Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Г.І. Коберник, Г.М. Чирва

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Частина І

Навчальний посібник для викладачів та студентів педагогічних університетів спеціальності “Початкова освіта”

Умань
2013

УДК 372. 47(07)
ББК 74. 262. 5я73
К – 55

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради Інституту розвитку дитини Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини як навчальний посібник для студентів спеціальності “Початкова освіта”. Протокол № 1 від 2 вересня 2013р.

Рецензенти:
доктор педагогічних наук, професор Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького Н.А. Тарасенкова;
кандидат фізико-математичних наук, доцент Уманського державного аграрного університету В.Є. Березовський

Коберник Г.І., Чирва Г.М.
Математика. Практикум. Ч 1. – Умань: ФОП Жовтий О. О., 2013. – 193 с.

Навчальний посібник написаний згідно навчальної програми курсу “Математика”, для педагогічних вузів спеціальності “Початкова освіта”. Посібник містить навчальну програму з цього курсу, структуру залікового кредиту у відповідності з кредитно-модульною системою оцінювання, орієнтовані плани практичних занять, зміст контрольних робіт із зразками розв’язання, тести до кожного із навчальних модулів, завдання для самостійного опрацювання, ІНДЗ та критерії оцінювання знань студентів.

Зміст

Структура програми навчальної дисципліни "Математика" 6

Змістовий модуль І. *Елементи теорії множин.*

Практичні заняття.

Тема 1: «Поняття та їх означення». 18

Тема 2: «Множини та відношення між ними» 21

Тема 3: «Операції над множинами» 26

Тема 4: «Декартів добуток множин» 30

Тема 5: «Рівність множин. Розбиття множин на класи» 32

Контрольна робота № 1. 35

Тести. *Елементи теорії множин*. (Модуль 1) 48

Змістовий модуль ІІ. *Відношення.*

Практичні заняття.

Тема 1: «Відношення між елементами двох множин» 61

Тема 2: «Відношення на множині та його властивості. 64

Тема 3: «Функції і відображення. Рівнопотужні множини» 67

Тема 4: «Комбінаторні задачі. Алгоритми» 69

Контрольна робота № 2. 71

Тести. *Відношення.* (Модуль 2) 81

Змістовий модуль ІІІ. *Елементи математичної логіки.*

Практичні заняття.

Тема 1: «Висловлення і операції над ними. Поняття «формули логіки висловлень» 93

Тема 2: «Рівносильні формули. Логічне слідування на множині формул логіки висловлень» 97

Тема 3: «Предикати і операції логіки висловлень над ними» 99

Тема 4: «Відношення логічного слідування і

рівносильності на множині предикатів» 102
Тема 5: «Міркування і теореми» 109
Контрольна робота №3. 113
Тести. *Елементи математичної логіки*. (Модуль 3) . . . 123

Змістовий модуль IV. *Цілі невід'ємні числа.*
Практичні заняття.
Тема 1: «Теоретико–множинна побудова множини цілих невід'ємних чисел (кількісна теорія)» 133
Тема 2: «Додавання і віднімання цілих невід'ємних чисел» 136
Тема 3: «Множення і ділення цілих невід'ємних чисел» 140
Тема 4: «Аксіоматичний підхід до побудови множини цілих невід'ємних чисел. Аксіоми Пеано» . . . 143
Тема 5: «Властивості множини цілих невід'ємних чисел. Ділення з остачею. Метод математичної індукції» 145
Тема 6: «Відрізки і операції над ними. Натуральне число як міра відрізка» 147
Контрольна робота №4. 148
Тести. *Множина цілих невід'ємних чисел. (*Модуль 4*)*. . 155

Змістовий модуль V. *(Системи числення і подільність)*
Практичні заняття
Тема 1: «Десяткова система числення та виконання арифметичних операцій у ній» » 172
Тема 2: «Недесяткові позиційні системи числення. Додавання і віднімання чисел у них» » 176
Тема 3: «Множення і ділення у недесятковій позиційній системі числення. Перехід від запису числа в одній позиційній системі числення до запису в іншій» » 177
Екзаменаційні питання 180
Основні математичні терміни 185

Передмова

Посібник написаний згідно вимог кредитно-модульної системи оцінювання знань студентів.

Перша части посібника містить навчальну програму з математики з чотирьох навчальних модулів, структуру залікового кредиту, список рекомендованої літератури, завдання для самостійного опрацювання, ІНДЗ та критерії оцінювання знань студентів.

Варто відзначити, що посібник містить орієнтовані плани практичних занять до кожної теми із змістом завдань, які доцільними є для застосування теоретичного матеріалу, що читається під час лекцій згідно навчальної програми. Це дає змогу студенту зекономити час. В кінці кожного змістового модуля розміщено зміст контрольних завдань у десяти варіантах і зразки їх розв’язання. Тому студент має змогу на високому рівні підготуватися до написання контрольної роботи. Далі студент знайде тестові завдання, які зорієнтовані на перевірку засвоєння основного програмового матеріалу з математики.

Посібник не є догмою і викладач може вносити необхідні на його погляд зміни та творчо використовувати його матеріал.

СТРУКТУРА ПРОГРАМИ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
МАТЕМАТИКА

1.Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів 60</td><td>Галузь знань
_0101 Педагогічна освіта
(шифр і назва)</td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td>Напрям підготовки
6.010102 Початкова освіта_
(шифр і назва)</td></tr>
<tr><td>Модулів - 2</td><td rowspan="5">Спеціальність (професійне спрямування):
вчитель початкових класів_</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів - 3</td><td>1–2 -й</td><td>1–2 -й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання _____</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин - 120</td><td>1–3 -й</td><td>1–3 -й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних –
самостійної роботи студента -</td><td rowspan="10">Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр</td><td>16 год.</td><td>18 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>16 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>94 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>52 год.</td><td>106 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання:</td></tr>
<tr><td>32 год.</td><td>40 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: екзамен</td></tr>
</table>

2.**Мета та завдання навчальної дисципліни**

Мета: курс математики на факультеті підготовки вчителів початкових класів повинен дати студентам – майбутнім учителям початкових класів – математичну підготовку, необхідну для навчання учнів початкових класів математиці відповідно до введених в даний час шкільних програм і в разі впровадження в початкову школу нових питань математики; для розв’язання нестандартних завдань, які орієнтовані на учасників шкільних та всеукраїнських олімпіад; орієнтації у змісті викладання математики в

середній школі; подальшої самостійної роботи з поглиблення і розширення фахової підготовки.

Завдання :

1. Навчити майбутнього вчителя початкових класів:
   - Теоретично обгрунтувати математичні поняття початкового курсу математики;
   - пов'язувати зміст початкового курсу «Математика», який вивчається на факультеті початкової освіти;
   - самостійно творчо працювати з науковою та методичною літературою.
2. Отримати глибокі знання з теорії множин, математичної логіки, теорії функцій, дійсних чисел та величин.
3. сприяти цілісному формуванню математичної культури майбутнього вчителя початкових класів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: елементи теорії множин; елементи математичної логіки; кортежі, комбінаторику; відповідності, відношення, відображення; теоретико-множинну і аксіоматичну побудову теорії цілих невід'ємних чисел та натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків; різні системи числення; подільність цілих невід'ємних чисел; розширення поняття числа; числові і буквені вирази, рівняння і нерівності; елементи геометрії; величини і їх вимірювання;

вміти: теоретично обґрунтовувати математичні поняття початкового курсу математики; пов'язувати зміст початкового курсу математики зі змістом курсу «Математика», який вивчається на факультеті початкової освіти; самостійно творчо працювати з науковою та методичною літературою (добір цікавих, логічних, стародавніх задач та творчих завдань відповідно до шкільної програми з математики 1 − 4 класів).

3.Програма навчальної дисципліни

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИКИ

Тема 1. Множини та операції над ними

Множини та відношення між ними.

Поняття множини. Способи задання множин. Точкові множини. Круги Ейлера. Рівність множин. Підмножина множини. Відношення між двома непорожнімимножинами.

Операції над множинами.

Поняття про операції. Операції перерізу, об'єднання, доповнення підмножини до множини і доповнення. Закони операції над множинами. Число елементів у об'єднанні кількох скінченних множин. Поняття про розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються (розбиття множини на класи). Розбиття множини на класи за допомогою однієї, двох і трьох властивостей її елементів. Картеж та його основні характеристики. Впорядкована пара. Декартів добуток множин. Закони декартового множення множин. Число елементів в декартовому добутку кількох скінченних множин.

Тема 2 . Відношення

Відношення між елементами двох множин.

Відношення між елементами двох множин та його основні характеристики. Відношення протилежне і обернене даному. Граф відношення. Точковий графік відношення між елементами двох числових множин. Способи задання відношень.

Відношення на множині.

Відношення на множині та його основні характеристики. Особливості графа відношення на множині. Способи задання відношень на множині. Основні властивості відношень на множині. Відношення еквівалентності. Відношення порядку та його види.

Функції і відображення.

Поняття функції та її основні характеристики. Способи задання функцій. Відображення і їх види. Рівнопотужні множини. Потужність множини. Теорема про об'єднання рівнопотужних множин.

Комбінаторні задачі.

Поняття про комбінаторну задачу і основні правила комбінаторики. Число всіх підмножин скінченної множини. Розміщення.

Тема 3. Елементи математичної логіки

Логіка висловлень. Поняття. Види понять. Означення понять.

Поняття про твердження. Математичні твердження та їх види. Висловлення, логічне значення висловлення. Логічні сталі. Прості і складені висловлення. Пропозиційні змінні. Операції заперечення, кон'юнкції, дез'юнкції імплікація та еквіваленції над висловленнями. Формули логіки висловлень. Тотожно істинні і тотожно хибні формули.

Рівносильні формули. Властивості операцій логіки висловлень. Відношення логічного слідування на множині висловлень.

Предикати.

Поняття про змінну в математиці. Предикат (висловлювальна форма) та його основні характеристики. Тотожно істинні, тотожно хибні і рівносильні предикати. Операції логіки висловлень над предикатами. Області істинності результатів цих операцій. Кванторні операції над предикатами. Правила побудови заперечення тверджень, що містять квантори. Відношення логічного слідування на множині предикатів. Необхідні і достатні умови.

Міркування та теореми.

Поняття про міркування. Правильні і неправильні міркування. Перевірка правильності міркувань за допомогою кругів Ейлера або наведення контрприкладу. Теореми і їх будова. Твердження, що пов'язані з даною теоремою, яка записана в імплікативній формі.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

Тема 1. Різні підходи до побудови множинних цілих невід'ємних чисел.

Теоретико-множинна побудова множини цілих невід'ємних чисел (кількісна теорія.)

Короткі історичні відомості про виникнення натурального числа і нуля. Різні підходи до побудови множини цілих невід'ємних чисел. Скінченні множини. Натуральні цілі невід'ємні числа. Упорядкованість множини цілих невід'ємних чисел.

Арифметичні операції над цілими невід'ємними числами.

Означення суми цілих невід'ємних чисел та її існування і єдиність. Операція додавання цілих невід'ємних чисел та її властивості. Означення різниці цілих невід'ємних та її існування і єдиність. Операція віднімання цілих невід'ємних чисел. Зв'язок віднімання з додаванням. Правила віднімання числа від суми і суми від числа. Означення добутку цілих невід'ємних чисел та його існування і єдиність. Операція множення цілих невід'ємних чисел та її властивості. Означення частки цілого невід'ємного числа і натурального числа. Існування і єдиність частки. Операція ділення цілих невід'ємних чисел. Зв'язок ділення з множенням. Основна властивість частки. Правила ділення суми, різниці і добутку на натуральне число.

Аксіоматична побудова множини цілих невід'ємних чисел.

Поняття про аксіоматичний метод побудови теорії. Аксіоматична побудова множини цілих невід'ємних чисел. Аксіоми Пеано та деякі наслідки з них. Аксіоматичне означення арифмитичних операцій над цілими невід'ємними числами та їх властивості. Ділення з остачею. Теорема про ділення з остачею. Опреація ділення з остачею. Принцип і метод математичної індукції. Упорядкованість множини цілих невід'ємних чисел. Дискретність і нескінченність множини цілих невід'ємних чисел. Принципи найменшого і найбільшого числа. Відрізок натурального ряду чисел.

Натуральне число як результат вимірювання величин.

Відрізки та їх відношення між ними. Операції над відрізками. Поняття про вимірювання відрізка. Натуральне число як міра відрізка. Додавання і віднімання натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків. Множення і ділення натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків.

Тема 2. Системи числення.

Поняття про системи числення. Число і цифра. Непозиційні і позиційні системи числення. Десяткова система числення, запис, читання і порівняння цілих невід'ємних чисел в ній. Алгоритм додавання, віднімання, множення і ділення чисел в десятковій системі числення. Недесяткові позиційні системи числення: запис, читання і порівняння чисел в них. Алгоритми додавання і віднімання, множення і ділення чисел в недесяткових позиційних системах числення. Таблиці додавання і множення. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі до запису в іншій.

Тема 3. Відношення подільності.

Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел та його властивості. Подільність суми, різниці і добутку. Поняття про ознаку подільності. Ознака подільності Паскаля. Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25 в десятковій системі числення.

Спільні кратні і дільники.

Спільні кратні та найменше спільне кратне кількох натуральних чисел і

його властивості. Спільні дільники та найбільший спільний дільник кількох натуральних чисел і його властивості. Взаємно прості та попарно взаємнопрості числа. Властивості найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника двох чисел. Теореми про подільність, що пов'язані із взаємно простими числами. Ознака подільності на числа, що є добутком двох взаємно простих чисел. Алгоритм Евкліда.

Прості і складені числа.

Розбиття множини цілих невід'ємних чисел на 4 класи за кількістю дільників. Прості і складені числа. Властивості відношення подільності між двома натуральними числами одне з яких просте. Існування простого дільника у кожного натурального числа більшого одиниці. Нескінченність множини простих чисел (теорема Евкліда). Критерій простоти натурального числа. Решето Ератосфена. Основна теорема арифметики. Канонічний розклад натурального числа більшого 1. Загальний вид канонічних розкладів дільників натурального числа. Ознака подільності на складене число. Алгоритми знаходження найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел за їх канонічними розкладами.

Тема 4. Розширення поняття числа.

Задача розширення поняття числа. Додатні раціональні числа. Задача розширення поняття числа. Короткі історичні відомості про виникнення раціональних і дійсних чисел. Сумірні відрізки. Вимірювання відрізків сумірних із одиничним відрізком. Поняття дробу. Відношення рівності дробів та його властивості. Основна властивість дробу. Додатне раціональне число та його запис (зображення). Нескоротний запис додатного раціонального числа. Множина додатних раціональних чисел. Упорядкованість множини додатніх раціональних чисел. Операція додавання і множення додатних раціональних чисел та їх властивості. Операції віднімання і ділення. Десятковий дріб. Алгоритми арифметичних операцій над десятковими дробами. Перетворення звичайних дробів у десяткові. Нескінченні періодичні десяткові дроби. Зображення додатних раціональних чисел нескінченними десятковими дробами.

Дійсні числа.

Несумірні відрізки. Існування несумірних відрізків. Вимірювання відрізка несумірного з одиничним відрізком. Нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Множина додатних дійсних чисел. Від'ємні дійсні числа. Число «нуль». Множина дійсних чисел. Взаємнооднозначна відповідність між множиною дійсних чисел і точок координатної прямої. Протилежні числа. Упорядкованість множини дійсних чисел. Неперервність множини дійсних чисел. Поняття про арифметичні операції над дійсними числами та їх властивості.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН І МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ ДО ОЗНАЧЕННЯ ПОНЯТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Тема 1. Рівняння, нерівності, функції.

Вирази. Відношення рівності і нерівності на множині виразів.

Числовий вираз і його значення. Числові рівності і їх властивості. Числові нерівності та їх властивості. Вирази із змінними та їх основні характеристики. Відношення тотожності на множині виразів. Тотожні перетворення на множині виразів. Тотожності.

Рівняння нерівності з однією змінною.

Рівняння з однією змінною та його основні характеристики. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною та їх розв'язування. Нерівність з однією змінною як предикат та їх основні характеристики. Рівносильні нерівності. Лінійні нерівності з однією змінною та їх розв'язування. Системи і сукупності рівнянь і нерівностей з однією змінною та їх розв'язування.

Рівняння і нерівності з двома змінними.

Рівняння з двома змінними і його основні характеристики. Графік рівняння. Системи і сукупності рівнянь з двома змінними та способи їх розв'язування. Нерівність з двома змінними і її основні характеристики. Графічне розв'язування нерівностей з двома змінними. Системи та сукупності нерівностей з двома змінними та їх графічне розв'язування.

Числові функції.

Числові функції та їх основні характеристики. Функції оберненої і прямої пропорційності. Лінійна функція. Графіки числових функцій та їх перетворення. Функції прямопропорційної і оберненопропорційної залежності, їх властивості і графіки

Тема 2. Елементи геометрії. Величини.

Основні поняття геометрії.

Короткі історичні відомості про виникнення геометрії. Система геометричних понять шкільного курсу геометрії. Поняття про геометричну фігуру. Ламана та її основні характеристики. Плоскі геометричні фігури (ламана, многокутник, коло, круг). Побудова плоских геометричних фігур за допомогою циркуля і лінійки. Задачі на побудову.

Просторові геометричні фігури.

Просторові геометричні фігури та їх зображення на площині. Поняття про геометричне тіло. Многогранники. Теорема Ейлера про многогранники (без доведення). Тіла обертання.

Тема 3. Поняття про величини та їх вимірювання.

Відображення властивостей дійсного світу через поняття величини. Додатні адитивно- скалярні величини та їх властивості. Поняття про вимірювання величин. Види величин. Довжина відрізка, її основні властивості. Одиниці довжини та відношення між ними. Площа фігури, її основні властивості. Одиниці площі та відношення між ними. Способи вимірювання площ. Рівновеликі і рівноскладені фігури. Поняття про об'єм тіла. Одиниці об'єму та відношення між ними. Поняття про масу. Одиниці маси та відношення між ними. Поняття про час і проміжки часу. Одиниці часу і відношення між ними. Шлях і швидкість, одиниці їх вимірювання і

відношення між ними. Залежність між швидкістю, часом і шляхом при рівномірному прямолінійному русі. Товар, його кількість, вартість і ціна, залежність між ними та одиниці їх вимірювання

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Модуль 1												
Змістовий модуль 1. Загальні поняття математики												
Тема1.Множини та операції над ними	24	2		12	10		11	3	2		6	
Тема2.Відношення	15	2		10		3	17	3	2		6	6
Тема 3.Елементи математичної логіки	19	4		12		3	20	2	4		8	6
Разом за змістовим модулем 1	58	8		34	10	6	48	8	8		20	12
Змістовий модуль 2. Числові системи												
Тема 1. Різні підходи до побудови множинних цілих невід'ємних чисел	36	4		16	8	8	28	2	2		6	18
Тема 2. Системи числення	10	2		6		2	12	2	2		4	4
Тема 3. подільність множини цілих невід'ємних чисел	12			8		4	20	2			4	14
Разом за 2-й семестр	58	6		30	8	14	58	6	4		12	36
Тема 4. Розширення поняття про число.	20			12		8	24	2	2		6	14
Разом за змістовим модулем 2	**78**	**6**		**42**	**8**	**22**	**84**	**8**	**6**		**20**	**50**

Змістовий модуль 3. Застосування теорії множин і математичної логіки до означення понять шкільного курсу математики												
Тема1.Рівняння, нерівності,функції.	22	2		12		8	18					18
Тема 2. Елементи геометрії	12			4		8	14					14
Тема 3. Величини та їх вимірювання	10			2		8	14	2	2			12
Разом за змістовим модулем 3	**44**	**2**		**18**		**24**	**48**	**2**	**2**			**44**
Усього годин	**180**	**16**		**94**	**18**	**52**	**180**	**18**	**16**		**40**	**106**

5. Теми лабораторних занять (стаціонар)

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
З.М. 1. **Тема** 1. Множини та операції над ними		
1.	Поняття та їх означення	2
2.	Множини та відношення між ними	2
3.	Операції над множинами	2
4.	Декартів добуток множин. Розбиття множин на класи	2
5.	Рівність множин	2
6.	Контрольна робота № 1	2
З.М. 1. **Тема** 2. Відношення		
1.	Відношення між елементами двох множин.	2
2.	Відношення на множині та його властивості	2
3.	Функції і відображення	2
4.	Комбінаторні задачі. Алгоритми	2
5.	Контрольна робота №2	2
З.М. 1. **Тема** 3. Елементи математичної логіки		
1.	Висловлення і операції над ними. Поняття «формули логіки висловлень»	2
2.	Відношення логічного слідування на множині формул логіки висловлення. Тотожно істинні та рівносильні формули логіки висловлень	2
3.	Предикати і операції логіки висловлень над ними	2
4.	Відношення логічного слідування і рівносильності на множині предикатів. Необхідні і достатні умови.	2
5.	Міркування і теореми	2
6.	Контрольна робота № 3	2
З.М. 2. **Тема** 1. Теоретико-множинний підхід до побудови		

множини цілих чисел		
1.	Теоретико-множинна побудова множини цілих невід'ємних чисел (кількісна теорія)	2
2.	Додавання і віднімання цілих невід'ємних чисел	2
3.	Множення і ділення цілих невід'ємних чисел	2
З.М. 2. **Тема** 2. Аксіоматична побудова множини цілих невід'ємних чисел		
1.	Аксіоматичний підхід до побудови множини цілих невід'ємних чисел. Аксіоми Пеано	2
2.	Властивості множини цілих невід'ємних чисел. Ділення з остачею	2
3.	Принцип та метод математичної індукції	2
З.М. 2. **Тема** 3. Натуральне число як результат вимірювання величини		
1.	Відрізки і операції над ними. Натуральне число як міра відрізка	2
2.	Контрольна робота № 4	2
З.М. 2. **Тема** 4. Системи числення		
1.	Десяткова система числення та виконання арифметичних операцій в ній	2
2.	Недесяткова позиційна система числення. Додавання і віднімання чисел в них	2
3.	Множення і ділення у недесятковій позиційній системі числення. Перехід від запису числа в одній позиційній системі числення до іншої	2
З. М.2. **Т.** 5. Подільність множини цілих невід'ємних чисел		
1.	Відношення подільності і ознаки подільності	2
2.	Спільні кратні і дільники	2
3.	Прості і складені числа Контрольна робота по темі «Системи числення і подільність»	2 2
З.М.2. **Т**. 6. Розширення поняття про число		
1.	Властивості множини додатних раціональних чисел. Арифметичні операції над додатними раціональними числами	4
2.	Десяткові дроби і відсотки	2
3.	Розв'язування арифметичних задач на дроби і відсотки	4
4.	Контрольна робота	2
З.М. 3. **Т.**1. Рівняння і нерівності		
1.	Числові вирази. Розв'язування задач на складання виразів.	2
2.	Рівняння з однією змінною та їх властивості.	2
3.	Розв'язування задач за допомогою рівнянь	2
4.	Розв'язування нерівностей з однією змінною та їх систем	2

