}{\sqrt{14}}z''$.

Приклад 10 Привести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$$

Розв'язання:

Зведемо до повних квадратів рівняння поверхні

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) + 13 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 + 0$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36$$

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \\ z = z' + 1 \end{cases} \qquad O(1;1;1)$$

$$4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36$$

Відповідь: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1$ - еліпсоїд, $\begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{matrix}$.

Приклад 11 Привести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 17z = 0.$$

Розв'язання:

$$3(x^2 - 4x + 4) - 12 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 + 17z = 0$$

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 + 17\left(z - \frac{16}{17}\right) = 0$$

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = -17\left(z - \frac{16}{17}\right)$$

$$O\left(2;-1;\frac{16}{17}\right)$$

Праву і ліву частину рівняння поділимо на 17 і помножимо на 2

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{17}{6}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{17}{8}} = -2\left(z - \frac{16}{17}\right)$$

$$\begin{cases} x-2=x' \\ y+1=y' \\ z-\dfrac{16}{17}=z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'+1 \\ z=z'+1 \end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{x'^2}{\dfrac{17}{6}}+\dfrac{y'^2}{\dfrac{17}{8}}=-2z'$ - еліптичний параболоїд

Домашні індивідуальні завдання:

Завдання1: Зведіть рівняння поверхні F до канонічного вигляду методом паралельного перенесення:

1. $z-2x^2-4y^2-6x+8y+1=0$
2. $x^2-y^2-3z^2+2x+4y-6z+4=0$
3. $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$
4. $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$
5. $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$
6. $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$
7. $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$
8. $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$
9. $4x^2-y^2-4x+4y+1=0$
10. $6x^2+5y^2+7z^2+x=0$
11. $z^2-3x+4y^2+5=0$
12. $3x^2+6z^2+6x-8y-7=0$
13. $x^2+y^2-z^2+2x+2y-4=0$
14. $-x^2-y^2+2z^2+4x+2y=0$
15. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+3=0$
16. $z=x^2+3y^2-y+1$
17. $4x^2+4y^2-6x+8y-14=0$
18. $x^2+z^2-16y+6z+16=0$
19. $x^2+9y^2+4z^2-6x+4y=0$
20. $3z^2+3y^2+z+4y-1=0$
21. $z=x^2+y^2-y+4x$
22. $x^2-y^2-4x+4y+1=0$
23. $6x^2+5y^2+7z^2+2x=0$
24. $z^2-3x^2+4y+2=0$
25. $3x^2+z^2+6x-y-1=0$

Завдання2:

1. Встановіть, чи є поверхня центральною.
2. За допомогою інваріантів визначте тип поверхні.
3. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду.

Варіанти:

1. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-18=0$
2. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-15=0$
3. $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4xz-36=0$
4. $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz+8xz-6=0$
5. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz-3=0$
6. $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$
7. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$
8. $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z-4=0$
9. $2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz+4x+2y-4=0$
10. $6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz+9z+\frac{1}{4}=0$
11. $3x^2+y^2-z^2+6xz-4y=0$
12. $2x^2+y^2+3z^2-4yz+2x-6z+1=0$
13. $4x^2-9z^2+2xz-8x-4y+36z-32=0$
14. $4x^2+2y^2+z^2-4xy-2yz+2z-2y-4=0$
15. $6x^2-y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$
16. $x^2+z^2+2xy+4xz-2yz+4x+4y+2z=0$
17. $2xy+2yz+2xz+1=0$
18. $xy+z=0$
19. $3x^2+y^2+3z^2-4yx+2x-4z=0$
20. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$
21. $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x-12z+8y+14=0$
22. $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$
23. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$
24. $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz-4yz-27=0$
25. $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8xz+14x+4y+8z-1=0$

ОСНОВНІ МЕТОДИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Метод координат, суть якого полягає в тому, що з введенням системи координат, точки площини (простору) ототожнюються з парами (трійками, наборами) дійсних чисел, що дозволяє задавати геометричні об‘єкти за допомогою співвідношень між числами і використовувати при цьому засоби алгебри і аналізу.