	і сукупностей	
5.	Розв’язування різними способами систем і сукупностей рівнянь з двома змінними	2
6.	Графічне розв’язування нерівностей з двома змінними, їх систем і сукупностей	2
7.	Числові функції шкільного курсу математики	2
8.	Контрольна робота	2
З.М. 3. **Т**.2. Елементи геометрії. Величини		
1.	Розвязування задач на побудову	2
2.	Розвязування задач із обгрунтуванням вибору операції над величинами	2
3.	Контрольна робота	2

6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Функції і відображення та його види.	1
2.	Комбінаторні задачі. Правило суми і добутку.	1
3.	Алгоритми та їх властивості.	1
4.	Предикати області істинності та хибності предикатів. Операції над предикатами та знаходження областей істинності їх результатів. Тотожно істинні та тотожно хибні предикати.	2
5.	Скінченні множини та їх властивості.	2
6.	Закони арифметичних операцій на множині цілих невід’ємних чисел у кількісній теорії.	1
7.	Арифметичні операції та їх властивості над цілими невід’ємними числами в аксіоматичній теорії.	1
8.	Принцип і метод математичної індукції.	2
9.	Відрізки. Операції над відрізками та їх властивості. Порівняння відрізків.	2
10.	Десяткова система числення та арифметичні операції в ній.	1
11.	Відношення подільності і ознаки подільності	1
12.	Спільні кратні і дільники	1
13.	Прості і складені числа	2
14.	Властивості множини додатних раціональних чисел. Арифметичні операції над додатними раціональними числами	2
15.	Десяткові дроби і відсотки	2
16.	Додатні дійсні числа. Дійсні числа	2
17.	Наближені обчислення	1
18.	Рівняння, їх системи і сукупностіз однією та двома змінними	2

19.	Нерівності із змінними, їх сукупності і системи	3
20.	Числові функції	2
21.	Короткі історичні відомості про виникнення геометрії	2
22.	Плоскі геометричні фігури	4
23.	Просторові геометричні фігури	4
24.	Величини, їх вимірювання і види	5
25.	Величини шкільного курсу математики	5

7. Розподіл балів, які отримують студенти

1-й семестр

Модуль 1.			**Модуль 2 (ІНДЗ)**	**Підсумковий контроль**	**Сума**
З.М. 1					
Т. 1	Т. 2	Т.3			
29	25	29	7	10	100

2 –3-й семестри

Модуль 1								**Модуль 2 (ІНДЗ)**	**Підсумковий контроль**	**Сума**
З.М.2						**З.М.3**				
Т.1	Т.2	Т.3	Т.4	Т.5	Т.6	Т.1	Т.2	6	10	100
12/6	12/6	14/7	22/11	22/11	30/15	38/19	18/9			

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	**A**	відмінно	зараховано
82-89	**B**	добре	
75-81	**C**		
68 -74	**D**	задовільно	
60-67	**E**		
35-59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	**F**	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

8. Рекомендована література

Базова

1. Боровик Н. В.,. Зайченко І.В, Рудник А.В.. Математика. Практикум Ч.1 – Ч2: Навчальний посібник. – Чернігів, 2003 – 2004рр..
2. Математика: посібник для студентів пед. факультетів/ О.М. Зуб, Г.І. Коберник, А.Д. Нещадим. – К.: Наук.світ, 2000. – 417с.

Допоміжна

1. Боровик Н. В.,. Зайченко І.В, Рудник А.В.. Математика. Практикум у 7-ми ч.: Навчальний посібник. – Чернігів, 2003 – 2004.
2. Ковальчук В. Баб’як-Білецька Л., Сил юта Л., Стасів Н. Математика у 8-ми модулях.: Навчальний посібник для педагогічних вузів спец. “Початкове навчання”. – Дрогобич, 2001 – 2003.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ І
(Елементи теорії множин)

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1: «Поняття та їх означення»

І. Організаційні питання

ІІ. Теоретичні питання

1. Поняття про твердження?
2. Види математичних тверджень. Відмінність між ознакою і властивістю об’єкта.
3. Поняття. Обсяг і зміст поняття. Геометричне зображення обсягу поняття.
4. Поділ понять за їх змістом. Приклади.
5. Поділ понять за їх обсягом.
6. Відношення між сумісними поняттями. Приклади.
7. Суть означення понять.
8. Означення понять через найближчий рід і видову ознаку. Приклади.
9. Інші види означень понять.
10. Неозначувані (первісні) і означувані поняття. Причина існування неозначуваних понять. Навести приклади неозначуваних понять.
11. Вимоги до означення понять. Помилки в означенях понять.
12. Що розуміють під контрприкладом?

ІІІ. Задачі для розв’язування

1. Навести приклади геометричних понять, які виражаються одним, двома, трьома і чотирма словами.
2. Назвати не менше 10 ознак квадрата.
3. Вказати декілька ознак, які входять в зміст понять:
   1) прямокутник;
   2) ромб;
   3) бісектриса кута;
   4) трикутник.

4. Назвати ознаки:
   а) які мають прямокутник і ромб;
   б) які має прямокутник і не має ромб;
   в) які має ромб і не має прямокутник.
5. Вказати не менше 5 понять, які є родовими до поняття „квадрат”. Яке з них є найближчим до поняття „квадрат”? Чи єдине воно?
   Зобразити відношення між обсягами цих понять за допомогою кругів Ейлера.
6. Вказати, у якому із випадків має місце твердження „поняття *B* є узагальненням поняття *A*”, якщо:
   1) *A* – „відрізок”, *B* – „пряма”;
   2) *A* – „промінь”, *B* – „пряма”;
   3) *A* – „птах”, *B* – „тварина”;
   4) *A* – „коло”, *B* – „круг”.
7. Чи можна ототожнити поняття:
   1) коло і круг;
   2) число і цифра;
   3) пряма і відрізок;
   4) коло і межа круга.
8. Які з тверджень істинні:
   1) кожна властивість прямокутника є властивістю квадрата;
   2) кожна властивість квадрата є властивістю прямокутника?
   У якому відношенні знаходяться зміст та обсяг понять „квадрат” і „прямокутник”?
9. Чи можна за допомогою ознак виділити множину квадратів із множини:
   1) ромбів;
   2) паралелограмів;
   3) чотирикутників?
   Якщо ні, то вказати ознаку за допомогою якої це можна зробити.

10. Зобразити за допомогою кругів Ейлера відношення за обсягом між поняттями:
   1) А – „прямі, які лежать в одній площині”;
   2) В – „паралельні прямі”;
   3) С – „мимобіжні прямі”;
   4) D – „прямі, які перетинаються”.

   В яких відношеннях попарно перебувають ці поняття?

11. Вказати і виправити помилки в наступних означеннях:
   1) діаметром кола називається найбільша хорда, яка проходить через його центр;
   2) площина і пряма, яка не лежить в цій площині називаються паралельними, якщо вони не перетинаються, скільки б їх не продовжували;
   3) два рівних кути називаються вертикальними, якщо сторони одного з них є продовженням сторін другого;
   4) дві прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються;
   5) паралелограм, у якого всі кути прямі називається прямокутником;
   6) рівними називаються трикутники, які рівні між собою;
   7) лінія, всі точки якої рівновіддалені від заданої точки називається колом.

IV. Завдання для самостійної роботи

Теоретичні питання. Множини та відношення між ними.

Практичні завдання.

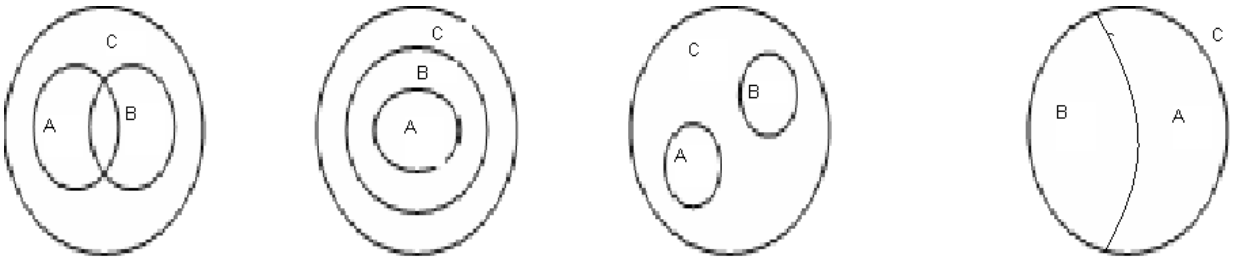
№321. [8, с. 62]. Зобразити відношення між обсягами наступних понять на кругах Ейлера:

а) *A*: „ціле число”; *B:* „натуральне число”; *C:* „від’ємне число”;

б) *A*: „дерево”; *B*: „рослина”; *C*: „кущ”:

в) *A*: „квадрат”; *B*: „ромб з прямим кутом”.

№322. [8, с. 62]. Навести приклади понять, відношення між обсягами яких можуть бути зображенні з допомогою кругів Ейлера, зображенних на малюнку.



а) *б)* *в)* *г)*

Для кожного із наступних понять вкажіть видове поняття: а) „тварина”; б) “рослина”; в) “багатокутник”; г) “дерево”; д) “частина мови”; е) “паралелограм”.

№331. [8, с. 64]. Дати означення поняття “квадрат”, вказавши наступне родове поняття:

а) “прямокутник”, б) “ромб”.

№335. [8, с. 65]. Перерахувати 5 властивостей квадрата.

№339. [8, с. 65]. Чи може одне і те ж поняття бути родовим по відношенню до деякого поняття *А* і видовим по відношенню до поняття *В*?

№340. [8, с. 65]. Чи можна виділити підмножину прямокутних трикутників із множини трикутників з допомогою властивості „мати прямий кут”?

№341. [8, с. 65]. Чи можна виділити підмножину гострокутних трикутників із множини трикутників з допомогою властивості „мати гострий кут”?

№343. [8, с. 66]. Вказати помилки в наступних означеннях:

а) прямокутник – це коли всі кути прямі;

б) відрізок – це пряма, обмежена з двох сторін;

в) промінь – це пряма, обмежена з однієї сторони;

г) просте число – це коли воно має тільки два натуральних дільники.

Тема 2: «Множини та відношення між ними»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Поняття про множину. Елементи множини. Запис множин та їх елементів. Скінченні і нескінченні множини. Приклади множин. Основні числові множини.
2. Геометрична фігура, як множина точок. Круги Ейлера.
3. Способи задання множин. Порожня і одинична множини.
4. Рівність множин.
5. Означення підмножини множини. Відношення включення множин та його властивості.
6. Види підмножин множини.
7. В яких відношеннях можуть знаходитись дві множини?
8. Множина всіх підмножин множини. Скільки підмножин у 5-елементної множини?
9. Універсальна множина та її зображення.

III. Задачі для розв'язування

1. Які назви використовують для означення:
   1) множини тварин;
   2) множини військовослужбовців?

Як називають множину всіх:

а) артистів, що працюють в одному театрі;

б) точок земної поверхні рівновіддалених від одного з полюсів;

в) точок земної поверхні рівновіддалених від обох полюсів?

2. Серед заданих множин вказати рівні:

   A = {1, 3, 6}; B = {3, 6, 9}; C = {9, 6, 3};
   Д = {3, 2, 6}; E = {2, 3, 6}; F = {3, 6, 9};
   K = {3, 6, 2}.

3. Серед даних множин вказати порожні:

   A – множина прямокутників з нерівними протилежними сторонами;

   B – множина прямокутників з нерівними діагоналями;

   C – множина трикутників, медіани яких перетинаються в різних точках;

Д – множина цілих коренів рівняння $2x^2 + 5x - 12 = 0$.

4. а) Задати переліком елементів множину натуральних чисел – дільників числа 36;

   б) чи можна задати переліком елементів множину натуральних чисел, які кратні 36?

   в) задайте дві попередні множини за допомогою характеристичних властивостей їх елементів.

5. Серед даних множин вказати скінченні і нескінченні.

   1) множина простих чисел;
   2) множина парних чисел;
   3) множина студентів університету;
   4) множина розв'язків нерівності $x^2 - 9x + 20 < 0$;
   5) множина теорем, доведених у підручнику з геометрії для 7 – 11 кл.;
   6) множина цілих дільників числа 144;
   7) множина точок прямої;
   8) множина цілих чисел, які діляться на 3;
   9) множина коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

6. Нехай M = {{3}}. Який із записів правильний:

   $\{3\} \in M$; $\{3\} \subset M$?

7. Назвати власні підмножини множини:

   1) паралелограмів;
   2) трикутників;
   3) натуральних чисел.

8. Відомо, що $A \subset B$ і $a \in A$. Які з тверджень істинні:

   1) $a \in B$; 2) $a \notin B$?

9. Відомо, що $A \subset B$ і $в \in B$. Що можна сказати про істинність тверджень:

   1) $в \in A$; 2) $в \notin A$?

10. №7. [8, с. 7].Задати числову множину описом характеристичної властивості елементів:

   а) $]3; 8[$; б) $]-\infty; 7]$;
   в) $]-\infty; -3]$; г) $[-5{,}2; 0]$;
   д) $[-8; +\infty[$; е) $]2{,}7; +\infty[$;

ж) [0; 7,8[; з)] – 4; 8].

11. №9[8, с. 7].Прочитати наступні висловлення і вкажіть серед них істинні:

а) $3 \in]3; 12]$; *б*) $-0,2 \in [-0,3; 0]$; *в*) $0 \in]-\infty; 0]$;
г) $5 \in]6; +\infty[$; *д*) $75 \in Q$; *е*) $6,4 \in Z$;
ж) $-7 \in N$; *з*) $0,3 \in Z$.

12. № 14 [8, с. 9]. Встановити у якому відношенні знаходяться множини А і В, якщо А = {*a*, *b*, *c*, *d*}, а множина В така:

а) В = {*k*, *l*, *m*}; б) В = {*b*, *c*, *e*, *f*, *k*}; в) В = {*d*, *f*, *c*, *b*, *a*};
г) В = {*b*, *d*}.

13. № 15[8, с. 9]. В якому випадку множини С і D перетинаються:

а) С – множина парних одноцифрових чисел,
D – множина непарних одноцифрових чисел;
б) С – множина парних одноцифрових чисел,
D – множина чисел, кратних 3;
в) С – множина прямокутних трикутників,
D – множина рівнобедрених трикутників;
г) С – множина прямокутників з рівними сторонами,
D – множина квадратів?

14. № 16[8, с. 10]. Зобразити за допомогою кругів Ейлера множини Р і Q, якщо Р – множина рівнобедрених трикутників, а Q є множиною:
а) гострокутних трикутників;
б) прямокутних трикутників;
в) рівносторонніх трикутників.

15. № 17[8, с. 10]. Дано множину С = {213, 45, 324, 732, 136}. Записати підмножину множини С, що складається із чисел, які:
а) діляться на 3;
б) діляться на 9;
в) не діляться на 4;
г) діляться на 5.

16. № 18 [8, с. 10]. A – множина прямокутників, D – множина квадратів. Довести, що множина D є підмножиною множини A та зобразіть дані множини за допомогою кругів Ейлера.
17. № 19 [8, с. 10]. A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, C – множина квадратів. Довести, що $A \subset B$ і $B \subset C$. Зобразити дані множини за допомогою кругів Ейлера.
18. № 20 [8, с. 10]. Показати, використовуючи круги Ейлера, що якщо $B \subset A$ і $C \subset B$, то $A \subset C$.

IV. Завдання для самостійного опрацювання:

Теоретичні питання. Операції над множинами та їх властивості.

Практичні завдання.

№ 21[8, с. 10]. Дано множину $M = \{k, l, m\}$. Записати всі її: а) одноелементні підмножини; б) двохелементні підмножини; в) трьохелементні підмножини. Приєднайте до отриманих підмножин порожню множину. Скільки всього підмножин отримали?

№ 22[8, с. 10]. Записати всі підмножини множини $K = \{p, r, s, t\}$. Скільки їх вийшло?

№ 23[8, с. 10]. Скільки елементів у множині, яка має 32 підмножини? 128 підмножин?

№ 24[8, с. 10]. Чи існує така множина, яка: а) має всього 80 підмножин? б) не має жодної підмножини?

№ 25[8, с. 10]. Відомо, що N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел. Довести, що висловлення $Z \subset N$ хибне.

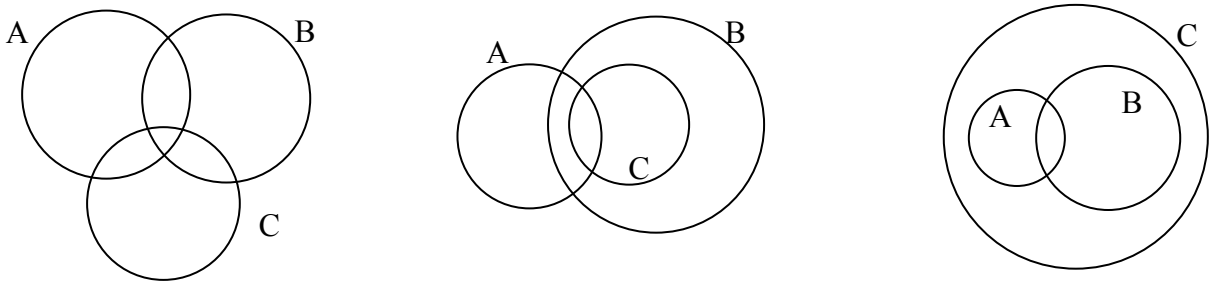
№ 26[8, с. 10]. Зобразити за допомогою кругів Ейлера, що $N \subset Z$ і $Z \subset Q$. Чи правильно, що $Q \subset R$?

№ 27[8, с. 10]. A – множина натуральних чисел, менших 20; B, C, D і E – підмножини множини A, такі, що B складається з чисел, кратних 6, C – із чисел, кратних 2, D – із чисел, кратних 3, E – із чисел, кратних 2 і 3

одночасно. Перерахувати елементи множин B, C, D і E і вказати серед них рівні множини.

№ 28[8, с. 10]. M – множина натуральних розв'язків нерівності $2 \leq x < 7$, K – множина натуральних розв'язків нерівності $1 < x \leq 6$. Які з наступних висловлень істинні: а) $M \subset K$; б) $K \subset M$; в) $M = K$?

№ 30[8, с. 10]. A – множина двоцифрових чисел; B – множина парних натуральних чисел; C – множина натуральних чисел, кратних 4. В якому із випадків, зображених на малюнку, зображені дані множини? Навести приклади множин A, B і C, якщо їх зображення таке як на мал. в)



а) *б*) *в*)

№ 29[8, с. 10]. Довести, що A = B, якщо:

а) A – множина двоцифрових чисел, кратних 9, B – множина двоцифрових чисел, сума цифр яких кратна 9;

б) A – множина натуральних чисел, запис яких закінчується нулем, B – множина натуральних чисел, кратних 10.

Тема 3: «Операції над множинами»

І.Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

ІІ. Теоретичні питання.

1. Що розуміють під операцією над об'єктами, операцією у множині? Навести приклади.

2. Означення об‘єднання двох і більше множин та зображення їх за допомогою кругів Ейлера. Операція об‘єднання множин.
3. Означення перерізу двох і більше множин та зображення їх за допомогою кругів Ейлера. Операція перерізу множин.
4. Різниця 2-х множин та зображення її за допомогою кругів Ейлера. Операція віднімання множин.
5. Доповнення підмножини до множини та зображення її за допомогою кругів Ейлера. Операція доповнення підмножини до множини.
6. Доповнення множини та зображення її за допомогою кругів Ейлера. Операція доповнення множини.

(Відповіді на питання 2 – 4 супроводжувати виконанням операцій над множинами:

$A = \{ -4, -2, -1, 0, 3, 5, 7, 9 \}$,

$B = \{ -3, -2, -1, 3, 6, 8, 9 \}$).

7. Число елементів в об‘єднані 2-х множин.
8. Число елементів в об‘єднані 2-х множин, що не перетинаються.
9. Закони операцій над множинами.
10. Поняття про числову множину. Основні числові множини.
11. Основні підмножини множини дійсних чисел.

III. Задачі для розв’язування.

1. Визначити в якому значенні вживається сполучник „або” в наведених нижче твердженнях („нероздільному” – хоча б одне з двох; „роздільному” – тільки одне з двох; „те ж саме, що й”):
   1) фігура є квадратом або правильним чотирикутником;
   2) засідання старостату факультету відбудеться 20 або 21 вересня;
   3) два кути з відповідно паралельними сторонами рівні або сума їх дорівнює 180°;

4) за походженням він обов‘язково робітник або колгоспник;

5) чотирикутник є ромбом або квадратом.

2. Нехай $x \in A \cap B$. Які з наступних тверджень істинні:

1) $x \in A$ і $x \notin B$; 3) $x \in A$; 5) $x \in A$ і $x \in B$.

2) $x \notin A$ і $x \in B$; 4) $x \in B$?

3. M – множина учнів класу, X – множина хлопців класу, S – множина спортсменів класу, B – множина відмінників класу. $X \cap S \cap B \neq \varnothing$. Зобразити M, X, S, B за допомогою кругів Ейлера. Відзначити штриховими лініями множини: $У = B \cup (X \cap S)$ та $Z = X \cap (S \setminus B)$ і задати їх за допомогою характеристичних властивостей елементів. Які з тверджень істинні:

а) $y \in У$, якщо y – учень даного класу, який є хлопцем і спортсменом, але не навчається на „відмінно”;

б) z $\in Z$, якщо Z – учень даного класу, який не є хлопцем, але займається спортом?

4. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, виконати вказані операції над множинами:

1) $(A \cap B) \setminus (C \cup Д)$, а) $A =]-3; 7]$, $B =]\infty; 10[$,

2) $(A \cup B) \cap (C \setminus Д)$, $C =]-1; 4[$, $Д = [1; 5[$;

3)$(A \setminus B) \cup (C \cap Д)$; б) $A =]-\infty; 6[$, $B = [2; \infty[$,

$C =]3; 5[$, $Д = [4; 8[$.

5. Користуючись операціями над множинами, виразити множину розв’язків рівняння

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) = 0$$

через множини A, B, C відповідно розв’язків рівняння

$$f_1(x) = 0, \quad \cdot f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0.$$

6. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, якщо:

1) $A = \{x \in R \setminus (x + 1)(x - 1)(x - 5) = 0\}$,

$B = \{x \in R \setminus -1 \le x < 5\}$;

2) $A = \{x \in R \setminus (x + 4)(x - 1)(x - 4) = 0\}$,

$B = \{x \in R \setminus -2 < x < 6\}$;

3) $A = \{x \in R \setminus (x + 5)(x + 2)(x - 1) = 0\}$,
$B = \{x \in R \setminus -5 \le x < 0\}$;

4) $A = \{x \in R \setminus (x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0\}$,
$B = \{x \in R \setminus -4 < x \le 1\}$.

7. Позначимо через $\underline{V}$ один із знаків нерівностей $>$, $<$, $\ge$, $\le$. Користуючись означенням операцій над множинами виразити множину розв'язків D системи нерівностей

$$\begin{cases} f_1(x) \ \underline{V} \ q_1(x), \\ f_2(x) \ \underline{V} \ q_2(x) \end{cases}$$

через множини A і B розв'язків відповідних нерівностей $f_1(x) \ \underline{V} \ q_1(x)$ і $f_2(x) \ \underline{V} \ q_2(x)$.

8. Користуючись попередньою задачею, розв'язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - 3 \ge 3x - 1, \\ x^2 - x - 20 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 2x + 9 < 0, \\ 1 - 2x \ge 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \ge 0, \\ 3x + 3 - 5x - 15. \end{cases}$

IV. Завдання для самостійної роботи

Теоретичні питання. Кортеж і декартів добуток множин. Розбиття множин на класи.

Практичні завдання.

1. № 15[4, с. 78]. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, якщо

$A = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$.

2. Знайти:

1) $(A \setminus B) \cap (C \cup Д)$,
2) $(A \cup B) \setminus (C \cap Д)$,
3) $(A \cap B) \cup (C \setminus Д)$, якщо:

а) $A = [-2; 5]$, $B = [3; \infty[$,
$C =]2; 10]$, $Д = [6; 12[$.

б) $A =]-3; 7]$; $B =]-\infty; 3]$;
$C =]3; 5]$; $Д = [4; 9]$.

3. Розв’язати систему нерівностей.

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0, \\ 6x + 1 > 2x + 5. \end{cases}$$

Тема 4: «Декартів добуток множин»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Поняття про кортеж. Основні властивості кортежу.
2. Декартів добуток множин. Операція декартового множення множин. Закони операції декартового множення.
3. Означення декартового добутку більш як двох множин.
4. Число елементів у декартовому добутку кількох множин.
5. Означення декартового *n*-го степеня множини.

ІІІ. Задачі для розв’язування

1. Скільки букв у слові „математика”? Записати множину букв слова „математика”. Записати кортеж букв цього слова.

2. Дано множини A = {1, 2, 3} і B = {*a*, *в*, *c*}. Вказати серед наведених нижче множин ті, які є підмножинами декартового добутку множин A і B:

1) $M_1 = \{(1, a), (2, в), (3, в)\}$;
2) $M_2 = \{(1, a), (1, в), (2, a), (2, в), (в, 2)\}$;
3) $M_3 = \{(2, в), (3, в), (4, a), (3, c)\}$;
4) $M_4 = \{(1, a), (1, в), (1, c), (2, a), (2, в), (2, c), (3, a), (3, в), (3, c)\}$;
5) $M_5 = \{(3, a), (3, в), (3, c), (5, c)\}$;
6) $M_6 = \varnothing$.

Котра з них рівна $A \times B$?

3. Знайти $A \times B$ і $B \times A$ та зобразити їх на координатній площині, якщо:

1) A = {1, 2, 3} і B = {2, 3};
2) A = {1, 2, 3} і B = A;

3) A = {1, 2, 3} і B = ∅;
4) A = {1, 2, 3} і B = R.

4. Зобразити A × B і B × A на координатній площині, якщо:
1) A = R, B =] – 3; 5];
2) A =] – ∞; 5], B = [– 2; 6[;
3) A =] – 4; 7[, B = [– 2; 6].

5. На координатній площині побудовано пряму, яка паралельна осі O*y* і проходить через точку P (– 3; 1). Встановити, зображенням декартового добутку яких 2-х числових множин, є ця пряма?

6. Встановити декартовий добуток, яких двох числових множин, зобразиться на координатній площині півплощиною з межею, що паралельна одній з координатних прямих? Розглянути інші випадки і описати.

7. Побудувати прямокутник з вершинами A (– 3; 5), B (– 3; 8), C (7; 5), D (7; 8). Задати множину точок прямокутника ABCD у вигляді декартового добутку множин X і У.

8. Дівчинка має 5 різних спідничок і 6 різних кофтинок. Скількома різними способами може одягатися дівчинка?

IV. Завдання для самостійної роботи

Теоретичні питання. Рівність множин. Розбиття множин на класи

Практичні завдання.

№ 63[8, с. 20]. Записати всі двоцифрові числа, цифри десятків яких, належать множині A = {4, 5, 6}, а цифри одиниць – множині B = {3, 7}.

№ 65[8, с. 20]. Перерахуйте елементи, які належать множині X × У, якщо:

а) X = {*a*, *b*, *c*}, У = {*k*, *l*}; б) X = {*a*, *b*, *c*}, У = {*d*};
в) X = {*a*, *b*, *c*}, У = X; г) X = {*a*, *b*, *c*}, У = ∅.

№ 66[8, с. 20]. Відомо, що A × B = {(2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6)}. Встановити, з яких елементів складаються множина A і множина B.

№ 68 (г, д, е, ж) [8, с. 21]. Зобразити на координатній площині $A \times B$ і $B \times A$, якщо:

г) $A = [1; 7]$, $B = [2; 6]$;

д) $A = [-3; 2]$, $B = [0; 5[$;

е) $A = R$; $B = [-2; 2]$;

ж) $A =]-3; 2[$, $B = R$.

№ 71[8, с. 21]. Встановити, декартів добуток яких двох множин зображений на координатній площині у вигляді прямих кутів, що утворюються при перетині координатних осей.

№ 72[8, с. 21]. На координатній площині побудувати пряму, паралельну осі *OX*, що проходить через точку Р (–2, 3). Встановіть, декартів добуток яких двох множин зображений на координатній площині у вигляді цієї прямої.

№ 77[8, с. 22]. Записати множину букв слова „паралелограм”. Записати кортеж букв, що входять до цього слова. Яка довжина цього кортежу?

№ 78[8, с. 22]. Скільки цифр у записі числа 178 877? Скільки різних цифр у записі цього числа? Дайте відповіді на дані запитання і переформулюйте їх, використовуючи поняття множини і кортежу.

Задачі для роботи з учнями початкових класів

1. Використовуючи цифри 1, 2, 3, записати всі можливі двоцифрові числа.
2. Як можна, користуючись банками ємкості 3 і 5 л, налити з крана 1 л води?
3. Скількома способами дівчинка може одягнути ляльку, у якої є 4 спіднички і 2 кофтинки? Зробити схематичний рисунок.

Тема 5: «Рівність множин. Розбиття множин на класи»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

II. Теоретичні питання

1. Означення поняття «розбиття множин на класи» та умови розбиття.

2. Розбиття множин на класи за допомогою однієї, двох, *n* властивостей.

3. Означення рівності двох множин. Що показує означення рівності множини? Яка схема доведення рівності множин?

4. Дати означення поняття “розбиття множин на підмножини, які попарно не перетинаються (розбиття множин на класи).”

5. На скільки найбільше класів може бути розбитою множина за допомогою однієї, двох і трьох властивостей?

III. Задачі для розв’язування.

1. Зобразити ліву і праву частини рівності двох множин за допомогою кругів Ейлера і довести її:

а) $(A\backslash B) \cup (A \cap C) = A\backslash (B\backslash C)$;

б) $\overline{A} \cup \overline{B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{C}$;

в) $\overline{A} \cap (B\backslash C) = (\overline{A} \cap B)\backslash C$;

г) $\overline{A}\backslash(B \cup C) = \overline{A \cup B \cup C}$;

д) $(\overline{A}\backslash B)\backslash C = \overline{A \cup B \cup C}$;

е) $\overline{A \cup B} \cap C \neq \overline{A \cup \overline{C}} \cap \overline{B}$;

є) $(A \cup B)\backslash C \neq (A \cup B) \cap \overline{C}$.

2. Чи мають місце рівності для множин:

а) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\backslash C)$;

б) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\backslash B$;

в) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$?

3. Довести правий дистрибутивний закон операції декартового множення відносно об’єднання і лівий – відносно різниці.

4. Із множини X = {a, b, c, d, e, h, k, l} виділено підмножини. Встановити в якому із наступних випадків відбулося розбиття множини X на класи.

1) A = {a, b, c}, B = { h, k}, C = {d, l, e},

2) A = {a}, B = {b, c, d}, C = {k, l},
3) A = {k, h, l}, B = {a, b, c, l}, C = {e, h, d},
4) A = {a, b, c}, B = {d, e, h, k, l}, C = ∅.

5. Із множини всіх трикутників виділено такі підмножини трикутників:
1) рівнобедрені, рівносторонні, прямокутні;
2) гострокутні, тупокутні, прямокутні;
3) рівносторонні, тупокутні, прямокутні.

Встановити в якому із цих випадків відбулося розбиття множини трикутників на класи.

6. У множині M деякого класу виділено підмножини A, B, C, такі що $A \cap B \cap C \neq \varnothing$.

Відомо, що елементи множин A, B і C мають відповідно властивості
B – B(*x*): “учень *x* навчається добре або відмінно”,
A – A(*x*): “учень *x* є активістом”,
C – C(*x*): “учень *x* є спортсменом”.

Зобразити множини M, A, B і C за допомогою кругів Ейлера. Встановити на скільки класів розбивається множина M за допомогою цих властивостей. Вказати характеристичні властивості елементів певного класу.

Розглянути різні випадки.

IV. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні питання. Відношення між елементами двох множин.

Практичні завдання. Підготуватись до контрольної роботи і розв’язати завдання:

1. Зобразити ліву і праву частини рівності двох множин за допомогою кругів Ейлера і довести її:
а) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
б) $(A \cap \overline{C}) \setminus B = A \setminus (B \cup C)$.

2. Чи має місце відношення рівності для множин:
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$?

3. № 59. [8, с.19]. З’ясувати, в яких випадках класифікація виконана правильно:

а) трикутники діляться на прямокутні і рівнобедрені;

б) кути класифікуються на гострі, прямі і розгорнуті;

в) цілі числа можна розбити на натуральні числа, число 0 і від’ємні цілі числа;

г) дієслова української мови діляться на дієслова теперішнього, майбутнього і минулого часу;

д) члени речення бувають головні і другорядні.

4) № 60. [8, с.19]. З множини Т трикутників виділили дві підмножини: Х – підмножина прямокутних трикутників і У – підмножина рівнобедрених трикутників. Зобразити дані множини кругами Ейлера; встановити, на скільки областей, які попарно не перетинаються, розбився круг, що зображає множину Т, і всі множини, які зображені цими областями, задайте описом характеристичних властивостей елементів. За допомогою скількох властивостей проведено розбиття множини трикутників на класи?

5) № 98. [8, с.24]. Із множини N виділили дві підмножини: А – підмножина натуральних чисел, кратних 3, і В – підмножина натуральних чисел, кратних 4. Побудуйте круги Ейлера для множин N, А, В; встановіть, на скільки множин, які попарно не перетинаються, розбилась множина N; вкажіть характеристичні властивості елементів цих множин.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

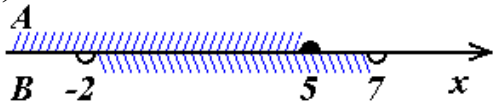
Завдання 1. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти:

1. $(A \cup B) \cap (C \setminus F)$, якщо A = [2; 6 [, B = [4; + ∞ [, C =] – 3; 5], F =]– ∞;– 1[.
2. $(A \cup C) \setminus (B \cap F)$, якщо A = [– 3; 2], B = [3; +∞ [, C =] 0; 5[, F =]– ∞; 6[.

3. $(B \cup F) \cap (C \setminus A)$, якщо $A = [\,4; +\infty\,[$, $B =]-\infty; 1[$, $C =]-4; 5[$, $F = [-2; 3]$.
4. $(A \setminus B) \cap (C \cup F)$, якщо $A =]-\infty; 5]$, $B =]-\infty; -4[$, $C =]-1; 3]$, $F = [0; +\infty\,[$
5. $(A \cap B) \setminus (C \cup F)$, якщо $A =]-\infty; 2[$, $B = [-5; 4[$, $C = [-1; 6]$, $F = [3; +\infty\,[$.
6. $(A \cup B) \cap (C \setminus F)$, якщо $A =]\,3; 6[$, $B =]4; +\infty\,[$, $C = [-1; 7]$, $F =]-\infty; 1[$.
7. $(A \cup B) \setminus (C \cap F)$, якщо $A =]-1; 5]$, $B =]-3; 3[$, $C =]-\infty; 7]$, $F =]1; +\infty\,[$.
8. $(A \cap B) \setminus (C \cup F)$, якщо $A =]-4; 8]$, $B =]0; +\infty\,[$, $C = [-2; 6[$, $F =]-\infty; 2]$.
9. $(A \cup B) \cap (C \setminus F)$, якщо $A = [4; 7]$, $B =]-\infty; 5[$, $C = [0; +\infty\,[$, $F =]-3; 2]$.
10. $(A \setminus B) \cup (C \cap F)$, якщо $A = [-5; +\infty[$, $B =]-\infty; 2[$, $C =]-1; 6[$, $F = [-3; 4]$.

Зразок розв’язування. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти $(A \cap B) \setminus (C \cup F)$, якщо $A =]-\infty; 5]$, $B =]-2; 7[$, $C =]-1; 4]$, $F =]\,0; +\infty[$.

►Зобразимо множини A і B, C і F на координатних прямих (мал. 1 і 2).



Мал. 1



Мал. 2

4

Знайдемо множини $A \cap B$ і $C \cup F$, користуючись означеннями перерізу і об'єднання множин:

$$A \cap B =]-2; 5]; \qquad C \cup F =]-1; +\infty[.$$

Зобразимо одержані множини $A \cap B$ і $C \cup F$ на координатній прямій (мал. 3).



Мал. 3

Користуючись означенням різниці множин, дістанемо шукану множину

$$(A\cap B)\setminus(C\cup F) =]-2;-1].$$

Відповідь: $]-2;-1]$.◄

Завдання 2. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$, якщо:

1. $A = \{x \in R \mid (x-2)(x-3)(x-5) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 1 \le x < 5\}$.
2. $A = \{x \in R \mid (x+5)(x+1)(x-2) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid -3 < x \le 3\}$.
3. $A = \{x \in R \mid (x-3)(x-6)(x-8) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 2 \le x < 7\}$.
4. $A = \{x \in R \mid (x-3)(x-7)(x-9) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 4 < x < 8\}$.
5. $A = \{x \in R \mid (x-4)(x-6)(x-8) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 5 \le x < 8\}$.
6. $A = \{x \in R \mid (x+4)(x+1)(x-3) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid -3 \le x < 4\}$.
7. $A = \{x \in R \mid (x+6)(x-3)(x-7) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 2 \le x < 6\}$.
8. $A = \{x \in R \mid (x+3)(x+4)(x-1) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid -5 \le x < 0\}$.
9. $A = \{x \in R \mid (x-2)(x-3)(x-5) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 1 < x \le 4\}$.
10. $A = \{x \in R \mid (x-2)(x-5)(x-7) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid 3 \le x \le 7\}$.

Зв’язок розв’язування. Користуючись зображенням числових множин на координатній прямій, знайти $A\cap B$,

$A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, якщо $A = \{x \in R \mid (x + 3)(x - 1)(x - 5) = 0\}$ і $B = \{x \in R \mid -1 \le x < 5\}$.

► Записи множин A і B, які задані за допомогою характеристичних властивостей їх елементів, не досить зручні для знаходження результатів операцій над ними. Знайдемо інші їх записи. Множина A є множиною розв'язків рівняння

$$(x + 3)(x - 1)(x - 5) = 0,$$

які є дійсними числами і є об'єднанням множин розв'язків кожного із рівнянь

$$x + 3 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x - 5 = 0,$$

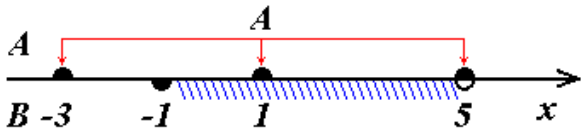
тому що добуток кількох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю.

Множина B є числовим проміжком із кінцями -1 і 5, який замкнений знизу і відкритий зверху.

Отже, дані множини можна записати так:

$$A = \{-3; 1; 5\} \text{ і } B = [-1; 5[.$$

Зобразимо їх на координатній прямій, мал. 4.



Мал. 4

Множини A і B є підмножинами множини дійсних чисел R, а тому її можна прийняти за універсальну множину. Виконуючи вказані операції над множинами A і B, будемо мати:

$A \cap B = \{1\}$; $\quad A \cup B = \{-3\} \cup [-1; 5]$;

$A \setminus B = \{-3; 5\}$; $\quad B \setminus A = [-1; 1[\cup]1; 5[$;

$\overline{A} =]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; 5[\cup]5; +\infty[$;

$\overline{B} = R \setminus B =]-\infty; -1[\cup [5; +\infty[$. ◄

Завдання 3.

1. Нехай K – множина жителів міста, M – множина чоловіків у місті, C – множина спортсменів міста, P – множина робітників міста, причому $M \cap P \cap C \neq \varnothing$. Зобразити множини K, M, P і C за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями множини $X = (M \cap P) \cup C$ і $Y = \overline{M} \bigcap (P \setminus C)$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

2. Нехай M – множина учнів школи, B – множина учнів восьмих класів школи, D – множина дівчат школи, C – множина учнів-спортсменів школи, причому $B \cap D \cap C \neq \varnothing$. Зобразити множини M, B, D і C за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями множини $X = (C \cup D) | B$ і $Y = (B \cup C) \cap D$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

3. Нехай M – множина жителів міста, D – множина дівчат у місті, C – множина учасників художньої самодіяльності у місті, S – множина старшокласників у місті, причому $D \cap C \cap S \neq \varnothing$. Зобразити за допомогою кругів Ейлера множини M, D, C і S, відмітити штриховими лініями множини $X = (\overline{C} \bigcap S) \bigcup D$ і $Y = (S \cap D) C$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

4. Нехай M – множина учнів школи, A – множина активістів школи, B – множина відмінників школи, C – множина учнів сьомих класів школи, причому $A \bigcap B \bigcap C \neq \varnothing$. Зобразити множини M, A, B і C за допомогою кругів Ейлера. Відмітити штриховими лініями множини $X = \overline{C} \bigcup (B \setminus A)$ і $Y = (C \cap B) \cup A$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

5. Нехай M – множина учнів школи, C – множина учнів сьомих класів школи, S – множина спортсменів школи, P – множина учасників художньої самодіяльності

школи, причому $C \bigcap P \bigcap \mathrm{S} \neq \varnothing$. Зобразити за допомогою кругів Ейлера множини *M*, *C*, *S*, і *P*, відмітити штриховими лініями множини $X = (S \bigcup P) \setminus C$ і $Y = (\overline{C} \bigcap P) \bigcup S$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

6. Нехай *S* – множина спортсменів України, *B* – множина спортсменів області, *D* – множина спортсменів жінок України, *M* – множина легкоатлетів України, причому $B \bigcap D \bigcap M \neq \varnothing$. Зобразити множини *S*, *B*, *D* і *M* за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями множини $X = (D \bigcup M) \setminus B$ і $Y = (\overline{M} \bigcap D) \setminus B$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

7. Нехай *M* – множина студентів факультету, *B* – множина відмінників факультету, *D* – множина студентів другого курсу факультету, С – множина спортсменів факультету, причому $B \cap D \bigcap C \neq \varnothing$. Зобразити множини *M*, *B*, *D* і *C* за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями множини $X = (D \bigcup C) \setminus B$ і $Y = (\overline{D} \bigcap B) \bigcup C$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

8. Нехай *M* – множина студентів інституту, *C* – множина студентів-юнаків інституту, *T* – множина студентів третього курсу інституту, *H* – множина студентів інституту, які беруть участь у науково-дослідній роботі, причому $C \cap T \cap H \neq \varnothing$. Зобразити за допомогою кругів Ейлера множини *M*, *C*, *T* і *H*, відмітити штриховими лініями множини $X = \overline{T} \cap (C \cup H)$ і $Y = C \setminus (T \cap H)$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

9. Нехай *S* – множина учнів педагогічного училища, *M* – множина юнаків, які навчаються в училищі, *P* – множина учнів першого курсу училища, *C* – множина учнів училища, які беруть участь у художній самодіяльності, причому $M \cap P \cap C \neq \varnothing$. Зобразити множини *S*, *M*, *P* і *C* за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями

множини $X=(M\cup P)\setminus C$ і $Y=(\overline{M}\cap C)\cup P$ та вказати характеристику властивість елементів цих множин.

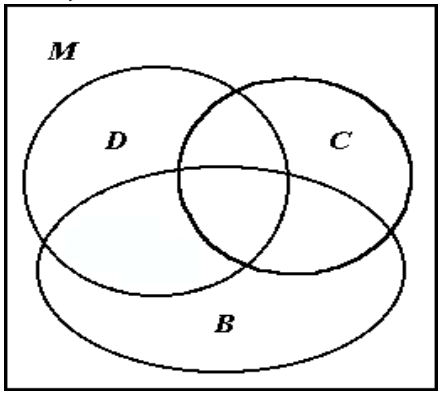
10. Нехай M – множина учнів школи, B – множина учнів восьмих класів школи, D – множина учнів дівчат школи, C – множина учнів учасників художньої самодіяльності школи, причому $B\cap D\cap C\neq\varnothing$. Зобразити множини M, B, D і C за допомогою кругів Ейлера, відмітити штриховими лініями множини $X = (\overline{B}\setminus C)\cap D$ і $Y=(D\cap B)\cup C$ та вказати характеристичну властивість елементів цих множин.