Векторний метод. Вектори допомагають задавати геометричні об’єкти (фігури, відношення, системи координат, перетворення простору тощо) векторними співвідношеннями і застосовувати засоби векторної алгебри і векторного числення до їх аналізу і дослідження, переводити умови і вимоги задач у векторну форму і при їх розв’язанні повно використовувати апарат теорії векторів. В цьому суть векторного методу.

Координатно-векторний метод. Якщо при застосування векторного методу використовуються координати векторів (у векторному базисі чи системі координат), то векторний метод називають координатно-векторним.

Метод геометричних перетворень. Ряд геометричних задач на доведення, обчислення, побудову та дослідження розв'язуються методом геометричних перетворень, суть якого полягає в тому, що дану фігуру перетворюють в таку, для якої задача розв'язується простіше, після чого результати "переносяться" на початкову фігуру. Його складовими є методи інверсії, афінних перетворень, подібності, рухів тощо.

Метод перерізів (дослідження поверхонь) полягає в тому, що поверхня перетинається паралельними площинами (наприклад, координатними площинами). За видом (характером, властивостями) отриманих перерізів судять про форму і властивості поверхні. Цей метод грунтується на наступній теоремі.

Теорема. *Нехай в прямокутній декартовій системі координат* $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *задані поверхня* $\sigma\colon F(x,y,z)=0$ *і площина* $\pi\colon z=h$ *(паралельна площині* Oxy *або з нею співпадаюча). Якщо поверхня* σ *перетинається з площиною* π *по лінії* γ*, то проекція лінії* γ *на площину* Oxy *в системі координат* $O\vec{i}\vec{j}$ *має рівняння* $F(x,y,h)=0$.

Метод геометричних місць точок. Геометричне місце точок, множина точок, фігура — це різні терміни, які пердставляють одне поняття, виражають один і той же зміст: множина *всіх* точок, які мають одну або кілька спільних властивостей. Спільна властивість всіх точок даної фігури (геометричного місця точок) є властивістю їх координат в деякій системі координат, точніше: виражається в координатній формі, даючи аналітичний вираз (аналітичне представлення) фігури.

Часто задача зводиться до визначення фігури (точки чи множини точок). А кожна фігура є спільною множиною точок якихось інших фігур (ГМТ). Саме з цієї умови її можна визначити як переріз геометричних місць точок. Це дозволяє задавати фігури і вивчати нові фігури, що є перерізами уже вивчених фігур і в повній мірі використовувати засоби алгебри і арсенал інших методів.

Приклад. Яка фігура утворюється в результаті перерізу двох сфер?

Розв'язання. Нехай σ_1 і σ_2 — задані сфери. В прямокутній декртовій системі координат, початок якої співпадає з центром сфери σ_2, вони задаються рівняннями:

$$\sigma_1: \ x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$\sigma_2: \ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

система яких визначає переріз. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D + R^2 = 0, \end{cases}$$

яка визначає досліджуваний переріз. Він є плоскою фігурою, бо належить площині $\pi: \ Ax + By + Cz + D + R^2 = 0$. Більше того, він є перетином сфери σ_1 і площини π. А це, як відомо, є колом.

Отже, якщо сфери перетинаються, то їх перерізом є коло.

Метод інваріантів (зведення алгебраїчних поверхонь до канонічного вигляду). Загальне рівняння алгебраїчної поверхні другого порядку

$$F(x,y,z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

$a_{ij} = a_{ji} \in R$

зводиться до найпростішого вигляду за допомогою інваріантів (наступних функцій від коефіцієнтів рівняння):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{vmatrix}.$$

значення яких не змінюються при переході від однієї афінної системи координат до іншої.

ІНДЗ з аналітичної геометрії

Варіант 1

1. Записати рівняння прямої, яка утворює з віссю OX кут 60^0 і проходить через точку A(7;-3).
2. Звести до канонічного виду і визначити ексцентриситет кривої:
$$x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$$
3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M (3;7;-1) і відтинає на осях координат однакові відрізки
4. Визначити кут між прямими:
$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 5 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$
5. Дано три послідовних вершини паралелограма A (-3;-2;0), B (3;-3;1), C (5;0;2). Знайти його четверту вершину і кут між векторами $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 7 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$.

Варіант 2

1. Визначити віддаль між двома паралельними прямими:
$$3x - 4y + 4 = 0$$
$$3x - 4y - 2 = 0$$
2. Визначити координати центра і радіус кола:
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$$
3. Знайти кут між площинами:
$$x - 2y + 2z - 8 = 0 \text{ та } x + z - 6 = 0$$
4. Написати рівняння перпендикуляра опущеного із початку координат на пряму:
$$-\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$
5. Визначити об’єм і висоту піраміди, якщо відомі координати її вершин:
$$A(5;7;-1), B(3;-4;8), C(1;-1;2), S(0;-3;4).$$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x - 32 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-15=0$.

Варіант 3

1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку А (4;-2)і точку перетину прямих:

$$2x+3y-1=0$$
$$3x+y-4=0$$

2. Написати рівняння геометричного місця точок М(x,y), відношення віддалей яких від точки F (4;0) до прямої x= - 2 дорівнює 2.
3. Записати рівняння площин паралельних площині 2x+y-2z+7=0 віддалених від неї на 6 одиниць.
4. Показати, що пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежить на площині 2x+y-z=0.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $a=2i-10j-2k$, $b=i+3j+4k$, $c=4i-4j+6k$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $7x^2+60xy+32y^2-14x+60y+7=0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4xz-36=0$.

Варіант 4

1. Знайти віддаль від точки А (4;5) до прямої 12x+5y-2=0
2. Визначити ексцентриситет кривої: $x^2+4y^2-6x+8y=3$
3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку М (1;2;4)і лінію перетину площин

$$2x-y+3z-6=0$$
$$x+2y-z+3=0$$

4. Показати, що прямі перетинаються і знайти точку їх перетину: $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ $\begin{cases} x=3z-4 \\ y=z+2 \end{cases}$.
5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b,c: $a=(4;0;1)$, $b=(3;1;2)$, $c=(-2;3;-2)$, $d=(5;4;1)$.

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz - 3 = 0$.

Варіант 5

1. Записати рівняння прямої , яка відтинає на осі OY відрізок b=-3 і утворює з віссю OX кут 120^0
2. Написати рівняння еліпса, велика піввісь якого a=5 і ексцентриситет e=0.8
3. Визначити віддаль від початку координат до площини:

$$x + 2y + 2z - 4 = 0$$

4. Показати, що дані взаємно перпендикулярні:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 - z \end{cases}$$

5. Визначити площу паралелограма, діагоналями якого являються вектори:

$d_1 = 4i + 3j - 2k$
$d_2 = 8i - 4j + 7k$

Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої:

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0.$$

6. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz + 8xz - 6 = 0$.

Варіант 6

1. Показати, що прямі паралельні і знайти відстань між ними:

$$2x - 3y = 6$$

$$4x - 6y = 25$$

2. Визначити ексцентриситет лінії другого порядку:

$$2x^2 - 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$$

3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M(1;4;2) і перпендикулярна до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-1}$
4. Визначити кут між прямими: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$$

5. Дано три послідовних вершини паралелограма: A(1;0;2), B(3;4;4), C(5;6;0). Визначити кут між діагоналями.
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 4xy + 12yz = 0$.

Варіант 7

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A(1;2;4) перпендикулярно до прямої $x - 2y - 4 = 0$
2. Скласти рівняння геометричного місця точок однаково віддалених від початку координат і прямої $x = -4$
3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M (1;2;4) і пряму: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$
4. Визначити кут між прямою і площиною: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$
$2x + y + z - 4 = 0$
5. При якому значенні λ вектори будуть взаємно перпендикулярні:
$\bar{a}(4;-3\lambda;5)$ $\bar{b}(-2\lambda;4\lambda;4)$.
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$.