Зразок розв'язування. Нехай M – множина учнів школи, D – множина дівчат школи, B – множина відмінників школи, C – множина спортсменів школи, причому $D\cap B\cap C\neq\varnothing$. Зобразити множини M, D, B і C за допомогою кругів Ейлера. Відзначити штриховими лініями множини

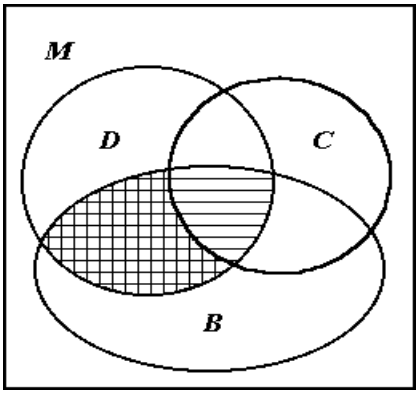
$$X = (D\cap B)\setminus C \quad \text{і} \quad Y = \overline{D}\cap(B\cup C).$$

та вказати характеристичну властивість їх елементів.

► 1. Множини D, B і C є підмножинами множини M, а тому її можна прийняти за універсальну множину. Відомо, що $D\cap B\cap C\neq\varnothing$, тоді графічно задані множини можна зобразити так, як показано на мал. 4.



Мал.4



Мал. 5

2. Зобразимо на мал. 5 множини M, B, D і C, як і на мал. 4, і, користуючись означеннями операцій над множинами, відзначимо штриховими лінями множини $D\cap B$

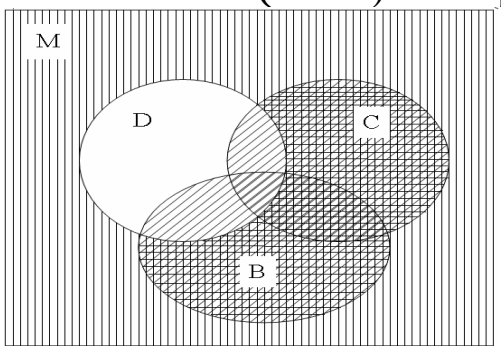
– ≣і $(D\cap B)\setminus C$ –▦. Отже, множина $X = (D\cap B)\setminus C$ заштрихована – ▦..

Розглядаючи мал. 5, встановлюємо, що множина X може бути задана такою характеристичною властивістю її елементів: $P(x)$ – " x – учень школи, який є дівчиною і відмінницею, але не є спортсменкою" .

3. Зобразимо на мал. 6 множини M, D, B і C , як і на мал. 4, і, користуючись означенням операцій над множинами, відмітимо штриховими лініями множини

$\overline{D}$ – |||, $B\cup C$ –///, $\overline{D}\cap(B\cup C)$ – ≡

Отже, множина $Y = \overline{D}\cap(B\cup C)$ заштрихована – ≣.



Мал. 6

Розглядаючи мал. 6, встановлюємо, що множина Y може бути задана такою характеристичною властивістю її елементів: Q (y) "y – учень школи, який є відмінником або займається спортом, але не є дівчиною". Властивість Q (y) можна сформулювати інакше: "y – учень школи, який є хлопцем, що є відмінником або спортсменом". ◄

Завдання 4. Зобразити ліву і праву частини рівності множин за допомогою кругів Ейлера та довести її:

1. $A\setminus(B\cup\overline{C})=(A\cap C)\setminus B$,
2. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\cap B)\setminus C$,
3. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=A\setminus(B\cup C)$,
4. $A\setminus\overline{B\cap C}=A\cap B\cap C$,
5. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$,
6. $(\overline{A}\setminus B)\cap C=C\setminus(A\cup B)$,
7. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)=A\cap(B\setminus C)$,

8. $(A\cap B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(\overline{B}\cap C)$,

9. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$,

10. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

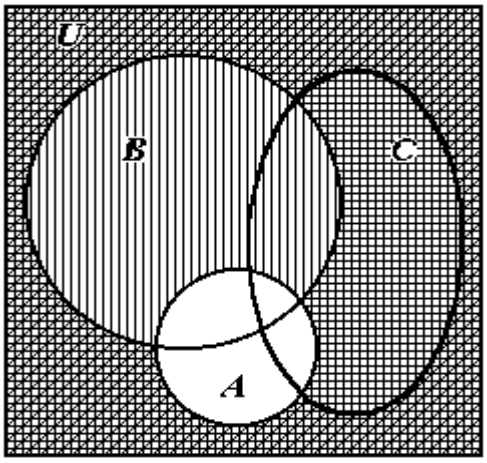
Зразок розв'язування. Зобразити ліву і праву частину рівності множин за допомогою кругів Ейлера та довести її:

$$(\overline{A}\setminus B)\setminus C = \overline{A\cup B\cup C}. \qquad (1)$$

►1. Проілюструємо доводжувану рівність (1) за допомогою кругів Ейлера. Вона містить доповнення, а тому множини A, B і C є підмножинами деякої універсальної множини U, яку зобразимо прямокутником (квадратом). На мал. 7 зобразимо ліву частину рівності, а на мал. 8 – праву.

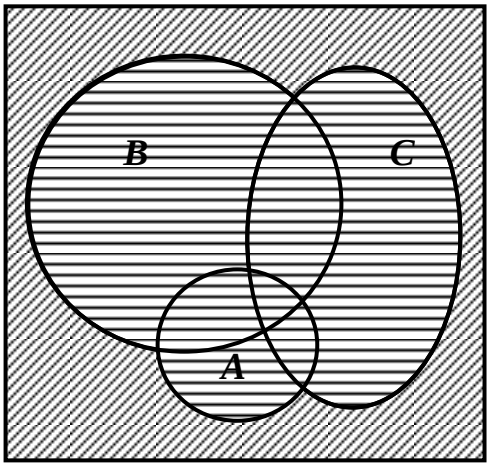
Відзначимо штриховкою на відповідних малюнках результати виконання операцій над множинами:

$\overline{A}$ – ||||, $\overline{A}\setminus B$ – ≡, $(\overline{A}\setminus B)\setminus C$ – ▦; $A\cup B\cup C$ – ≡ $\overline{A\cup B\cup C}$ – ▨.



$(\overline{A}\setminus B)\setminus C$ – ▦

Мал. 7



$\overline{A\cup B\cup C}$ – ▨

Мал. 8

Порівнюючи малюнки, приходимо до висновку, що множини $(\overline{A}\setminus B)\setminus C$ і $\overline{A\cup B\cup C}$ зображаються однаковими фігурами за допомогою кругів Ейлера.

II. Доведемо рівність (1) аналітично.

1. Нехай x - довільний елемент такий, що

$x\in(\overline{A}\setminus B)\setminus C\Rightarrow$ за означеним різниці множин

$x\in\overline{A}\setminus B$ і $x\notin C\Rightarrow$ за означенням різниці множин

$x \in \overline{A}$ і $x \notin B$ і $x \notin C \Rightarrow$ за означенням доповнення множини
$x \notin A$ і $x \notin B$ і $x \notin C \Rightarrow$ за означеним об'єднання множин
$x \notin A \cup B \cup C \Rightarrow$ за означенням доповнення множини
$x \in \overline{A \cup B \cup C}$.

Отже, будь-який елемент множини $(\overline{A} \setminus B) \setminus C$ є елементом множини $\overline{A \cup B \cup C}$, тобто, за означенням підмножини, має місце включення

$$(\overline{A} \setminus B) \setminus C \subset \overline{A \cup B \cup C}. \qquad (2)$$

2.Нехай тепер x – довільний елемент такий, що

$x \in \overline{A \cup B \cup C} \Rightarrow$ за означенням доповнення множини
$x \notin A \cup B \cup C \Rightarrow$ за означенням об'єднання множин
$x \notin A$ і $x \notin B$ і $x \notin C \Rightarrow$ за означенням доповнення множини
$x \in \overline{A}$ *і* $x \notin B$ *і* $x \notin C \Rightarrow$ за означенням різниці множин
$x \in \overline{A} \setminus B$ *і* $x \notin C \Rightarrow$ за означенням різниці множин
$x \in (\overline{A} \setminus B) \setminus C$.

Значить, будь-який елемент множини $\overline{A \cup B \cup C}$ є елементом множини $(\overline{A} \setminus B) \setminus C$, тобто, за означенням підмножини, має місце включення

$$(\overline{A} \setminus B) \setminus C \supset \overline{A \cup B \cup C}. \qquad (3)$$

На основі (2) і (3), та за антисиметричною властивістю відношення включення, має місце доводжувана рівність (1). ◄

Завдання 5. Зобразити на координатній площині множини $A \times B$ і $B \times A$, якщо:

1. $A = R$ і $B =]-2; 4]$,
2. $A =]-3; +\infty[$ і $B = [-1; 5[$,
3. $A =]-\infty; 2]$ і $B =]-2; +\infty[$,
4. $A =]-\infty; 4[$ і $B = R$,
5. $A = [-3; 4[$ і $B = [-2; 5]$,
6. $A = [-1; 6[$ і $B = R$,
7. $A =]-4; 2]$ і $B =]-\infty; 3]$,
8. $A =]-2; +\infty[$ і $B =]-\infty; 4]$,
9. $A = R$ і $B =]-1; +\infty[$,

10. $A =]-1; 5]$ і $B = [-2; 7[$.

Зразок розв'язування. Побудувати точкові графіки множин $A \times B$ і $B \times A$, де $A =]-\infty; 3]$ і $B = [-1; 6[$.

► Множини $A \times B$ і $B \times A$, є підмножинами декартового квадрата множини дійсних чисел R, точковим графіком якого є площина. Для побудови точкових графіків потрібно на площині ввести систему координат xOy, а множини $A \times B$ і $B \times A$ задати характеристичними властивостями їх елементів (пар): $A = \{x \in R \mid x \leq 3\}$ і $B = \{y \in R \mid -1 \leq y < 6\}$.

1. Побудуємо точковий графік множини

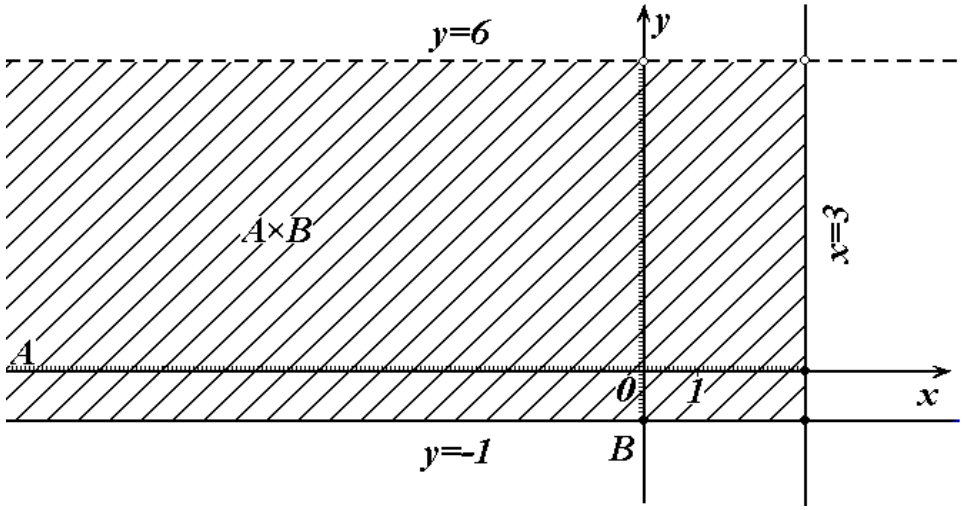
$$A \times B: = \{(x, y) \in R^2 \mid x \leq 3 \text{ і } -1 \leq y < 6\}. \quad (1)$$

Зобразимо на осі Ox множину A, а на осі Oy – множину B. З (1) видно, що:

1) абсциси x точок множини $A \times B$ задовольняють умову $x \leq 3$, а всі точки площини з такими абсцисами розміщені на прямій $x = 3$ або лівіше від неї;

2) ординати y точок множини $A \times B$ задовольняють умову $-1 \leq y < 6$, а всі точки площини з такими ординатами знаходяться на прямій $y = -1$ або вище від неї і нижче прямої $y = 6$.

Переріз множин точок координатної площини, які розміщені на прямій $x = 3$ або лівіше від неї та на прямій $y = -1$ або вище від неї і нижче прямої $y = 6$ є точковим графіком декартового добутку $A \times B$, на мал. 9 він заштрихований, де для зручності прямі, точки яких не належать йому, проведені пунктиром.



Мал. 9

2. Побудуємо тепер точковий графік множини

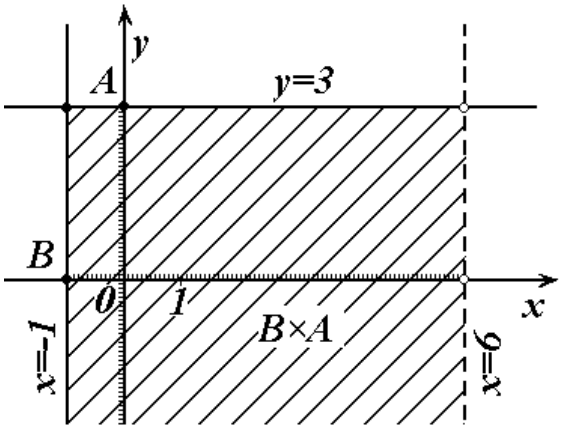
$$B \times A := \{(x, y) \in R^2 \mid -1 \le x < 6 \text{ і } y \le 5\}. \qquad (2)$$

На осі Ox зобразимо вже множину B, а на осі Oy – множину A. З (2) видно, що:

1) абсциси x точок множини $B \times A$ задовольняють умову $-1 \le x < 6$, а всі точки площини з такими абсцисами розміщені на прямій $x = -1$ або правіше від неї і лівіше від прямої $x = 6$;

2) ординати y точок множини $B \times A$ задовольняють умову $y \le 3$, а всі точки площини з такими ординатами знаходяться на прямій $y = 3$ або нижче від неї.

Переріз множин точок координатної площини, які розміщені на прямій $x = -1$ або правіше від неї і лівіше від прямої $x = 6$ та на прямій $y = 3$ або нижче від неї, є точковим графіком декартового добутку $B \times A$, на мал. 10 він заштрихований.



Мал. 10

Відповідь: точковими графіками множин $A \times B$ і $B \times A$, будуть геометричні фігури, заштриховані на мал. 9, 10 відповідно. ◄

Завдання 6. Знайти помилки в означенні. Сформулювати означення правильно і виділити в ньому родове поняття й видову ознаку.

1. Прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.
2. Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються.
3. Хордою називається пряма, яка з'єднує дві точки кола.
4. Діаметром кола називається найбільша хорда, яка проходить через його центр.
5. Відрізком називається частина прямої.
6. Променем називається частина прямої.
7. Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони й кути рівні.
8. Квадратом називається ромб, у якого всі сторони й кути рівні.
9. Многокутник називається правильним, якщо всі його сторони рівні.
10. Многокутник називається правильним, якщо всі кути рівні.

Зразок розв'язування. Знайти помилки в означенні: прямокутником називається чотирикутник, у якого діагоналі рівні. Сформулювати означення правильно та виділити в ньому родове поняття й видову ознаку.

► Означення сформульовано неправильно, бо обсягу цього поняття належатиме поняття „рівнобічна трапеція", яка не є прямокутником. У цьому означенні неправильно вказане родове поняття – чотирикутник. Правильним буде

означення: прямокутником називається паралелограм, у якого діагоналі рівні.

Родовим поняттям є поняття „паралелограм”, а видовою ознакою – рівність діагоналей. ◄

ТЕСТИ
Елементи теорії множин (Модуль 1)

1. Під множиною розуміють:

а) натуральне число;

б) точки площини;

в) сукупність об’єктів, об’єднаних деякою спільною ознакою;

г) дійсні числа.

2. Те, що елемент a належить множині A записують:

а) $a \subset A$; *б)* $A \subset a$; *в)* $a \in A$; *г)* $A \in a$.

3. Те, що елемент $в$ не належить множині A записують:

а) $в \not\subset A$; *б)* $\overline{в \subset A}$; *в)* $в \notin A$; *г)* $в \bar{\in} A$.

4. Множина, елементами якої є числа називається:

а) натуральними числами; *в) множиною дійсних чисел;*

б) числовою множиною; *г) множиною цілих чисел.*

5. Множина цілих чисел позначається:

а) Z; *б)* N_0; *в)* Q; *г)* R.

6. Множина натуральних чисел позначається:

а) Z; *б)* N_0; *в)*N; *г)* R.

7. Множина цілих невід’ємних чисел позначається:

а) Z; *б)* N_0; *в)*N; *г)* R.

8. Множина раціональних чисел позначається:

а) Z; *б)* N_0; *в)* Q; *г)* R.

9. Множина дійсних чисел позначається:

а) Z; *б)* N_0; *в)* Q; *г)* R.

10. Множина задається:

а) таблицею; *в) переліком елементів;*

б) ознакою; *г) характеристичною властивістю елементів.*

11. Якщо множина A задається переліком елементів, то це записується так:

а) $A=\{x|\ P_{(x)}\}$; *в)* $A = \{ a_1, a_2, \ldots a_n \}$;

б) $A = a_1, a_2, \ldots a_n$; *г)* $A = \{ x|\ x \in R \ i \ x > 0 \}$.

12. Якщо множина A задається характеристичною властивістю $P_{(x)}$ її елементів, то це записується так:

а) $A = a_1, a_2, \ldots a_n$; *в)* $A = \{ a_1, a_2, \ldots a_n \}$

б) $A=\{x|\ P_{(x)}\}$; *г)* $A = P_{(x)}$.

13. Якщо множина A є порожньою, то це записується:

а) $A = \{ \varnothing \}$; *б)* $A = \varnothing$; *в)* $A = 0$; *г)* $|A| = \varnothing$.

14. Множина називається нескінченною, якщо:

а) елементи її нескінченні;

б) елементи її необмежені;

в) вона має багато елементів;

г) елементи її не можна перерахувати.

15. Множина називається скінченною, якщо:

а) елементи її можна побачити;

б) вона обмежена;

в) елементи її можна перерахувати;

г) вона не має елементів.

16. Множина називається точковою, якщо:

а) елементами її є точки координатної площини;

б) елементами її є точки координатної прямої;

в) елементами її є точки;

г) елементами її є точки однієї площини.

17. Геометричною фігурою називається:

а) довільна непорожня точкова множина;

б) множина точок площини;

в) множина точок простору;

г) плоска фігура.

18. Фігура називається плоскою, якщо:

а) деякі її точки належить площині;

б) всі її точки належать одній площинні;

в) якщо вона є трикутником;
г) її точки належать площині.

19. Фігура називається просторовою, якщо:
а) не існує площини, якій би належали всі точки даної фігури;
б) вона знаходиться в просторі;
в) якщо вона необмежена;
г) якщо її можна наповнити рідиною.

20. Множини називаються рівними, якщо:
а) кожен елемент однієї множини є в другій;
б) вони складаються з одних і тих самих елементів;
в) кожен елемент однієї множини є в другій і кожен елемент другої множини є в першій;
г) вони мають однакову кількість елементів.

21. Які твердження є істинними:
а) елементи в множині не повторюються;
б) елементи в множині можуть повторюватися;
в) порядок слідування елементів в множині має значення;
г) порядок слідування елементів в множині не істотний?

22. Відношення рівності множин має такі властивості (вказати групу, що включає всі властивості):
а) рефлексивну, антисиметричну, транзитивну;
б) антирефлексивну, симетричну, транзитивну;
в) рефлексивну, симетричну, антисиметричну;
г) рефлексивну, симетричну, транзитивну.

23. Множина *X* називається підмножиною множини *У*, якщо:
а) кожен елемент множини У є в множині X;
б) елементи їх співпадають;
в) якщо вони мають спільні елементи;
г) якщо всі елементи множини X є елементами множини У.

24. Запис $A \subset B$ читається:
а) елемент а належить множині В;
б) множина А належить множині В;
в) множина А рівносильна множині В;

г) множина А є підмножиною множини В.

25. Знак $\subset$ називається знаком:

а) належності; *в) паралельності;*

б) симетричності; *г) включення.*

26. Відношення включення має такі властивості:

а) рефлексивну, антисиметричну, транзитивну;

б) рефлексивну, симетричну, транзитивну;

в) антирефлексивну, симетричну, транзитивну;

г) антирефлексивну, антисиметричну, транзитивну.

27. Підмножина *Х* множини *У* називається власною її підмножиною якщо:

а) вона непорожня і не збігається з множиною У;

б) кожен елемент множини Х є елементом множини У;

в) множина У не порожня і кожен її елемент є у множині Х;

г) якщо множини такі, що $X \neq Y$.

28. Довільні дві множини :

а) є рівними або перетинаються;

б) або перетинаються або не перетинаються;

в) перебувають у відношенні включення;

г) перебувають у відношенні рівності.

29. Про дві довільні множини, які мають спільні елементи, говорять, що вони:

а) перебувають у відношенні включення;

б) перебувають у відношенні рівності;

в) перетинаються;

г) не перетинаються.

30. Дві довільні множини, які перетинаються, можуть перебувати тільки:

а) в одному з відношень: або включення, або рівності, або часткового збігу;

б) у відношенні включення, рівності і часткового збігу;

в) у родово-видовому відношенні;

г) у перехресному відношенні.

31. Які з тверджень правильні:

а) якщо $A \subset B$ *і* $A \supset B$, *то* $A = B$;

б) якщо $A \subset B$, *то* $B \subset A$;
в) якщо $B \subset A$, *то* $A \subset B$;
г) якщо $A \cap B \neq \varnothing$, *то* $A = B$?

32. Проміжок дійсних чисел] *а; в* [називається:
а) відкритим числовим проміжком;
б) закритим числовим проміжком;
в) закритим знизу і відкритим зверху числовим проміжком;
г) відкритим знизу і закритим зверху числовим проміжком.

33. Проміжок дійсних чисел [*а; в* [називається:
а) відкритим числовим проміжком;
б) закритим числовим проміжком;
в) закритим знизу і відкритим зверху числовим проміжком;
г) відкритим знизу і закритим зверху числовим проміжком.