Варіант 8

1. Знайти K з умови, що пряма y=Kx+5 віддалена від початку координат на відстань рівну $\sqrt{5}$.
2. Записати в канонічному вигляді і визначити ексцентриситет лінії другого порядку: $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$
3. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки: A(1;0;2), B(4;2;1), C(0;-3;4)
4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку M(-4;3;0) паралельно прямій: $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b, c: $a=(1;-1;0)$, $b=(2;-2;3)$, $c=(-1;4;-2)$, $d=(2;1;1)$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z-4=0$.

Варіант 9

1. Написати рівняння висоти BD в трикутнику з координатами вершин A(-3;0), B(2;5), C(3;2).

2. Скласти рівняння гіперболи, асимптоти якої $y=\pm 3x$, а координати фокуса $F(\sqrt{40};0)$

3. Показати, що пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{3}$ лежить у площині $2x+y-z=0$

4. Визначити кут між прямими
$$\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y--6=0 \end{cases}$$

5. Визначити площу і висоту трикутника AD. Координати вершин трикутника: $A(-6;2;4)$, $B(3;0;9)$, $C(5;7;1)$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz+4x+2y-4=0$.

Варіант 10

1. Знайти віддаль від вершини C до медіани трикутника ABC з координатами вершин A(7;-4), B(5;-1), C(0;5).

2. Визначити ексцентриситет гіперболи:
$$9x^2-16y^2=144$$

3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M(1;-3;5) і відтинає на осях OУ і OZ вдвічі більші відрізки, ніж на осі OX.

4. Показати, що прямі перетинаються і написати рівняння площини в якій вони розташовані: $\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{1}$

5. Визначити об'єм і висоту трикутної піраміди, побудованої на векторах:

$$AB = 7i - 3j + 4k$$
$$AC = 8i + 4j - 6k$$
$$AS = 3i + 7j + k$$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:

$6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz + 9z + \dfrac{1}{4} = 0$.

Варіант 11

1. Із точки A(6;3) виходить промінь світла під кутом 45 градусів до вісі OX і відбивається від осі OX. Написати рівняння відбитого променя.

2. Знайти точку перетину кола $x^2 + y^2 = 5^2$ з асимптотами гіперболи $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

3. Знайти віддаль від точки M(5;1;-1) до площини $x - 2y - 2z + 4 = 0$

4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A (1;2;-2) паралельно прямій $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$

5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b, c.

$a = (1;-2;4)$

$b = (5;0;-3)$ $\qquad d = (3;-4;-8)$

$c = (2;4;5)$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:

$3x^2 + y^2 - z^2 + 6xz - 4y = 0$.

Варіант 12

1. Дано трикутник з вершинами A(-2;0), B(2;4), C(4;0). Написати рівняння медіани AD.
2. Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці A(1;1), і яке дотикається до лінії $2x + y - 7 = 0$
3. Знайти точку перетину площини: $2x - y + 3z - 9 = 0$ $x + 2y + 2z - 3 = 0$ $3x + y - 4z + 6 = 0$
4. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного із точки M(2;1;0) на пряму $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z \end{cases}$
5. Визначити площу основи, об'єм і висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = 5i - 2j - k$, $\bar{b} = i + 3j + k$, $\bar{c} = 2i - j + 2k$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz + 2x - 6z + 1 = 0$.

Варіант 13

1. Визначити внутрішні кути трикутника, якщо дано рівняння сторін трикутника: $4x + 6y - 1 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$
2. Звести рівняння до канонічного вигляду і визначити ексцентриситет кривої $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$
3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M (2;2;-2) паралельно до площини x - 2y - 3z = 0
4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку A(1;0;3), B(7;2;-1) і визначити кути, які утворює пряма з осями координат.
5. При якому значенні λ вектори будуть взаємно перпендикулярними $\bar{a} = (1;-2;\lambda)$, $\bar{b} = (2\lambda;-\lambda;-4\lambda)$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$4x^2 - 9z^2 + 2xz - 8x - 4y + 36z - 32 = 0$.

Варіант 14

1. Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених на 4 одиниці від прямої 4x - 3y = 0
2. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь a=6 і ексцентриситет E=0,5
3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку M(1;2;4) і лінію перетину площин $\begin{matrix} 2x - y + 3z - 6 = 0 \\ x - 2y - z + 3 = 0 \end{matrix}$
4. Визначити кути, які утворює з осями координат пряма: $\begin{matrix} x - 2y + 3z + 4 = 0 \\ 2x - y - z - 2 = 0 \end{matrix}$
5. Визначити площу трикутника і висоту трикутника BD, якщо координати вершин трикутника $A(3;0;-2)$ $B(5;1;1)$ $C(-4;3;2)$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 7 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 2z - 2y - 4 = 0$.

Варіант 15

1. Визначити які прямі перпендикулярні: $3x - 2y + 7 = 0$ $6x + 4y - 5 = 0$ $6x - 4y - 9 = 0$ $2x + 3y - 6 = 0$
2. Визначити ексцентриситет кривої: $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$
3. Визначити віддаль від початку координат до площини, яка проходить через точки A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2).
4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки A(2;-1;3) і B(0;5;-2) та визначити координати точки перетину прямої з площиною $3x - 4y + 2z - 1 = 0$
5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b, c.
$a = (2;1;-1)$
$b = (-1;3;4)$ $d = (2;-6;8)$
$c = (3;-2;2)$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин,

фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$6x^2 - y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$.

Варіант 16

1. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими $\begin{matrix} 2x + 3y = 10 \\ 3x + 2y = 10 \end{matrix}$

2. Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат і яке дотикається до лінії $3x + 4y = 10$

3. Знайти кут між площинами $x + 2z - 6 = 0$ і $x + 2y - 4 = 0$

4. Визначити віддаль від початку координат до прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$

5. Визначити об'єм піраміди та її висоту, якщо відомі координати її вершин: A(1;2;0), B(2;0;4), C(3;3;3), S(2;2;5)

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$x^2 + z^2 + 2xy + 4xz - 2yz + 4x + 4y + 2z = 0$.

Варіант 17

1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку A(5;1) і відтинає на осях координат однакові відрізки.

2. Задані точки A(-3;0) та B(3;6). Записати рівняння кола, діаметром якого являється відрізок AB.

3. Визначити віддаль між двома паралельними площинами: $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ і $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

4. Визначити кут між прямими $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

5. Визначити площу і висоту трикутника BD, якщо координати вершин трикутника: A(1;–2;0), B(0;0;4), C(6;2;0)

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $2xy + 2yz + 2xz + 1 = 0$

.

Варіант 18

1. Визначити внутрішні кути трикутника, якщо дано рівняння сторін

трикутника: $8x + 4y - 7 = 0$

$x - 2y + 3 = 0$

$3x + y + 2 = 0$

2. Визначити ексцентриситет гіперболи, якщо рівняння асимптоти $y = \pm\sqrt{3}x$ і координати фокуса F(2;0).
3. Записати рівняння площин, паралельних площині $3x + 2y - 6z = 0$ і віддалених від неї на 14 одиниць.
4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A(-1;2;3) паралельно прямій $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 3x - y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$
5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b,c. $a = (4;0;4)$ $b = (1;-3;2)$ $c = (2;1;-5)$ $d = (-2;6;-4)$.
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду: $x^2 - 2y^2 - 4xy - 8xz + 6y - 5 = 0$

Варіант 19

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і утворює з віссю OX кут 60 градусів
2. Вивести рівняння кривої, всі точки якої рівновіддалені від прямої x= - 5 і від фокуса з координатами F (5;0)
3. Написати рівняння площини, яка проходить через точки A(1;1;0), B(1;0;1), C(0;1;1) і визначити віддаль від цієї площини до початку координат.