34. Проміжок дійсних чисел] *а; в*] називається:
а) відкритим числовим проміжком;
б) закритим числовим проміжком;
в) закритим знизу і відкритим зверху числовим проміжком;
г) відкритим знизу і закритим зверху числовим проміжком.

35. Проміжок дійсних чисел [*а; в*] називається:
а) відкритим числовим проміжком;
б) закритим числовим проміжком;
в) закритим знизу і відкритим зверху числовим проміжком;
г) відкритим знизу і закритим зверху числовим проміжком.

36. Запис [*а; в*] означає: всі дійсні числа, що знаходяться між числами *а* і *в*:
а) включаючи ці числа;
б) не включаючи ці числа;
в) включаючи число а і не включаючи в;
г) не включаючи числа а і включаючи в.

37. Запис [*а; в*[означає: всі дійсні числа, що знаходяться між числами *а* і *в*:
а) включаючи ці числа;
б) не включаючи ці числа;
в) включаючи число а і не включаючи в;
г) не включаючи числа а і включаючи в.

38. Запис] *а; в*] означає: всі дійсні числа, що знаходяться між числами *а* і *в*:

а) включаючи ці числа;

б) не включаючи ці числа;

в) включаючи число а і не включаючи в;

г) не включаючи числа а і включаючи в.

39. Запис] *а; в* [означає: всі дійсні числа, що знаходяться між числами *а* і *в*:

а) включаючи ці числа;

б) не включаючи ці числа;

в) включаючи число а і не включаючи в;

г) не включаючи числа а і включаючи в.

40. Під *n*-арною операцією розуміють:

а) правило, за яким n об'єктам, узятими в певному порядку ставиться у відповідність не більш як один об'єкт, що називається результатом операції;

б) правило за яким n об'єктам, узятими в певному порядку ставиться у відповідність тільки один об'єкт, що називається результатом операції;

в) правило за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність тільки один елемент іншої множини;

г) правило за яким кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність не більш як один елемент іншої множини.

41. У випадку, коли компонента одна, операція називається:

а) унарною; б) бінарною; в) терарною; г) оберненою.

42. У випадку, коли дві компоненти, операція називається:

а) унарною; б) бінарною; в) терарною; г) оберненою.

43. Перерізом двох множин *A* і *B* називається:

а) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать обом цим множинам;

б) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B;

в) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин;

г) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одній із цих множин.

44. Об'єднанням множин *A* і *B* називається:

а) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать обом цим множинам;

б) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B;

в) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин;

г) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одній із цих множин.

45. Різницею двох множин *A* і *B* називається:

а) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать обом цим множинам;

б) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B;

в) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин;

г) множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одній із цих множин.

46. Яке з тверджень правильне:

а) якщо множина A є підмножиною множини B, то різниця B\A називається доповненням множини B до множини A;

б) якщо множина A є підмножиною множини B, то різниця A\B називається доповненням підмножини A до множини B;

в) якщо множина A є підмножиною множини B, то $A\backslash B$ називається доповненням множини B до множини A;

г) якщо множина A є підмножиною множини B, то різниця $B\backslash A$ називається доповненням підмножини A до множини B?

47. Доповненням множини A називається:

а) різниця між множинами B і A;

б) різниця між множинами A і B;

в) множина, елементи якої належать множині B і не належать множині A;

г) різниця між універсальною множиною і множиною A.

48. Переріз множини A і B позначається:

а) $A\backslash B$; *б) $A\cup B$;* *в) $A\cap B$;* *г) $B\backslash A$.*

49. Об'єднання множини A і B позначається:

а) $A\backslash B$; *б) $A\cup B$;* *в) $A\cap B$;* *г) $B\backslash A$.*

50. Різниця множин A і B позначається:

а) $A\backslash B$; *б) $A\cup B$;* *в) $A\cap B$;* *г) $B\backslash A$.*

51. Доповнення підмножини A до множини B позначається:

а) $A\backslash B$; *б) $\overline{A}$;* *в) $B\backslash A$;* *г) $\overline{A_B}$.*

52. Доповнення множини A позначається:

а) $\overline{A_B}$; *б) $\overline{B_A}$;* *в) $\mathcal{U}\backslash A$;* *г) $\overline{A}$.*

53. Символічно означення перерізу множин A і B записується:

а) $A\cap B := \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$; *в) $A\cap B := \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$;*

б) $A\cap B := \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$; *г) $A\cup B := \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$.*

54. Символічно означення об'єднання множин A і B записується:

а) $A\cup B := = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$; *в) $A\cap B := \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$;*

б) $A\cap B := = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$; *г) $A\cup B := \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.*

55. Символічно означення різниці множин A і B записується:

а) $A\backslash B := \{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$; *в) $A\backslash B := \{x \mid x \in A$ або $x \notin B\}$;*

б) $A\backslash B := \{x \mid x \in B$ і $x \notin A\}$; *г) $A\backslash B := \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$.*

56. Символічно означення доповнення множини A записується:

а) $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$; *б)* $\overline{A} := A \setminus \mathcal{U}$; *в)* $\overline{A_B} := B \setminus A$; *г)* $\overline{A_B} := A \setminus B$.

57. Які з тверджень правильні:

а) $A \cap \varnothing = A$; *б)* $A \cup \varnothing = A$; *в)* $A \cup \varnothing = \varnothing$; *г)* $A \cap \varnothing = \varnothing$?

58. Які з тверджень правильні:

а) $A \cap U = U$; *б)* $A \cup U = U$; *в)* $A \cap U = A$; *г)* $A \cup U = A$?

59. Вказати комутативний закон операції перерізу:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; *в)* $A \cap B = B \cap A$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г)* $A \cup B = B \cup A$.

60. Вказати комутативний закон операції об’єднання:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; *в)* $A \cap B = B \cap A$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г)* $A \cup B = B \cup A$.

61. Вказати асоціативний закон операції перерізу:

а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; *в)* $A \cap B = B \cap A$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г)* $A \cup B = B \cup A$.

62. Вказати дистрибутивний закон операції перерізу відносно об’єднання:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; *в)* $A \cap B = B \cap A$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г)* $A \cup B = B \cup A$.

63. Вказати дистрибутивний закон операції об’єднання відносно перерізу:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; *в)* $A \cap B = B \cap A$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; *г)* $A \cup B = B \cup A$.

64. Вказати асоціативний закон операції об’єднання:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *в)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *г)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

65. Вказати закон де Моргана, що пов’язує операції перерізу і доповнення:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *в)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *г)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

66. Вказати закон де Моргана, що пов'язує операції об'єднання і доповнення:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *в)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *г)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

67. Вказати закон подвійного заперечення:

а) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$; *в)* $\overline{\overline{A}} = A$;

б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *г)* $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

68. Вказати закон ідемпотентності операції перерізу:

а) $A \cap U = A$; *б)* $A \cap \varnothing = \varnothing$; *в)* $A \cap A = A$; *г)* $A \cup U = U$.

69. Вказати закон ідемпотентності операції об'єднання:

а) $A \cap U = A$; *б)* $A \cup A = A$; *в)* $A \cup \varnothing = A$; *г)* $A \cup U = U$.

70. Для довільних скінченних множин X і Y має місце рівність:

а) $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$; *в)* $|X \cup Y| = |X| + |Y| + |X \cap Y|$;

б) $|X \cup Y| = |X \cap Y| - |X| - |Y|$; *г)* $|X \cup Y| = |X| - |Y| + |X \cap Y|$.

71. Для довільних скінченних множин X, Y, Z має місце рівність:

а) $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$;

б) $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y \cap Z| + |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|$;

в) $|X \cup Y \cup Z| = |X \cap Y \cap Z| + |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X| - |Y| - |Z|$;

г) $|X \cup Y \cup Z| = |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z| - |X| - |Y| - |Z|$.

72. Під кортежем у математиці розуміють:

а) сукупність об'єктів, об'єднаних деякою їх спільною властивістю;

б) скінченну сукупність об'єктів, розміщених в цілком визначеному порядку, причому об'єкти в кортежі можуть повторюватися;

в) впорядкована пара чисел, розміщених в цілком визначеному порядку;

г) сукупність об'єктів, які не повторюються.

73. Об'єкти у кортежі називають:

а) елементами; б) компонентами; в) числами; г) періодом.

74. Довжиною кортежу називають:

а) величину їх компонентів;

б) природу їх об'єктів;

в) кількість компонентів кортежу;

г) властивості їх об'єктів.

75. Порожній кортеж позначається:

а) $\varnothing$*;* *б)* $\{\varnothing\}$*;* *в)* ( )*;* *г)* < >.

76. Впорядкованою парою називається:

а) координати точки на площині;

б) множина, яка має два елементи;

в) кортеж завдовжки два;

г) пара чисел.

77. Множина всіх упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині X, а друга – Y називається:

а) кортежем;

б) декартовим квадратом;

в) множиною точок на квадратній площині;

г) декартовим добутком множин X *і* Y.

78. Декартовий добуток двох множин X і Y записують так:

а) $X \cdot Y$; *б)* $X \times Y$; *в)* X^2; *г)* $X \backslash Y$.

79. Правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх декартів добуток, називається:

а)операцією декартового множення;

б) декартовим добутком;

в)декартовим квадратом множини;

г)декартовим n-м степенем множини.

80. Які з тверджень істинні:

а) $X \times \varnothing = X$; *в)* $X \times Y = Y \times X$;

б) $X \times \varnothing = \varnothing$; *г)* $X \times Y \neq Y \times X$?

81. Які з тверджень істинні:

а) $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$; *в)* $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$;

б) $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$; *г)* $X \times (Y \cap Z) \neq (X \times Y) \cap (X \times Z)$?

82. Які з тверджень істинні:

а) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$; *в)* $X \times (Y \cup Z) = (X \cup Y) \times (X \cup Z)$;

б) $X \times (Y \cup Z) = (Y \times X) \cup (Z \times X)$; *г)* $X \times (Y \cup Z) = (Y \cup X) \times (Z \cup X)$?

83. Які з тверджень істинні:

а) $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$; *в)* $X \times (Y \setminus Z) = (Y \setminus Z) \times X$;

б) $X \times (Y \setminus Z) = (X \setminus Z) \times (X \setminus Z)$; *г)* $X \times (Y \cap Z) = (Y \cap Z) \times X$?

84. Декартовим добутком довільних множин $X_1, X_2, ..., X_n$ називається:

а) множина всіх кортежів завдовжки n, перша компонента яких належить множині X_1*, друга –* X_2 *і т. д., n-та компонента – множині* X_n*;*

б) декартів n-тий степінь множини X;

в) кортеж довжиною n, перша компонента якого належить першій множині, а друга – другій, n-та компонента – n-тій множині;

г) добуток числа елементів у кожній з цих множин.

85. Декартовим *n*-тим степенем множини *X* називається:

а) декартів добуток множин $X_1, X_2, ..., X_n$*, таких, що* $X_1 = X_2 = ... = X_n; = X$;

б) декартів добуток множин $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$;

в) сукупність множин $X_1, X_2, ..., X_n$*, таких, що* $X_1 = X_2 = ... = X_n$;

г) $X \times X$.

86. X^2 називається:

а) декартовим квадратом множин X;

б) квадратом множини X;

в)декартовим добутком множини X;

г) декартовим степенем множини X.

87. Запис $|A|$ - означає:

а) модуль множини A; *в) елемент множини A;*

б) довжина кортежу; *г) кількість елементів множини A.*

88. Кількість елементів у декартовому добутку множин $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює:

а) $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| - |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$*;*
б) добутку кількості елементів у кожній з них;
в) $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$*;*
г) $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

89. Система непорожніх підмножин множини *M* називається розбиттям множини *M* на класи (на підмножини, що попарно не перетинаються), якщо:

а) кожен елемент множини M входить хоча б в одному із підмножин системи;

б) кожен елемент множини M входить в кожну із підмножин системи;

в) кожен елемент множини M належить одній і тільки одній із підмножин системи;

г) коли існує елемент множини M, який не належить жодній із підмножин системи.

90. Система підмножин є розбиттям множини на класи тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

а) 1) кожна із підмножин системи непорожня;
2) підмножини попарно не перетинаються;
3) об'єднання деяких підмножин системи дорівнює множині M;

б) 1) кожна із підмножин системи непорожня;
2) підмножини не перетинаються;
3) об'єднання всіх підмножин системи дорівнює множині M;

в) 1) кожна із підмножин системи непорожня;
2) підмножини попарно не перетинаються;
3) об'єднання всіх підмножин системи дорівнює множині M.

г) 1) існує непорожня підмножина системи;
2) підмножини попарно не перетинаються;
3) об'єднання всіх підмножин системи дорівнює множині M.

91. Довільну непорожню множину можна розбити за допомогою *n* властивостей на:

а) n класів; *в)* $2 \times n$ *класи;*
б) 2^n *класи;* *г) не більше як на* 2^n *класи.*

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ
(Відношення)

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1: «Відношення між елементами двох множин»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Відношення між елементами двох множин та його основні характеристики.
2. Поняття про граф відношення між елементами двох множин.
3. Точковий графік відношення між елементами двох числових множин.
4. Способи задання відношень.
5. Операції над відношеннями.
6. Протилежне відношення.
7. Обернене відношення.

ІІІ.Практичні завдання

1. Дано множину $X = \{2, 3, 4, 5\}$. Знайдіть Декартів квадрат X^2 і випишіть ті підмножини декартового квадрата, які задають відношення:

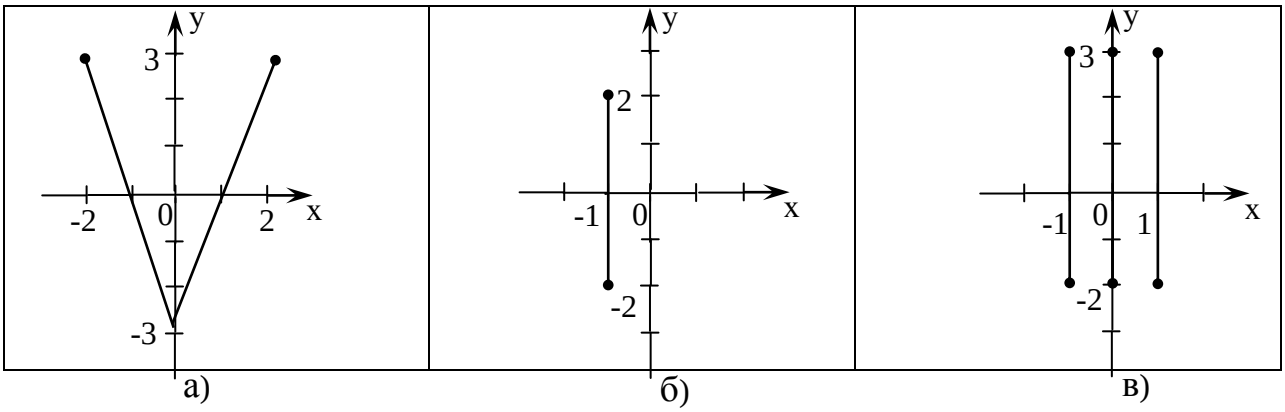
а) „менше”; б) „більше”; в) „рівно”.

2. Відношення ρ – „число x кратне числу y” задане між елементами множин $X = \{\underline{135}, 0, 264, 122\}$ і $Y = \{3, 4, \underline{5}, 9\}$, причому $x \in X$, $y \in Y$. Побудувати граф відношення ρ. Задати це відношення графіком (множиною пар). Вказати його область значень і визначення, та повний образ і повний прообраз підкреслених елементів. Знайти $\bar{\rho}$ і ρ^{-1}.
3. Побудуйте точковий графік відношення ρ, вкажіть його область визначення і множину значень, якщо відношення задано за допомогою таблиці:

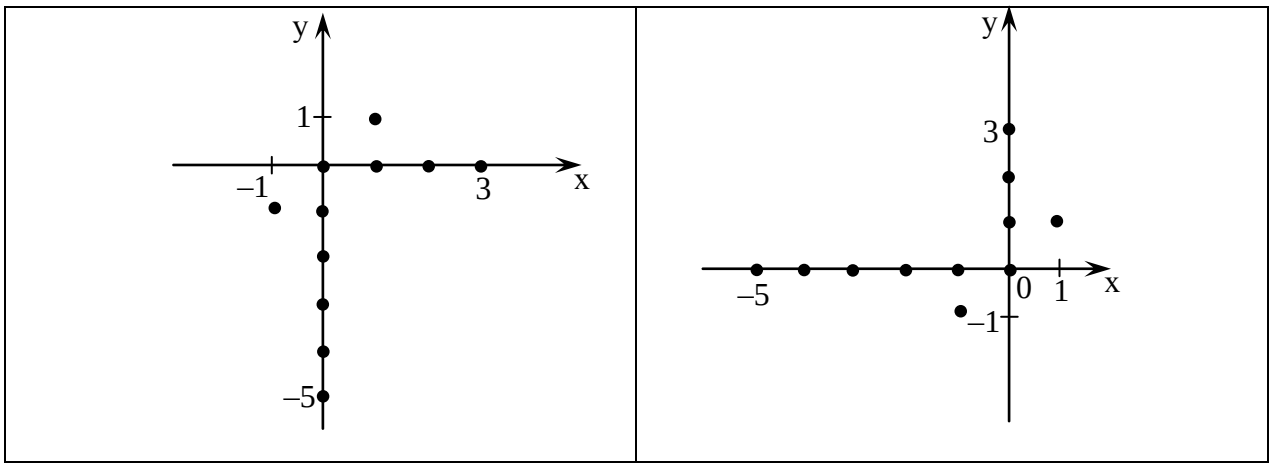
–	–	–	–	–	–	–	–
4	3	3	3	2	2	2	1
2	1	2	3	1	2	3	2

Вкажіть повний образ елемента -2 і повний прообраз елемента 2.

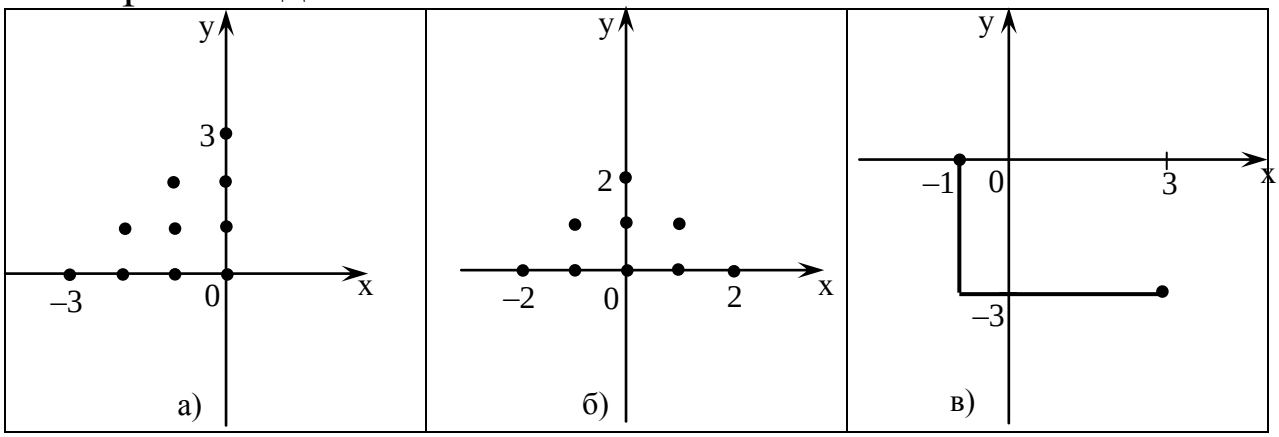
4. № 495 [8, с.98]. Точкові графіки відношень *P*, *T* і *M,* що задані на множині дійсних чисел, зображені на малюнку. Вкажіть область визначення і множину значень кожного з цих відношень.



5. № 491[8, с.98]. Відношення *P* – „більше”, *T* – „більше на 2” і *E* – „більше у 2 рази” задані на множині *A* = {2, 4, 6, 8, 12}. Побудуйте графи даних відношень.
6. № 497[8, с.98]. Множина *T* = {(1, 0), (2,0), (3,0), (4,0)} є графіком відношення між елементами множин *X* = {1, 2, 3, 4} і *Y* = {0, 1}. Задайте відношення T^{-1}, обернене відношенню Т, і побудуйте на одному малюнку точкові графіки відношень *T* і T^{-1}. Чи симетричні вони відносно бісектриси першого і третього координатних кутів?
7. № 498[8, с.98]. Дано точкові графіки відношень *P* і *K*. Чи можна стверджувати, що відношення *P* і *K* взаємнообернені? Відповідь обґрунтуйте.



8. № 499[8, с.98]. Відношення *P*, *T* і *M* задані за допомогою точкових графіків. Побудуйте точкові графіки відношень, обернених даним.



9. Скільки різних відношень існує між елементами множин *A* і *B*, якщо $|A| = 4$; $|B| = 5$, не враховуючи порожнього і того що збігається з A × B?

IV. Завдання для самостійного опрацювання

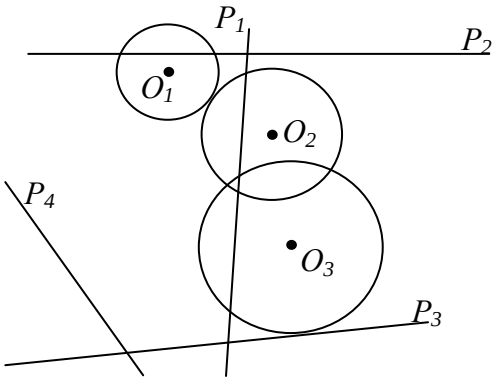
Теоретичні питання. Відношення на множині.

Практичні завдання.

№ 488[8, с.98].Дано множини $A = \{1, 3\}$ і $B = \{2, 5\}$. Перерахувати елементи декартового добутку даних множин та випишіть усі підмножини цієї множини. Яка з отриманих підмножин задає відношення: а) „менше”, б) „більше”, в) „більше або дорівнює”, г) „бути дільником”?

№ 489[8, с.98]. *X* – множина прямих, *Y* – множина кіл. Записати усі пари елементів даних множин, які знаходяться у відношенні „пряма *x* перетинає коло *y*”.

Навести приклади інших відношень, які можуть розглядатись між множинами прямих і кіл.