4. Рівняння прямої записати в канонічному та параметричному вигляді: $\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

5. Визначити об'єм піраміди та її висоту, якщо відомі координати її вершин:
A(0;0;1)
B(1;2;0)
C(0;1;1)
S(1;1;4)

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$3x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yx + 2x - 4z = 0$

Варіант 20

1. Написати рівняння геометричного місця точок, віддалених на віддаль $\sqrt{13}$ від прямої $2x - 3y + 2 = 0$

2. Записати рівняння гіперболи асимптоти якої $y = \pm 7x$, а директриси $x = \pm 5$.

3. Записати рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$ з площиною $x + y + z - 6 = 0$

5. При якому значенні λ вектори будуть взаємно перпендикулярні:
$\bar{a} = (\lambda; -4; -3)$
$\bar{b} = (2\lambda; 2\lambda; -2)$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$

Варіант 21

1. Написати рівняння пучка прямих, які проходять через точку A(2;3). Вибрати з цього пучка пряму, що утворює з віссю OX кут 120 градусів

2. Написати рівняння кола з центром в початку координат, яке проходить через фокус гіперболи $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку A(2;1;3) і пряму $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2}$

4. Визначити кут між прямою і площиною: $\begin{cases} x=3y-1 \\ 2z=-3y+2 \end{cases}$

$x+2y+z-4=0$

5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b, c.

$a=(2;0;1)$

$b=(3;1;-2)$ $\qquad d=(7;-2;1)$

$c=(4;-3;3)$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x-12z+8y+14=0$

Варіант 22

1. Показати, що точки A(-4;3), B(-5;0), C(5;6), D(1;0) являються вершинами трапеції.

2. Визначити координати фокусів еліпса, ексцентриситет, рівняння директрис $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$

3. Визначити віддаль від точки M(1;4;3) до площини $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

4. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку A(2;-1;3) перпендикулярно до площини $3x-y+7z-12=0$

5. Визначити площу паралелограма, діагоналями якого являються вектори

$d_1=2i-3j+k$

$d_2=i+2j+2k$

6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$

Варіант 23

1. В точках перетину прямої $2x-5y-10=0$ з осями координат проведені перпендикуляри до цієї прямої. Написати їх рівняння.
2. Написати рівняння гіперболи, велика піввісь якої дорівнює 4 і ексцентриситет E=1,25.
3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A(1;3;2) перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$
4. Визначити кути, які утворює з осями координат лінія $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z+6=0 \end{cases}$
5. Визначити площу і висоту трикутника BD, якщо координати вершин трикутника A(4;0;1) B(3;3;0) C(0;1;4)
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$.
7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$

Варіант 24

1. Показати, що прямі 2x-3y=4 і 4x–6y=23 паралельні, і знайти віддаль між ними.
2. Звести до канонічного вигляду і визначити ексцентриситет лінії другого порядку: $3x^2-5y^2+6x+15y=10$
3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M(2;5;4) і відтинає на осі OX вдвічі більший відрізок, ніж на осях OY і OZ.
4. Визначити кут між двома прямими $\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x+y-z=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$
5. Розкласти вектор d в базисі векторів a, b, c.
$a=(-1;3;1)$
$b=(0;-2;5)$ $d=(-2;4;7)$
$c=(4;-3;3)$
6. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду за інваріантами. Побудувати криву. Вказати координати вершин, фокусів, написати рівняння директриси і асимптот, якщо вони є, знайти ексцентриситет кривої: $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$.