№ 494[8, с.98]. Побудувати графік відношення „більше в 2 рази”, заданого на множині X, якщо:

а) $X = \{-4, -2, -.1, 0, 1, 2, 4\}$; б) $X = [-4, 4]$.

Тема 2: «Відношення на множині та його властивості

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Відношення на множині та його основні характеристики.
2. Особливості графа відношення на множині. Способи задання відношень.
3. Основні властивості відношень на множині.
4. Відношення еквівалентності.
5. Відношення порядку та його види.

ІІІ.Практичні завдання

1. На множині людей задано відношення ρ. Встановити його властивості, якщо:

а) $x \rho y$ <=> “x знає y”;

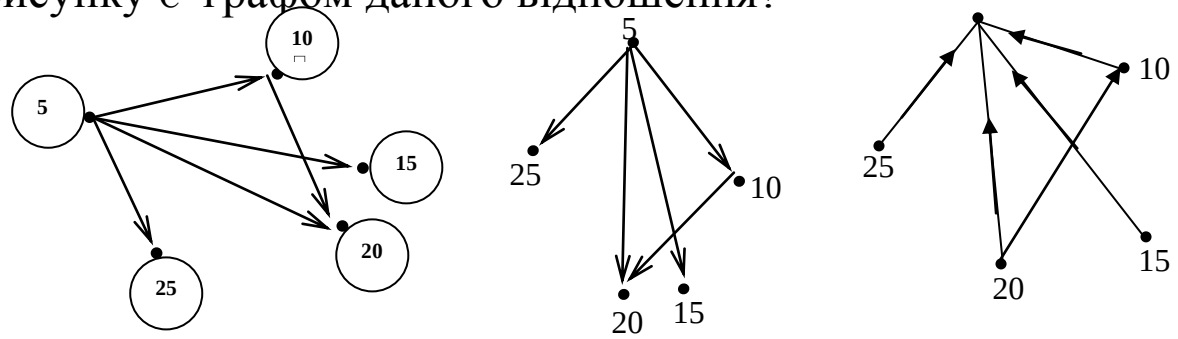
б) $x \rho y$ <=> “x товариш y”;

в) $x \rho y$ <=> “x сестра y”;

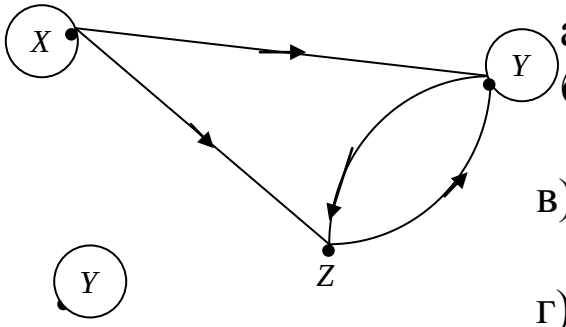
г) $x \rho y$ <=> “x народився в тому ж році, що й y”;

д) $x \rho y$ <=> “x старший y”.

2. № 507 [8, с. 101] Відношення “бути дільником” задано на множині $A = \{5; 10; 15; 20; 25\}$. Сформулювати властивість рефлексивності цього відношення. Чи транзитивне це відношення? Який із графів, зображених на рисунку є графом даного відношення?

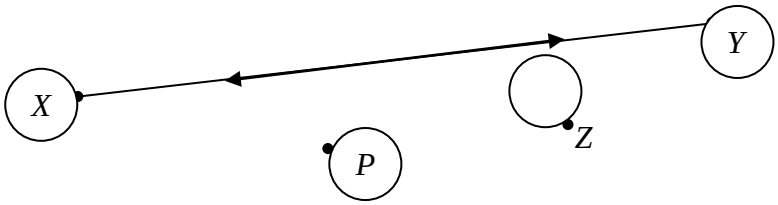


3. № 510 [8, с. 102] Відношення ρ задане графом. Встановити, які висловлення істинні:



а) відношення ρ рефлексивне;
б) відношення ρ антирефлексивне;
в) відношення ρ не має властивості транзитивності;
г) відношення ρ не має властивості антисиметричності.

4. №511 [8, с. 102] Довести, що відношення, граф якого зображений на рисунку, рефлексивне, симетричне, транзитивне .



5. №516 [8, с. 102] Відношення φ – “мати одну і ту ж остачу при діленні на 3” задано на множині:

$$X = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

Чи є воно відношенням еквівалентності?

6. № 520 [8, с.103]На множині $X = \{0, 1, 2, 3\}$ задано відношення

$\rho = \{(0, 0), (1; 1), (2; 2),(3; 3), (0; 1), (1; 0), (2; 3), (3;2)\}$ і

φ = {(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (1; 3), (3; 1), (3; 2), (2; 3)}. Яке з цих відношень є відношенням еквівалентності?.

7.№26 (2) [4, с. 79] Побудувати граф і точковий графік відношень ρ, ρ^{-1} і $\overline{\rho}$ між елементами множини A та встановити властивості цих відношень, якщо:

A = {1, 2, 3, 4, 5} і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x + 1 > y$.

8.№ 27 [4, с. 79] Сформулювати властивості відношень, визначених на множині, користуючись поняттями пари і графіка відношення.

IV. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні питання. Функції і відображення.

Практичні завдання.

1. Побудувати граф і точковий графік відношень ρ, ρ^{-1} і $\overline{\rho}$ між елементами множини A та встановити властивості цих відношень, якщо:

A = {1, 2, 3, 4, 5} і відношення ρ визначено так: $x \rho$ у тоді і тільки тоді, коли $x + y > 5$;

2. №29 [4, с.80]. Вибрати серед відношень ті, за допомогою яких можна впорядкувати множину студентів групи:

1) "бути старшим (за віком)",

2) "відвідувати один і той же гурток художньої самодіяльності",

3) "бути не вищим (за зростом)".

3. № 519[8, с.103]. Записати класи еквівалентності, що визначаються відношенням ρ, заданим на множині X = {a, b, c, p}, якщо:

а) ρ = {(a, a), (b, b), (c, c), (p, p) (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)};

б) ρ = {(a, a), (b, b), (c, c), (p, p) (a, b), (b, a), (c, p), (p, c)}.

4. №526[8, с.103]. На множині X = {a, b, c, p} задано відношення M. Чи є воно відношенням порядку, якщо:

а) M = {(a, b), (a, c),), (a, p), (b, c), (p, b,)};

б) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p) (a, b), (b, c), (a, c)\}$;
в) $M = \{(a, b), (a, c) (a, p)\}$?

Тема 3: «Функції і відображення. Рівнопотужні множини»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

ІІ. Теоретичні питання.

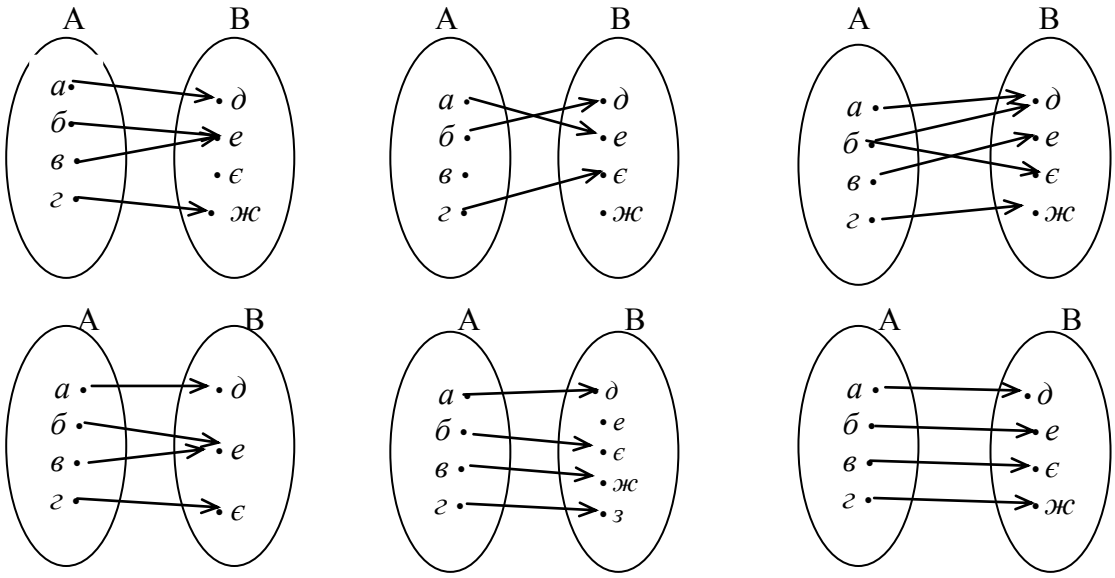
1. Означення функції та її основні характеристики.
2. Числові функції та числові послідовності.
3. Способи задання функцій.
4. Означення всюди визначеної функції та відображення.
5. Означення відображення множини в себе.
6. Види відображень.
7. Теорема про існування оберненого відображення φ^{-1} до відображення φ.
8. Теореми про відображення об‘єднання та різниці множин.
9. Означення відношення рівнопотужності множин та його властивості. Потужність множини.
10. Означення скінченої і нескінченної множин.
11. Теорема про об‘єднання рівнопотужних множин.

ІІІ. Практичні завдання.

1. Яким повинен бути графік і граф відношення між елементами двох множин, щоб воно було:
   1) функціональним? 2) відображенням?
2. Яким повинен бути точковий графік відношення у множині дійсних чисел, щоб воно було функціональним?
3. Чи кожна лінія на координатній площині задає функціональне відношення у множині дійсних чисел?
4. Для якого виду відображень обернене до нього відношення є:
   1) функцією? 2) відображенням?

5. Серед графів, зображених на рисунку, вказати такі, що є графами:

а) функції; б) відображення: – сюр‘єктивного;
– ін‘єктивного;
– бієктивного.



У яких випадках множини А і В рівнопотужні?

6. Знайти потужність множин А, В, А $\cap$ *B,* А $\cup$ В, якщо А = {*a, в, c, d, e*} В = {*c, e, f, k*}.

7. Встановити чи буде відношення φ між елементами множин А та В відображенням і якщо так, то вказати його вид. Чи буде φ^{-1} відображенням, якщо А = {картопля, вишня, айстра, лобода, малина},

В = {квіти, овочі, бур’яни, фрукти},

φ - „*x* належить виду *y*”.

Завдання на повторення

8. Побудувати граф відношення ρ заданого між елементами множини А = {прямий, український, дерев’яний, гострий, прямокутний} і В = {кут, стовп, стіл, словник, ніж}, якщо *x* ρ *y* тоді і тільки тоді, коли *x* і *y* становлять назву поняття. Встановити область визначення і область значення відношення ρ, повний образ і повний прообраз підкреслених елементів.

IV. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні питання. Комбінаторні задачі. Алгоритми.

Практичні завдання. Підготуватися до написання контрольної роботи.

1. Побудувати граф відношення ρ між елементами множин A і B. Знайти область визначення і область значення відношення ρ. Для вказаних (підкреслених) елементів із даних множин знайти відповідно їх повний образ і повний прообраз, якщо:

A = {ручка, олівець, молоток, віник, яблуко}

B = {інструмент, посуд, шкільне приладдя, фрукт}

φ – „*x* належить виду *y*”

2. Побудувати граф і точковий графік відношення ρ, ρ^{-1}, $\overline{\rho}$ між елементами множини A та встановити властивості цих відношень, якщо A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} і відношення ρ визначено так: $x \rho y$, тоді і тільки тоді, коли $x + y > 3$;

3. Встановити, чи буде відношення φ між елементами множин A і B відображенням множини *A* у множину *B*. Якщо φ відображення, то встановити його вид. З’ясувати чи буде обернене відношення φ^{-1} відображенням, якщо A = {вчора, два, куб, і, вчитися, але}, B = {іменник, дієслово, числівник, сполучник}, φ – „слово *x* належить частині мови *y*”.

Тема 4: «Комбінаторні задачі. Алгоритми»

I. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

II. Теоретичні питання.

1. Які задачі називаються комбінаторними?
2. Який розділ математики називається комбінаторикою?
3. Сформулювати правило суми.
4. Сформулювати правило добутку.
5. Алгоритм та його властивості. Приклади алгоритмів.

III. Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна вибрати один фрукт з 5 яблук і 4 груш, що лежать у вазі? Скількома способами можна вибрати пару фруктів: одне яблуко і одну грушу? Якщо один такий вибір зроблено, то скількома способами можна зробити наступний вибір такої пари фруктів?

2. №46. [4, с. 81]. Скільки чисел, менших 8000, можна записати за допомогою цифр 5, 7 і 9? Скільки серед них існує таких, в запису яких цифри не повторюються?

3. Скільки можна записати різних парних (непарних) п’ятицифрових чисел за допомогою цифр десяткової системи числення, якщо:
   а) цифри в запису числа повторюються;
   б) цифри в запису числа не повторюються.

4. №24. [4, с. 79] Одному з учнів було дано завдання написати замітку у газету про стан успішності його класу за першу чверть. Він узяв журнал і виписав такі відомості про всіх 40 учнів класу:

   25 учнів не мають "трійок" із української мови;

   28 учнів не мають "трійок" із математики;

   31 учень не має "трійок" із фізики;

   22 учні не мають "трійок" з математики і фізики;

   16 учнів не мають "трійок" з математики і української мови;

   16 учнів не мають "трійок" із фізики і української мови;

   12 учнів навчаються без "трійок " з усіх навчальних дисциплін.

   Прочитавши замітку, редактор газети сказав учневі, що він помилився при підрахунках. Пояснити, чому подані відомості неправильні.

5. №43. [4, с. 81] Скласти алгоритм розв′язування задачі: “Сума двох чисел дорівнює a, а їх різниця – b. Знайти ці числа”.
6. Скласти алгоритм додавання 2-х багатоцифрових чисел у стовпчик.

IV. Завдання для самостійної роботи

Теоретичні питання. Висловлення та операції над ними.

Практичні завдання.

1. №42. [4, с. 81] Скласти алгоритм переходу вулиці в дозволеному місці, де відсутні світлофори.
2. №44. [4, с. 81] Скласти алгоритм розв’язування квадратного рівняння.
3. №50. [4, с. 81] Скільки є шестицифрових чисел, записаних різними цифрами, першою цифрою яких є число 5?
4. №51. [4, с. 81]. Скільки наборів букв можна скласти із усіх букв слова “математика”?
5. Скількома способами можна вибрати одну книгу з 10 написаних українською і 7 російською, мовою? Скількома способами з даних книг можна вибрати 2 книги: одну написану українською, а другу російською мовами?

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Завдання 1.

1. Скільки можна записати різних п’ятицифрових чисел за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо: а) цифри в запису числа можуть повторюватися? б) цифри в запису числа не повторюються?

2. Скільки можна записати різних чотирицифрових чисел за допомогою всіх цифр десяткової системи числення, якщо: а) цифри в запису числа не повторюються? б) цифри в запису числа можуть повторюватися?

3. Скільки можна записати різних парних чотирицифрових чисел за допомогою всіх цифр десяткової системи числення, якщо: а) цифри в запису числа не повторюються? б) цифри в запису числа можуть повторюватися?

4. На вершину гори ведуть п’ять доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї, якщо: а) підняття і спуск можуть проходити по одній і тій же дорозі? б) підняття і спуск проходять різними дорогами?

5. В зеленому куточку класу є 4 вазони тюльпанів і 5 вазонів гвоздик. Скількома способами можна вибрати по одному із вазонів? Якщо такий вибір зроблено, то скількома способами його можна зробити ще раз?

6. Скільки можна записати різних непарних чотирицифрових чисел за допомогою усіх цифр десяткової системи числення, якщо: а) цифри в запису числа можуть повторюватися? б) цифри в запису числа не повторюються?

7. Є шість пар рукавичок різного розміру. Скількома способами можна вибрати одну рукавичку на ліву руку, а другу на праву? Скількома способами можна вибрати одну рукавичку на ліву руку, а другу на праву так, щоб вони були різного розміру?

8. Є три екземпляри підручника алгебри, сім екземплярів підручника геометрії і п’ять підручників історії. Скількома способами можна вибрати один із цих підручників? Скількома способами з них можна вибрати по одному підручнику?

9. Є 12 слів чоловічого роду, дев’ять слів жіночого і 10 слів середнього роду. Скількома способами можна вибрати одне з даних слів? Скількома способами можна вибрати по одному слову кожного роду?

10. Скільки можна записати різних непарних п’ятицифрових чисел за допомогою всіх цифр десяткової системи числення, якщо: а) цифри в запису числа не повторюються? б) цифри в запису можуть повторюватися?

Зразок розв'язування. Скільки у десятковій системі числення є чотирицифрових чисел, що діляться на 5? Скільки серед них таких, у запису яких цифри не повторюються?

►1. Чотирицифрові числа у десятковій системі численні є не чим іншим, як кортежами довжиною 4, компоненти яких вибираються із множини цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Перша цифра може бути вибрана 9 способами, тому що запис багатоцифрового числа не може починатися із нуля. Другою і третьою цифрами може бути будь-яка із 10 цифр. Отже, кожна з них може бути вибрана 10 способами. Четверта, остання цифра у запису чотирицифрового числа, може бути вибрана двома способами, бо число, записане в десятковій системі числення, ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра є 0 чи 5.

З цих міркувань, за правилом добутку, одержуємо, що всього різних чотирицифрових чисел, записаних у десятковій системі числення, які діляться на 5, є

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800.$$

2. Нехай X – множина чотирицифрових чисел, що діляться на 5 і в запису яких цифри не повторюються. Її можна розбити на два класи: X_0 – множина чисел, які закінчуються цифрою 0, і X_5 – множина чисел, які закінчуються цифрою 5, бо $X_0 \cup X_5 = X$ і $X_0 \cap X_5 = \varnothing$. Підрахуємо число елементів у кожній з цих множин. Чотирицифрові числа кожного класу будуть відрізнятися одне від одного тільки першими трьома цифрами, які вибираються з множини {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} для класу X_0, і з множини {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} для класу X_5.

Перша цифра з класу X_0 може бути вибрана 9 способами, друга – 8, бо одна вже взята, а цифри в запису

числа не повторюються, а третя – 7 способами. Звідси, за правилом добутку, одержуємо, що різних чисел у класі X_0 є

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Перша цифра числа класу X_5 може бути вибрана 8 способами, друга – також 8, а третя – 7 способами. Звідси, за правилом добутку, одержуємо, що різних чисел у класі X_5 є

$$8 \cdot 8 \cdot 7 = 448.$$

Для підрахунку числа елементів множини X скористуємося правилом суми і одержимо

$$|X| = |X_0| + |X_5| = 504 + 448 = 952.$$

Відповідь: у десятковій системі числення є всього 1800 різних чотирицифрових чисел, що діляться на 5, серед яких 952 числа, що в їх запису цифри не повторюються. ◄

Завдання 2. Побудувати граф відношення ρ між елементами множин A і B. Знайти області визначення і значення відношення. Для вказаних (підкреслених) елементів із даних множин знайти відповідно їх повний образ і повний прообраз, якщо:

1. A = {ліс, але, бігти, лис, і, у };
   B = {іменник, дієслово, прикметник, сполучник},
   ρ – "слово x належить частині мови y".
2. A = {Умань, Київ, Прага, Братіслава, Париж },
   B = {Україна, Чехія, Словакія, Угорщина, Франція},
   ρ – "місто x знаходиться в країні y".
3. A = {натуральне, просте, прямий, ціле, гострий},
   B = {число, кут, множина, речення},
   ρ – "слова x і y складають назву поняття".
4. A = {просте, складене, складне, підрядне},
   B = {число, речення, набір, елемент},
   ρ – "слово x і y складають назву поняття".
5. A = {алгебра, амфора, веселий, веселити, веселка, але.},
   B = {іменник, прикметник, прийменник, дієслово},
   ρ – "слово x належить частині мові y".

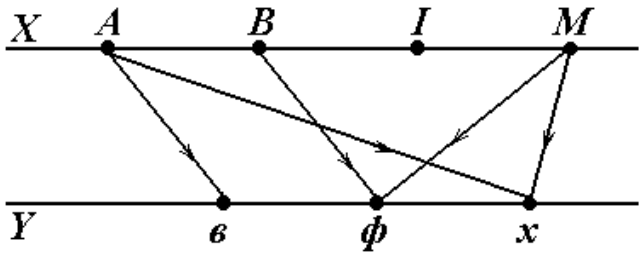
6. A = {а, в, д, ф, п},
B = {азбука, арфа, борода, віл},
ρ – “буква x входить до складу слова y”.
7. A = {струна, гриф, клавіша, камертон},
B = {балалайка, скрипка, рояль, клавесин},
ρ – “предмет x є складовою частиною інструмента y”.
8. A = {дуб, ялина, листок, малина, смородина, липа},
B = {хвойне дерево, листяне дерево, кущ},
ρ – “елемент x належить виду y”.
9. A = {бісектриса, висота, медіана, пряма, промінь},
B = {кут, паралелограм, трикутник, коло},
ρ – “x є елементом геометричної фігури y”.
10. A = {а, б, в, г, д},
B = {алгебра, геометрія, географія, геологія, ботаніка, біологія},
ρ – “буква x є початковою буквою слова y”.

Зразок розв’язування. У сім’ї чотири брати. Всі брати, крім Івасика, якому лише 2 роки, займаються спортом, причому Микола – хокеєм і футболом, Василь – футболом, а Андрій – волейболом і хокеєм. Побудувати граф відношення ρ – „займатися спортом” між множиною дітей X = {Андрій, Василь, Івасик, Микола} і множиною видів спорту Y = {волейбол, футбол, хокей}. Знайти: 1) область визначення і область значення відношення, 2) повні образи елементів "Івасик" і "Микола" та повний прообраз елемента "волейбол".

► Позначимо для зручності елементи множин X і Y їх початковими буквами і запишемо графік відношення

$$\rho = \{(A; в), (A; х), (М; ф), (М; х), (В; ф)\}.$$

Тепер побудуємо граф відношення ρ, мал. 11.



Мал. 11.

Для відношення $\rho \subset X \times Y$ знаходимо:

1) область визначення $D(\rho) = \{A, B, M\}$;
2) область значення $E(\rho) = \{в, ф, х\}$;
3) повний образ елемента "Івасик" $\rho\,(I) = \varnothing$;
4) повний образ елемента "Микола" $\rho\,(M) = \{ф, х\}$;
5) повний прообраз елемента "волейбол" $\rho^{-1}(в) = \{A\}$.