7. Зведіть рівняння поверхні до канонічного виду:
$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 27 = 0$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.
2. Поняття про лінійну залежність векторів.
3. Базис. Координати вектора в даному базисі.
4. Поділ відрізка у даному відношенні.
5. Проекція вектора на вісь та її властивості.
6. Алгебраїчні властивості скалярного добутку двох векторів.
7. Скалярний добуток двох векторів, геометричні властивості.
8. Скалярний добуток двох векторів, які задані координатами.
9. Алгебраїчні властивості векторного добутку.
10. Векторний добуток двох векторів, геометричні властивості.
11. Векторний добуток двох векторів у координатах.
12. Мішаний добуток трьох векторів, властивості.
13. Мішаний добуток векторів у координатах.
14. Рівняння прямої на площині (загальне; з кутовим коефіцієнтом).
15. Рівняння прямої на площині (канонічне; параметричне; прямої, що проходить через дві точки).
16. Рівняння прямої на площині (у відрізках на осях; нормальне).
17. Кут між прямими на площині, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
18. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння площини.
19. Різні види рівняння площини (у відрізках на осях; площини, що проходить через три різни точки).
20. Нормальне рівняння площини. Відхилення і відстань точки від площини.
21. Кут між двома площинами. Кут між прямою і площиною.
22. Різні види рівняння прямої лінії у просторі. Кут між прямими у просторі.
23. Відстань від точки до прямої у просторі.
24. Координати точки перетину прямої і площини. Умова перетину двох прямих у просторі.
25. Канонічне рівняння еліпса. Дослідження форми еліпса.
26. Поняття про ексцентриситет та директриси еліпса.
27. Канонічне рівняння гіперболи. Дослідження форми гіперболи.
28. Поняття про асимптоти, ексцентриситет та директриси гіперболи.
29. Канонічне рівняння параболи. Дослідження форми параболи.
30. Полярні рівняння та оптичні властивості еліпса, гіперболи, параболи.
31. Перетворення системи декартових прямокутних координат на площині.

32. Перетворення коефіцієнтів рівняння лінії другого порядку при паралельному перенесенні.
33. Перетворення коефіцієнтів рівняння лінії другого порядку при повороті системи координат.
34. Інваріанти рівняння ліній другого порядку. Поняття типу лінії другого порядку.
35. Центр лінії другого порядку.
36. Стандартне спрощення рівняння лінії другого порядку при повороті координатних осей.
37. Спрощення рівняння центральної лінії другого порядку. Класифікація центральних ліній.
38. Спрощення рівняння лінії параболічного типу. Кваліфікація ліній параболічного типу.
39. Поверхні обертання.
40. Конус і циліндри другого порядку.

ЗРАЗОК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1.

1. Координатами вектора простору R^n протилежного даному $x(x_1, x_2,..., x_n)$ будуть:			
A: нульові	B: протилежні за знаком	C: обернені за модулем	D: інша відповідь
2. Вказати, коли два вектори колінеарні.			
A: їхні координати пропорційні	B: їхні координати рівні	C: їхні координати обернені	D: їхні координати обернено-пропорційні
3. Вказати, чому дорівнює довжина вектора $\lvert\bar{a}\rvert$, якщо $\bar{a}=(0;\,6;\,-8)$.			
A: 3	B: $\sqrt{10}$	C: 100	D: 10
4. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, якщо вектори:			
A: взаємно-перпендикулярні	B: перетинаються	C: лежать на одній прямій	D: інша відповідь
5. Знайдіть вектор одиничної довжини, перпендикулярний до $\bar{a}(3;4)$			
A: $(4;-5)$ або $(-4;3)$	B: $\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ або $\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$;	C: $\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ або $\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$;	D: $\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ або $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$.
6. Дано точки M(-1;5;2) і N(3;-4;1). Вказати, чому дорівнює довжина відрізка MN			
A: $\sqrt{98}$	B: 56	C: $\sqrt{56}$	D: 98
7. Вказати чому дорівнює $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(-1;2;4),\ \bar{b}=(0;1;-1)$			
A: 2	B: -2	C: $(-6;-1;1)$	D: $(-6;1;-1)$
8. Закінчити формулу векторного рівняння прямої в просторі $\bar{r}=$			
A: $\bar{r_0}-t\bar{s}$	B: $\bar{r_0}+t\bar{s}$	C: $\bar{r_0}+\bar{s}$	D: $\bar{r_0}+t$
9. Вказати, коли дві прямі $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$ будуть перпендикулярними.			
A: $k_1=-k_2$	B: $k_1=-\frac{1}{k_2}$	C: $k_1=k_2$	D: $k_1=\frac{1}{k_2}$
10. Вказати, через яку точку проходить площина $3x+2y+7z-7=0$.			
A: $(-1;\,1;\,3)$	B: $(6;-2;-3)$	C: $(-6;\,2;\,3)$	D: $(0;\,0;\,1)$
11. Вказати, коли рівняння $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ описує еліпс.			
A: $B=0\ \ A\neq C\neq 0$	B: $A=0,\ B\neq C$	C: $C=0,\ A\neq B$	D: $A=0,\ B=0,\ C\neq 0$