Тому що $E(\rho) = Y$, то відношення сюр'єктивне. ◄

Завдання 3. Побудувати граф і точковий графік відношень ρ, ρ^{-1} і $\overline{\rho}$ між елементами множини А та встановити властивості цих відношень, якщо:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x + y$ є числом парним.
2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і відношення ρ визначається так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x - y$ ділиться на 3.
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x \cdot y > 9$.
4. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$.
5. $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли x ділиться на y.
6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x \le y$.
7. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x \ge y$.
8. $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли x є дільником y.
9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x + 1 > y$.

10. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ і відношення ρ визначено так: $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x - y$ ділиться на 2.

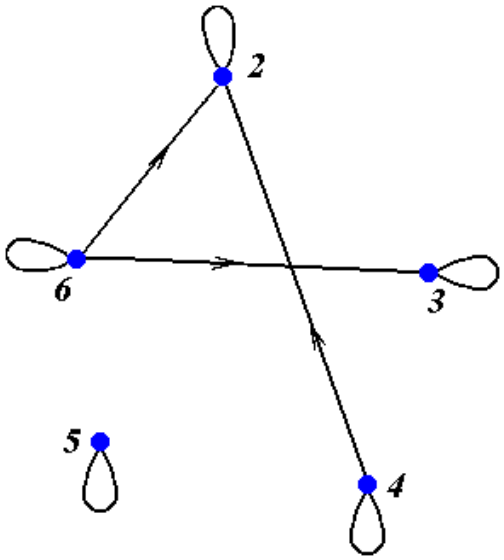
Зразок розв'язування. Побудувати граф і точковий графік відношень ρ, ρ^{-1} і $\overline{\rho}$ між елементами множини $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, якщо $x\rho y$ тоді і тільки тоді, коли x ділиться на y, тобто $x \vdots y$. Встановити властивості цих відношень.

►1. Для розв'язування задачі знайдемо декартів квадрат множини A, який зручно записати у вигляді таблиці:

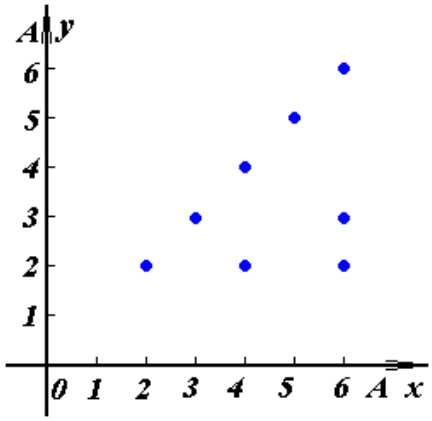
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

2. Знаходимо графік відношення ρ. Щоб не записувати його, підкреслимо в декартовому квадраті множини A ті пари, які складають графік відношення.

Будуємо граф (мал. 1) і точковий графік (мал. 2) відношення ρ.



Мал. 1



Мал. 2

Відношення ρ :

1) рефлексивне, бо в кожній вершині його графа є петля, а точковому графіку належать всі можливі точки бісектриси 1 –

3 координатних кутів;

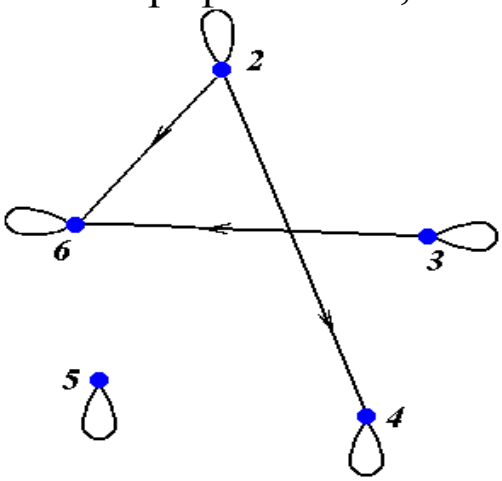
2) антисиметричне, бо подвійних дуг, крім петель, його граф не має, а точковий графік не симетричний відносно бісектриси 1 – 3 координатних кутів;

3) транзитивне, бо для довільних елементів *x*, *y* і *z*, множини *A*, якщо $x \rho y$ і $y \rho z$, то й $x \rho z$.

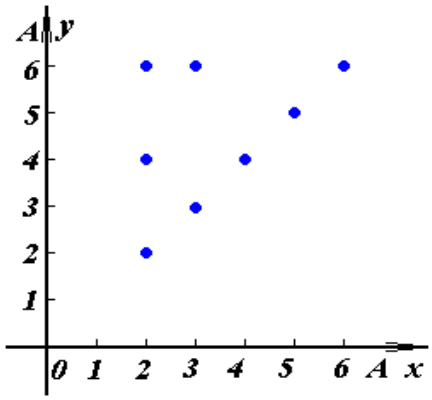
3.Знаходимо тепер графік відношення ρ^{-1}:

$\rho^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 4), (5, 5), (2, 6), (3, 6), (6, 6)\}$.

Будуємо граф і точковий графік відношення ρ^{-1}, мал. 3 і 4 відповідно. Точкові графіки відношень ρ і ρ^{-1} симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, а їх графи відрізняються лише напрямком дуг. Отже, відношення, ρ^{-1} має ті ж властивості, що й відношення ρ, а саме: воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

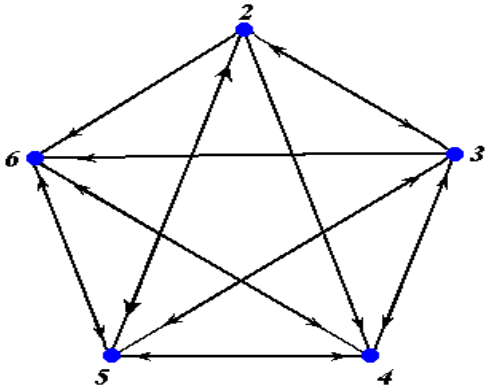


Мал. 3

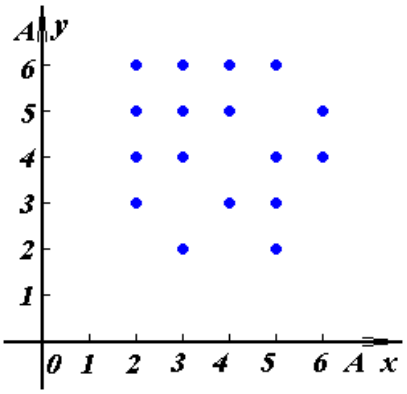


Мал. 4

4. На основі означення відношення протилежного даному, одержуємо, що не підкреслені пари в декартовому квадраті множини *A* будуть складати граф відношення $\overline{\rho}$.



Мал. 5



Мал. 6

Будуємо граф (мал. 5) і точковий графік (мал. 6) відношення $\overline{\rho}$.

Відношення $\overline{\rho}$: 1) антирефлексивне, бо на його графі відсутні петлі, а точковому графіку не належить жодна із можливих точок бісектриси 1 – 3 координатних кутів;

2) зв'язне, на його графі довільні дві різні вершини з'єднані принаймні однією дугою, а точковому графіку належить принаймні одна із можливих симетричних точок відносно бісектриси 1 – 3 координатних кутів, що їй не належать. ◄

Завдання 4. Встановити, чи буде відношення φ між елементами множин A і B відображенням множини A у множину B, і якщо воно відображення, то встановити його вид. З'ясувати, чи буде обернене відношення φ^{-1} відображенням, якщо:

1. φ – "місто x знаходиться в країні y",
A – {Київ, Умань, Париж, Варшава},
B – {Україна, Польща, Франція}.
2. φ – "слово x належить частині мови y",
A – {азбука, арфа, пливти, плести, сміливий},
B – {дієслово, іменник, прикметник}.
3. φ – "слову x ставиться у відповідність його початкова буква y",
A = {азбука, алгебра, гарба, береза},
B = {а, б, в, г}.
4. φ – "слово x належить частині мови y",
A = {арфа, спати, залізний, два},
B = {дієслово, числівник, прикметник, іменник}.
5. φ – "місто x знаходиться в країні y",
A = {Київ, Краків, Брно, Пловдів},
B = {Болгарія, Польща, Україна, Чехія}.
6. φ – "тварина x належить виду y",
A = {щука, лев, вуж, орел},

B = {ссавці, птахи, плазуни, риби}.

7. φ – "тварина x належить виду y",

A = {лящ, щука, тигр, пантера, голуб},

B = {плазуни, птахи, риби, ссавці}.

8. φ – "країна x знаходиться в частині світу y",

A = {Болгарія, Польща, В'єтнам, Куба, Монголія},

B = {Азія, Америка, Африка, Європа}.

9. φ – "місто x знаходиться в республіці y",

A = {Донецьк, Орел, Тарту, Рига, Вільнюс},

B = {Латвія, Росія, Україна, Естонія, Литва}.

10. φ – "рослина x належить виду y",

A = {сосна, горобина, малина, ялівець},

B = {листяне дерево, хвойне дерево, кущ}.

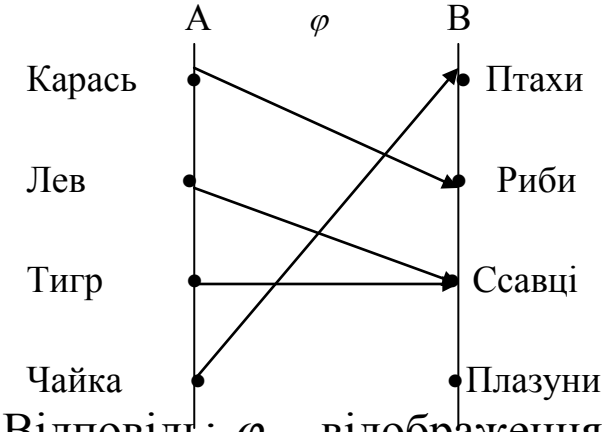
Зразок розв'язування.

A = {карась, лев, тигр, чайка},

B = {птахи, риби, ссавці, плазуни},

φ – "тварина x належить виду y".

► Побудуємо граф відношення φ.



Відповідь: φ – відображення, бо воно є функціональним (кожному елементу множини A відповідає не більш як один елемент з множини B) і всюди визначеним ($D(\rho) = A$) відношенням. Відображення φ не сюр'єктивне, бо $E(\rho) \neq B$ і не ін'єктивне, бо різні елементи множини A (лев і тигр) мають один і той же образ (ссавці). А так як φ не сюр'єктивне і не ін'єктивне, то воно не бієктивне, тому обернене відношення φ^{-1} не буде відображенням. ◄

ТЕСТИ

Відношення (Модуль 2)

1. Відношенням між елементами двох множин A і B називається:

а) декартів добуток множин A і B;

б) власна підмножина множини $A \times B$;

в) довільна підмножина декартового добутку множин A і B;

г) довільна підмножина множини $A \times B$.

2. Довільна підмножина декартового добутку двох множин A і B називається:

а) відношенням між елементами двох множин A і B

б) областю відправлення відношення;

в) областю прибуття відношення;

г) областю визначення відношення.

3. Те що ρ є відношенням між елементами множин A і B записується:

а) $\rho : \subset A \times B$;

б) $\rho(x) := \{y \in B \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

в) $\rho^{-1}(y) := \{x \in A \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

г) $\rho : \in A \times B$.

4. Повним образом елемента $x \in A$ називається:

а) $\rho : \subset A \times B$;

б) $\rho(x) := \{y \in B \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

в) $\rho^{-1}(y) := \{y \in A \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

г) $\rho : \in A \times B$.

5. Повним прообразом елемента $y \in B$ називається:

а) $\rho : \subset A \times B$;

б) $\rho(x) := \{y \in B \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

в) $\rho^{-1}(y) := \{y \in A \mid x \rho y, \rho \subset A \times B\}$;

г) $\rho : \in A \times B$.

6. Графіком відношення ρ називається:

а) множина точок координатної площини, координати яких збігаються з відношенням ρ;

б) множина впорядкованих пар, що складають відношення ρ;

в) множина всіх перших компонент графіка відношення ρ;
г) множина всіх других компонент графіка відношення ρ.

7. Областю відправлення відношення $\rho \subset A \times B$ називається:
а) множина A;
б) множина впорядкованих пар, що складають відношення ρ;
в) множина всіх перших компонент графіка відношення ρ;
г) множина B.

8. Областю визначення відношення ρ називається:
а) множина точок координатної площини, координати яких збігаються з відношенням ρ;
б) множина впорядкованих пар, що складають відношення ρ;
в) множина всіх перших компонент графіка відношення ρ;
г) множина всіх других компонент графіка відношення ρ.

9. Областю значень відношення ρ називається:
а) множина точок координатної площини, координати яких збігаються з відношенням ρ;
б) множина впорядкованих пар, що складають відношення ρ;
в) множина всіх перших компонент графіка відношення ρ;
г) множина всіх других компонент графіка відношення ρ.

10. Область визначення відношення ρ позначається:
а) D(ρ); б) E(ρ); в) ρ (x); г) ρ (y).

11. Область значення відношення ρ позначається:
а) D(ρ); б) E(ρ); в) ρ (x); г) ρ (y).

12. Які записи є правильними?
а) $D(\rho) \subset A$; б) $D(\rho) \subset B$; в) $E(\rho) \subset B$; г) $E(\rho) \subset A$?

13. Відношення називається всюди визначеним, якщо:
а) $D(\rho) = A$; б) $D(\rho) = B$; в) $E(\rho) = B$; г) $E(\rho) = A$.

14. Відношення називається сюр'єктивним, якщо:
а) $D(\rho) = A$; б) $D(\rho) = B$; в) $E(\rho) = B$; г) $E(\rho) = A$.

15. Множина точок і відрізків, які попарно з'єднують деякі з цих точок називається:
а) графом; б) графіком; в) точковим графіком; г) схемою.

16. Відрізки, які з'єднують вершини графа, називаються:
а) променями; б) сторонами; в) дугами; г) ребрами.

17. Якщо на ребрах графа вказано напрями, то граф називається:

а) повним; б) зв'язним; в) орієнтованим; г) точковим.

18. У якому випадку вказано всі способи задання відношення між елементами довільних двох множин:

а) графіком (множиною пар); графом; таблицею; характеристичною властивістю пар, що належать графіку відношення; точковим графіком;

б) графіком (множиною пар); графом; таблицею; характеристичною властивістю пар, що належать графіку відношення схемою;

в) точковим графіком;

г) графом?

19. Протилежним відношенням до відношення $\rho \subset A \times B$ називається:

а) різниця між декартовим добутком множин A і B та відношенням ρ;

б) множина пар $(x; y) \in A \times B$ таких, що $(x; y) \notin \rho$;

в) довільна підмножина декартового добутку множини A і B;

г) відношення визначене між елементами множин B і A, яке складається з тих і тільки тих пар (y; x) таких, що $(x; y) \in \rho$.

20. Оберненим відношенням до відношення $\rho \subset A \times B$ називається:

а) різниця між декартовим добутком множин A і B та відношенням ρ;

б) множина пар $(x; y) \in A \times B$ таких, що $(x; y) \notin \rho$;

в) довільна підмножина декартового добутку множини A і B;

г) відношення визначене між елементами множин B і A, яке складається з тих і тільки тих пар (y; x) таких, що $(x; y) \in \rho$.

21. Символом $\overline{\rho}$ позначається:

а) обернене відношення; в) протилежне відношення;

б) сюр'єктивне відношення; г) всюдивизначене відношення.

22. Відношенням на множині (між елементами множини) називається:

а) довільна підмножина декартового добутку двох множин A і B;

б) декартів добуток двох множин А і В;
в) множина всіх впорядкованих пар, таких, що перша компонента належить першій множині, а друга – другій;
г)відношення між елементами множин А і В таких, що А = В.

23. Запис $\rho : \subset A^2$ є символічним записом означення:
а) декартового добутку множин;
б) відношення між елементами двох множин;
в) оберненого відношення до відношення ρ;
г) відношення на множині А.

24. Серед тверджень виберіть ті, що є особливостями графа відношення на множині *А*:
а) області відправлення і прибуття збігаються (один круг Ейлера);
б) можуть бути петлі;
в) гриф складається з двох кругів Ейлера;
г) можуть бути подвійні дуги.

25. У якому випадку вказано повний набір властивостей відношення на множині:
а) комутативна, асоціативна, дистрибутивна, монотонна, антисиметрична;
б) рефлексивна, антирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, зв'язна;
в) ідемпотентності, де Моргана, подвійного заперечення, зв'язна;
г) рефлексивна, симетрична, транзитивна?

26. Відношення називають відношенням еквівалентності, якщо воно:
а) рефлексивне, симетричне, транзитивне, зв'язне;
б) антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне;
в) рефлексивне, транзитивне, зв'язне;
г) рефлексивне, симетричне, транзитивне.

27. Відношення *ρ* на множині *А* називають рефлексивним, якщо:
а) для будь-яких двох елементів $\boldsymbol{x}$ *і* $\boldsymbol{y} \in A$*, з того, що* $\boldsymbol{x}$ *перебуває з* $\boldsymbol{y}$ *у відношенні ρ слідує, що й* $\boldsymbol{y}$ *перебуває у відношенні ρ з* $\boldsymbol{x}$*;*

б) будь-який з елементів множини А перебуває у відношенні ρ сам з собою;

в) для будь-яких трьох елементів ***x; y****, z ∈ А, виконується умова: з того, що* ***x*** *з* ***y*** *перебуває у відношенні ρ і* ***y*** *з* ***z*** *перебуває у відношенні ρ слідує, що* ***x*** *з z перебуває у відношенні ρ;*

г) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y****, що належать множині А, виконується одна з умов: або* ***x*** *перебуває у відношенні ρ з* ***y****, або -* ***y*** *з* ***x****, або -* ***x*** *=* ***y****.*

28. Відношення *ρ* між елементами множини *А* називається симетричним, якщо:

а) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y*** *∈ А, з того, що* ***x*** *перебуває з* ***y*** *у відношенні ρ слідує, що* ***y*** *перебуває у відношенні ρ з* ***x****;*

б) будь-який з елементів множини А перебуває у відношенні ρ сам з собою;

в) для будь-яких трьох елементів ***x, y****, z ∈ А, виконується умова: з того, що* ***x*** *з* ***y*** *перебуває у відношенні ρ і* ***y*** *з z перебуває у відношенні ρ слідує, що* ***x*** *з z перебуває у відношенні ρ;*

г) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y****, що належать множині А, виконується одна з умов: або* ***x*** *перебуває у відношенні ρ з* ***y****, або -* ***y*** *з* ***x****, або -* ***x*** *=* ***y****.*

29. Відношення *ρ* між елементами множини *А* називається транзитивним, якщо:

а) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y*** *∈ А, з того, що* ***x*** *перебуває з* ***y*** *у відношенні ρ слідує, що* ***y*** *перебуває у відношенні ρ з* ***x****;*

б) будь-який з елементів множини А перебуває у відношенні ρ сам з собою;

в) для будь-яких трьох елементів ***x; y****, z ∈ А, виконується умова: з того, що* ***x*** *з* ***y*** *перебуває* ***y*** *відношенні ρ і* ***y*** *з z перебуває у відношенні ρ, слідує, що* ***x*** *перебуває з z у відношенні ρ;*

г) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y****, що належать множині A, виконується одна з умов: або* ***x*** *перебуває у відношенні ρ з* ***y****, або -* ***y*** *з* ***x****, або -* ***x*** *=* ***y****.*

30. Відношення *ρ* між елементами множини *A* називається зв'язним, якщо:

а) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y*** *∈ A, з того, що* ***x*** *перебуває з* ***y*** *у відношенні ρ слідує, що* ***y*** *перебуває у відношенні ρ з* ***x****;*

б) будь-який з елементів множини A перебуває у відношенні ρ сам з собою;

в) для будь-яких трьох елементів ***x****;* ***y****,* z *∈ A, виконується умова: з того, що* ***x*** *з* ***y*** *перебуває* ***y*** *відношенні ρ і* ***y*** *з* z *перебуває у відношенні ρ, слідує, що* ***x*** *перебуває з* z *у відношенні ρ;*

г) для будь-яких двох елементів ***x*** *і* ***y****, що належать множині A, виконується одна з умов: або* ***x*** *перебуває у відношенні ρ з* ***y****, або -* ***y*** *з* ***x****, або -* ***x*** *=* ***y****.*

31. Відношення *ρ* між елементами множини *A* називається рефлексивним, якщо для будь-яких елементів *x, y і z* з множини *A* виконується умова:

а) x ρ x; *в) або x ρ y, або y ρ x, або x = y;*

б) якщо x ρ y, то $\overline{y \rho x}$ *;* *г)якщо x ρ y і y ρ* z*, то x ρ* z*.*

32. Відношення *ρ* між елементами множини *A* називається транзитивним, якщо для будь-яких елементів *x, y і z* з множини *A* виконується умова:

а) x ρ x; *в) або x ρ y, або y ρ x, або x = y;*

б) якщо x ρ y, то $\overline{y \rho x}$ *;* *г)якщо x ρ y і y ρ* z*, то x ρ* z*.*

33. Відношення *ρ* між елементами множини *A* називається симетричним, якщо для будь-яких елементів *x, y і z* з множини *A* виконується умова:

а) x ρ x; *в) або x ρ y, або y ρ x, або x = y;*

б) якщо x ρ y, то і y ρ x; *г)якщо x ρ y і y ρ* z*, то x ρ* z*.*

34. Відношення ρ між елементами множини A називається зв'язним, якщо для будь-яких елементів x, y і z з множини A виконується умова:

а) $x \rho x$; *в) або* $x \rho y$, *або* $y \rho x$, *або* $x = y$;

б) якщо $x \rho y$, *то і* $y \rho x$; *г)якщо* $x \rho y$ *і* $y \rho z$, *то* $x \rho z$.

35. Відношення ρ між елементами множини A називається антисиметричним, якщо для будь-яких елементів x, y і z з множини A виконується умова:

а) $x \rho x$; *в) або* $x \rho y$, *або* $y \rho x$, *або* $x = y$;

б) якщо $x \rho y$, *то* $\overline{y \rho x}$; *г)якщо* $x \rho y$ *і* $y \rho z$, *то* $x \rho z$.