12. Вказати межі зміни ексцентриситету еліпса.			
A: $0<\varepsilon<1$	B: $0\le\varepsilon<1$	C: $\varepsilon>0$	D: $\varepsilon>1$
13. Вказати канонічне рівняння кривої, якщо велика вісь $2a=6$, а мала вісь $2b=4$			
A: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$	B: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$	C: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$	D: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
14. Вказати межі зміни ексцентриситету гіперболи			
A: $0<\varepsilon<1$	B: $0\le\varepsilon<1$	C: $\varepsilon>0$	D: $\varepsilon>1$
15. Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{m}$ та площиною $Ax+By+Cz=0$ визначається за формулою:			
A: $\frac{Ax_0+By_0+Cz_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$	B: $\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$	C: $\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m+n+p}}$	D: $\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2}$
16. Вказати рівняння еліпса			
A: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+x^2}=2a$	B: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$	C: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y$	D: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2-$
17. Вказати, яку поверхню визначає рівняння $x^2-3y^2+3z^2-54=0$ (3 бала)			
A: однопорожнинний гіперболоїд	B: двопорожнинний гіперболоїд	C: сфера	D: гіперболічний циліндр
18. Вказати, коли поверхня вироджена (2 бала)			
A: $I_4=0$	B: $I_4\neq 0$	C: $I_3=0,\ I_4\neq 0$	D: $I_3=0$
19. Вказати, скільки вершин має еліптичний параболоїд. (2 бала)			
A: дві	B: одну	C: три	D: чотири
20. Рівняння еліпса в полярній системі координат (3 бала)			
A: $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	B: $\rho=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$	C: $\rho=\frac{1+p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$	D: $\rho=-\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

ЛІТЕРАТУРА

1) Александров А. С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: 1968.
2) Бахвалов С. В. и др. Аналитическая геометрия. – М.: Учпедгиз, 1962.
3) Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: 1976.
4) Білоусова В. П. та ін. Аналітична геометрія. – К.: 1973.
5) Вища математика: основні поняття приклади і задачі: Навч. посібник. За ред. Л. Г. Кулініча. – К.: Либідь, 1992.
6) Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К.: АСК, 2001.
7) Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: 1981.
8) Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 600с.
9) Моденов П. С. Аналитическая геометрия. – М.: 1975.
10) Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Лінії на евклідовій площині. — К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. — 44 С.
11) Тарасенкова Н.А., Коломієць О.М. Лінії другого порядку. Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи студентів. – Черкаси: Сіяч, 2000. – 80с.
12) Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. – К.: Вища школа, 1984.

Навчальне видання

Практикум
з аналітичної геометрії

Навчальний посібник

Махомета Тетяна Миколаївна
Тягай Ірина Михайлівна

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 5 від 26 листопада 2020 року)

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
вул. Садова 2, м. Умань, Черкаська обл., 20300

Навчальне видання– Умань: АЛМІ, 2012. –140с.

Видавництво «АЛМІ»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру ДК – №74 від 01.06.2000р.
20300, м. Умань, вул. Садова, 4 тел/факс (04744) 52670
e-mail: almi@ck.ukrtel.net

Підписано до друку 28.10.2009р. Замовлення № 75
Тираж 100 прим.