36. Відношення ρ між елементами множини A називається антирефлексивним, якщо:

а) для довільного $x \in M$ *виконується умова* $\overline{x \rho x}$;

б) для довільного $x, y \in M$ *виконується умова* $x \rho y$, *то* $\overline{y \rho x}$;

в) для довільного $x, y \in M$ *виконується умова* $x \rho y$, *або* $y \rho x$, *або* $x = y$;

г) для довільних $x, y, z \in M$ *виконуєтьсяумова якщо* $x \rho y$ *і* $y \rho z$, *то* $x \rho z$.

37. Відношення ρ, визначене на множині A, називається відношенням порядку, якщо воно:

а) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

б) антисиметричне і транзитивне;

в) антирефлексивне і транзитивне;

г) антирефлексивне і зв'язне.

38. Відношення ρ, визначене на множині A, називається відношенням строгого порядку, якщо воно:

а) антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне;

б) рефлексивне, антисиметричне і транзитивне;

в) антисиметричне, транзитивне і зв'язне;

г) антисиметричне, транзитивне і не зв'язне.

39. Відношення порядку ρ, визначене на множині A, називається відношенням лінійного порядку, якщо воно:

а) симетричне; б) не зв'язне; в) зв'язне; г) рефлексивне.

40. Відношення порядку ρ, визначене на множині A, називається відношенням часткового порядку, якщо воно:

а) симетричне; б) не зв'язне; в) зв'язне; г) рефлексивне.

41. Відношення ρ визначене між елементами двох множин A і B називається всюди визначеним, якщо:
а) $D(\rho) = A$; б) $E(\rho) = B$; в) воно сюр'єктивне; г) $A = B$.

42. Відношення ρ між елементами множини збігається з оберненим йому відношенням тоді і тільки тоді, коли воно:
а) всюди визначене; *в) рефлексивне;*
б) симетричне; *г)транзитивне.*

43. Відношення ρ^{-1} на множині має ті ж самі властивості, що й відношення ρ:
а) якщо ρ рефлексивне; *в) якщо ρ симетричне;*
б) якщо ρ транзитивне; *г) завжди.*

44. Якщо ρ - відношення еквівалентності на множині A і a – довільний елемент множини A, то класом елементів еквівалентних елементу a називається:
а) повний образ елемента а;
б) повний прообраз елемента а;
в) область визначення відношення ρ;
г) область значення відношення ρ.

45. Якщо ρ - відношення еквівалентності на множині A, то для довільних двох класів еквівалентності K_a і $K_в$ має місце:
а) одне і тільки одне з відношень: або ці класи не перетинаються або вони збігаються;
б) $K_a = K_в$, якщо $a = в$. *в) $K_a \cap K_в \neq \varnothing$;* *г) $K_a \subset K_в$.*

46. Відношення φ між елементами множин A і B називається функцією з множини A у множину B, якщо:
а) кожному елементу множини А ставиться у відповідність тільки один елемент з множини В;
б) кожному елементу з множини А ставиться у відповідність не більш як один елемент з множини В;
в) кожному елементу з множини А ставиться у відповідність більш як один елемент з множини В;
г) різні елементи множини А мають різні образи.

47. При функціональному відношенні, довільний елемент $x \in D(\varphi)$ називають:

а) значенням функції; *в) аргументом функції;*

б) повним прообразом елемента y; *г) незалежною змінною.*

48. При функціональному відношенні, довільний елемент $y \in E(\varphi)$ називають:

а) значенням функції; *в) незалежною змінною;*

б) залежною змінною; *г) повним образом елемента x.*

49. Функцією ***y*** множині А називають функціональне відношення між елементами множин А і В, якщо:

а) A = B; *б) $A \subset B$;* *в) $B \subset A$;* *г) $D(\rho) = A$.*

50. Числовою функцією називається:

а) всюди визначена функція;

б) функція у множині дійсних чисел;

в) функція, область визначення якої є множина натуральних чисел;

г) функція у множині раціональних чисел.

51. Числовою послідовністю називається:

а) всюди визначена функція;

б) функція у множині дійсних чисел;

в) функція, область визначення якої є множина натуральних чисел;

г) функція у множині раціональних чисел.

52. Відмінність задання числових функцій від інших полягає в тому, що вона може бути задана ще:

а) таблицею; *в) за допомогою точкового графіка;*

б) графом; *г) аналітичним способом (виразом).*

53. Вказати способи задання будь-якої функції:

а) множиною пар (графіком), графом, таблицею; характеристичною властивістю пар її графіка;

б) характеристичною властивістю пар її графіка, графом, таблицею;

в) множиною пар (графіком), характеристичною властивістю пар її графіка, графом, таблицею, точковим графіком, аналітичним способом (виразом);

г) точковим графіком, графом, аналітичним способом (виразом).

54. Відображенням множини A у множину B називається:

а) всюди визначена функція;

б) відношення між елементами множин A і B, при якому кожному елементу множини A ставиться у відповідність один і тільки один елемент з множини B;

в) сюр'єктивне відношення; *г) числова функція.*

55. Відображенням множини в себе називається:

а) сюр'єктивне відображення;

б) ін'єктивне відображення;

в) бієктивне відображення;

г) відображення, у якого область визначення дорівнює області прибуття.

56. Повний образ елемента $x \in A$ при відображені складається з:

а) не більше як одного елемента;

б) тільки з одного елемента;

в) більш як з одного елемента;

г) з двох елементів.

57. Відображення φ множини A у множину B називається сюр'єктивним, якщо:

а) між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність;

б) область його значень дорівнює області прибуття;

в) елементи його області визначення мають різні образи;

г) область відправлення збігається з областю визначення.

58. Відображення φ множини A у множину B називається ін'єктивним, якщо:

а) між множинами можна встановити взаємно однозначну відповідність;

б) його область значень дорівнює області прибуття;

в) різні елементи його області визначення мають різні образи;
г) область відправлення збігається з областю визначення.

59. Відображенням множини на множину називається:
а) відображення у якого область визначення дорівнює області прибуття;
б) відображення у якого область значень дорівнює області прибуття;
в) відображення у якого різні елементи області визначення мають різні образи;
г) сюр'єктивне відображення.

60. Відображення φ множини A у множину B називається бієктивним відображенням, якщо:
а) між елементами їх можна встановити взаємно однозначну відповідність;
б) відображення у якого область визначення дорівнює області прибуття;
в) відображення у якого різні елементи області визначення мають різні образи;
г) воно сюр'єктивне і ін'єктивне.

61. Взаємно однозначною відповідністю між елементами множин називається:
а) сюр'єктивне відображення; *в) бієктивне відображення;*
б) ін'єктивне відображення; *г) всюдивизначена функція.*

62. Обернене відношення $\varphi^{-1} \subset B \times A$ до відображення $\varphi : A \to B$ є відображенням тоді і тільки тоді, коли:
а) φ *- сюр'єктивне і ін'єктивне;* *в)* φ *- бієктивне;*
б) φ *- ін'єктивне;* *г)* φ *- сюр'єктивне.*

63. Дві множини A і B називаються рівнопотужними, якщо:
а) вони або порожні або існує бієктивне відображення множини A на множину B;
б) кожному елементу множини A можна поставити у відповідність один і тільки один елемент з множини B і навпаки;

в) існує бієктивне відображення множини A на множину B;

г) існує сюр'єктивне відображення множини A на множину B.

64. Для довільних множин A_1, A_2, B_1 *і* B_2, якщо $A_1 \sim A_2$; $B_1 \sim B_2$ і $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, $A_2 \cap B_2 = \varnothing$, то:

а) $A_1 \cup A_2 \neq B_1 \cup B_2$;

б) $A_1 \cap A_2 \neq B_1 \cap B_2$;

в) $A_1 \cup B_1 \sim A_1 \cup B_2$;

г) $A_1 \cap B_1 = A$.

65. Символом **|A|** позначається:

а) число елементів у множині A;

б) потужність множини A;

в) скінченність множини A;

г) нескінченність множини A.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІІ
(Елементи математичної логіки)

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1: «Висловлення і операції над ними. Поняття «формули логіки висловлень» »

І. Аналіз контрольної роботи

ІІ. Теоретичні питання

1. Як одержує людина знання про оточуючий світ? Логіка і математична логіка.
2. Поняття про думку і твердження. Основні види математичних тверджень.
3. Висловлення, приклади висловлень. Висловлення в початковому курсі математики. Логічне значення висловлень.
4. Пропозиційні зв’язки і квантори. Логічні сталі.
5. Прості і складені висловлення.
6. Заперечення висловлення. Операція заперечення висловлення.
7. Кон’юнкція 2-х і більше висловлень. Операція кон’юнкції двох висловдень.
8. Диз’юнкція 2-х і більше висловлень. Операція диз’юнкції двох висловдень.
9. Імплікація 2-х висловлень. Операція імплікації двох висловдень.
10. Еквіваленція 2-х висловленнь. Операція еквіваленції двох висловдень.
11. Індуктивне означення формули логіки висловленнь.
12. Таблиця істинності формули логіки висловлень та кількість її рядків.

ІІІ. Практичні завдання

1. Які з даних тверджень є висловленнями? Для висловлень встановити їх логічне значення:

1) 168 кратне 9;
2) 15 кратне 3, але не кратне 4;
3) $x^2 < 9$;
4) кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$;
5) чи існує дійсне число, яке більше 3 але менше $\sqrt{10}$?
6) існує дійсне число, більше 3 але менше $\sqrt{10}$;
7) ця задача легка;
8) $lg\ 1 = 0$;
9) існує найбільше просте число;
10) $\pi \approx 3{,}14$;
11) рівняння $x^3 + 7x + 1 = 0$ має хоч один дійсний корінь;
12) $x^3 + 7x + 1 = 0$;
13) кожне парне число більше 2 є сумою 2-х простих чисел;
14) розкрийте підручник на с. 23;
15) учитель сказав: „розкрийте підручник на с. 23”;
16) усі дійсні числа задовольняють нерівність $x^2 < 9$;
17) вкажіть помилку в твердженні: „Для кожного числа x справджується рівність $\sqrt{x^2} = x$”;
18) для кожного дійсного числа x виконується рівність $\sqrt{x^2} = x$;
19) $\sqrt{x^2} = x$;
20) хай живе математика;
21) якщо $3 < 2$, то $3^2 < 2^2$.

2. Сформулюйте заперечення даних висловлень і вкажіть що істинно: дане висловлення чи його заперечення:
   а) сума цифр числа 73 дорівнює 11;
   б) число 3 є коренем рівняння $(x - 3)(x + 2) = 0$.

3. Для даних пар висловлень встановіть їх логічні значення і вкажіть які із них є запереченням одне одного.
   1) A: „Усі трикутники є рівнобедреними”;
      B: „Усі трикутники не є рівнобедреними”;
   2) A: „У цій книзі більше 100 с.”;
      B: „У цій книзі не більше 100 с.”

4. Запереченням якого висловлення є таке висловлення:

1) „неправильно, що сьогодні не навчальний день”;

2) „неправильно, що *в* – непарне число”.

5. Чи можна визначити логічне значення висловлення p, якщо відомо, що:

1) $(p \wedge q)^* = 1$;

2) $(p \wedge q)^* = 0$;

3) $(p \wedge q)^* = 0$ і $(q)^* = 1$;

4) $(p \wedge q)^* = 0$ і $(q)^* = 0$?

6. Встановити логічну структуру висловлень і знайти їх логічне значення:

1) $60 \geq 60$;

2) $25 < 35 < 45$;

3) число 5 натуральне, або не натуральне;

4) $7 < 3$ або $7 \geq 3$;

5) $7 < 3$ і $7 \geq 3$.

7. Чи можна встановити логічне значення висловлення $(p \rightarrow q) \vee r$, знаючи, що:

1) $(p)^* = 1$; 2) $(r)^* = 1$; 3) $(p)^* = 1$, $(q)^* = 0$;

4) $(p)^* = 1$, $(r)^* = 1$; 5) $(p)^* = 1$, $(g)^* = 0$, $(r)^* = 0$;

6) $(g)^* = 1$; 7) $(\rho)^* = 0$?

8. Встановіть логічне значення наступних еквіваленцій:

1) число 21 ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3;

2) 2 більше 5 тоді і тільки тоді, коли $2 + 3 = 5$;

3) $\{1, 6\} = \{1, 3, 5\}$ тоді і тільки тоді, коли $1 \in \{1, 3, 5\}$ і $6 \in \{1, 3, 5\}$

9. Встановити логічну структуру даних висловлень і знайти їх логічне значення:

1) якщо $\pi < 3$, то $\pi^2 < 3^2$;

2) якщо $7 > 6$, то $7 \geq 6$;

3) $198 \vdots 11$ і 18 але не кратне 7;

4) $96 \vdots 48$ тоді і тільки тоді, коли $96 \vdots 8$ і $96 \vdots 6$;

5) неправильно, що хоч одне із чисел 21, 51, 91 є простим.

10. Побудувати таблицю істинності для формул:

1) $\overline{p} \vee q \leftrightarrow p \vee \bar{r}$; 2) $p \rightarrow \overline{q \vee r}$;

3) $p \wedge \bar{q} \rightarrow p \vee \bar{r}$; 4) $(p \leftrightarrow \bar{q}) \wedge ((p \vee r) \rightarrow q)$.

11. Хлопчик вирішив у неділю закінчити читання книги, сходити в музей або в кіно, а якщо буде гарна погода – піти викупатися. В якому випадку можна сказати, що зобов'язання хлопчика не виконано?

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання: Рівносильні, тотожно істинні і тотожно хибні формули логіки висловлень. Логічне слідування на множині формул логіки висловлень.

Практичні завдання:

№ 175. [8, с. 35]. Знайти значення істинності даних висловлень:

а) $|3 - 5| = |3| - |5|$;

б) $\sqrt{16} = -4$;

в) $3{,}7 \in N$;

г) $-4\frac{1}{3} \in R$;

д) об'єднанням множин A = {a, b, c} і B = {c, d} є множина C = {a, b, d};

е) {9, 12, 14,17} = {17, 9, 12, 14};

ж) $2^3 > 3^2$.

№ 177. [8, с. 35]. Вказати, серед нижче запропонованих тверджень, висловлення та поясніть свою відповідь:

а) 2 – натуральне число;

б) добуток чисел 2 і 7 дорівнює 15;

в) $2^{32} > 3^{12}$;

г) $x = 11$ є розв'язком нерівності $2x - 1 > 5$;

д) різниця чисел x і 3 дорівнює 7;

е) прямі паралельні;

ж) графік функції $y = x^2$ симетричний відносно вісі ординат.

№ 190. [8, с. 38]. Вияснити, у яких випадках можна встановити значення істинності висловлення B:

а) $A \wedge B$ – „1”; б) $A \vee B$ – „1”;
в) $A \wedge B$ – „0”; г) $A \vee B$ – „0”;
д) $A \wedge B$ – „0”, A – „1”; е) А $\vee$ B – „1”, A – „0”?

№ 191. [8, с. 38]. Позначте прості висловлення буквами та запишіть наступні висловлення за допомогою символів логіки висловлень:

а) у паралелограмі $ABCD$ кут A прямий, а діагоналі взаємно перпендикулярні;

б) трикутник ABC є прямокутним або гострокутним?

№ 192. [8, с. 38]. Дано висловлення:

A: „Сьогодні температура повітря нижча 0^oC”;

B: „Сьогодні ясно”;

C: „Я піду кататися на лижах”

$Д$: „Я піду кататися на ковзанах”.

Сформулюйте висловлення, які мають структуру: а) $A \wedge B$; б) $A \wedge D$; в) $C \vee D$; г) $A \wedge (C \vee D)$; д) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$.

№ 206. [8, с. 40]. Пояснити, чому висловлення кожної із нижче перерахованих пар не є запереченням одне одного:

а) A: „чотирикутник $CDEF$ – паралелограм” і B: „чотирикутник $CDEF$ – трапеція”;

б) C: „кут A гострий” і D: „кут A тупий”.

№ 209. [8, с. 41]. Побудувати заперечення наступних висловлень і вкажіть, що є істинним – саме висловлення чи його заперечення:

а) число 27 кратне 7; б) $3 + 6 = 9$; в) $38 > 44$; г) $7 \leq 7$.

Тема 2: «Рівносильні формули. Логічне слідування на множині формул логіки висловлень».

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

ІІ. Теоретичні питання.

1. Рівносильні формули логіки висловлень. Як довести рівносильність формул логіки висловлень?

2. Які властивості має відношення рівносильності на множині формул логіки висловлень? Для чого потрібне поняття рівносильності формул логіки висловлень?

3. Що розуміють під законами операцій логіки висловлень?

4. Тотожно-істинні формули логіки висловлень (логічні закони). Назвати основні логічні закони. Як довести, що дана формула є тотожно-істинною?

5. Імплікації пов'язані з даною імплікацією.

6. Яким способом з однієї тотожно-істинної формули одержати іншу тотожно-істинну формулу?

7. Тотожно-істинні формули, що мають вигляд еквіваленції формул і їх зв'язки з рівносильними формулами.

8. Означення логічного наслідку (логічно впливає). Зв'язок цього поняття з тотожно-істинною формулою.

III. Практичні завдання.

1. Встановити чи мають місце рівносильності:

1) $p \to (q \to r) \equiv p \wedge q \to r;$

2) $(p \vee \bar{q}) \vee (p \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r);$

3) $(p \wedge q \to r) \to (r \to p \wedge q) \equiv (r \to q) \wedge (r \to p);$

4) $(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r).$

2. Встановити чи є дані формули тотожно-істинними:

1) $(p \to q) \wedge \bar{p} \to q;$

2) $(p \to q) \vee (p \to r) \to (p \to (q \to r)).$

3. Встановити чи є істинними твердження.

1) $\bar{p} \vee q, r \to \bar{q} \models p \to r;$ 2) $p \to q, p \vee r \models q \vee r;$

4. Встановити чи є логічно правильними міркування.

1) Якщо дане число закінчується нулем, то воно ділиться на 5. Дане число не закінчується нулем. Отже, дане число не ділиться на 5.

2) Якщо дане число закінчується нулем, то воно ділиться на 5. Дане число не ділиться на 5. Отже, дане число не закінчується нулем.

3) Петро готувався до екзаменів або пішов у кіно. Петро пішов у кіно тоді і тільки тоді, коли приходила Таня. Якщо приходила Таня, то вона лишила книгу. Таня книгу не лишила. Отже Петро готувався до екзаменів.

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні питання. Предикати і операції логіки висловлень над ними.

Практичні завдання.

1). Встановити чи мають місце рівносильності:

а) $p \vee q \vee \bar{r} \to p \equiv (q \to p) \wedge (\bar{p} \to r)$;

б) $(p \vee q) \to \bar{q} \equiv \bar{q}$;

в) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.

2). Встановити чи є дані формули тотожно істинними:

а) $p \wedge q \to (p \to q)$; *б)* $(p \vee q \to r) \to (p \to r)$.

3). Встановити чи є істинним твердження:

1) $p \vee q \vee r, \bar{p} \wedge \bar{q} \models r$; 2) $p \to q, p \vee r \models p \to r$.

Тема 3: «Предикати і операції логіки висловлень над ними»

I. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

II. Теоретичні питання.

1. Поняття про змінну в математиці та її основні характеристики. Приклади змінних (пропозійні змінні, числові змінні і т.д.)
2. Предикат (висловлювальна форма). Поділ предикатів за кількістю змінних.
3. Область визначення, область істинності і область хибності предиката та відношення між ними. Зображення їх за допомогою кругів Ейлера.
4. Тотожно-істинні, тотожно-хибні та рівносильні предикати.

5. Заперечення предиката. Область істинності заперечення предиката та зображення її за допомогою кругів Ейлера.
6. Кон'юнкція предикатів. Операція кон'юнкції предикатів. Область істинності кон'юнкції предикатів. Зображення її кругами Ейлера.
7. Диз'юнкція предикатів. Операція диз'юнкції предикатів. Область істинності диз'юнкції предикатів. Зображення її кругами Ейлера.
8. Імплікація предикатів. Операція імплікації предикатів. Область істинності імплікації предикатів. Зображення її кругами Ейлера.
9. Еквіваленція предикатів. Операція еквіваленції предикатів. Область істинності еквіваленції предикатів. Зображення її за допомогою кругів Ейлера.
10. Чи мають місце операції логіки висловлень для предикатів від більш як однієї змінної, визначених на одній і тій же множині? Навести приклади.

III. Задачі для розв'язування

1. Чи будуть рівносильними предикати:

P *(x) – „$x^2 + x – 6 = 0$"* і *Q (x) – „$x^2 + 2x – 8 = 0$"* – на множині:

1) натуральних чисел N?
2) цілих чисел Z?

2. Предикат *P (x, y, z) – „$x + y = z$"*, визначений на множині R^3 (часто у цьому випадку говорять на множині дійсних чисел R). Описати його множину істинності і навести приклади кількох елементів з його множини істинності.

Які з даних кортежів належать множині істинності даного предиката: (7, – 7, – 1), (7, – 7, 0), (0, 0, 0)?

3. Над предикатами *P (x) – „$x < 5$" і Q (x) – „$x \geq – 2$"*, визначеними на множині дійсних чисел R, виконати операції логіки висловлень і знайти області істинності результатів цих операцій.
4. На множині натуральних чисел задано предикати:

P (x) – „x ⋮ 2”, Q (x) – „x ⋮ 3”

R (x) – „число *x* просте”.

Зобразити область істини предиката за допомогою кругів Ейлера. Заштрихувати множини істинності таких предикатів:

1) $P(x) \wedge \overline{Q}(x)$;

2) $\overline{P}(x) \vee R(x)$;

3) $(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x)$;

4) $P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x)$;

5) $P(x) \wedge \overline{R}(x) \leftrightarrow Q(x)$.

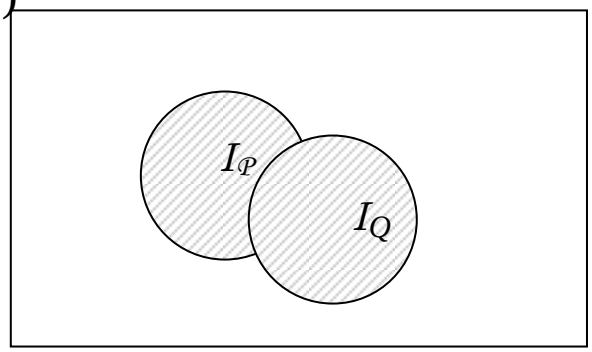
5. На множині цілих чисел Z задано предикати:

P (x) – „число *x* – непарне”

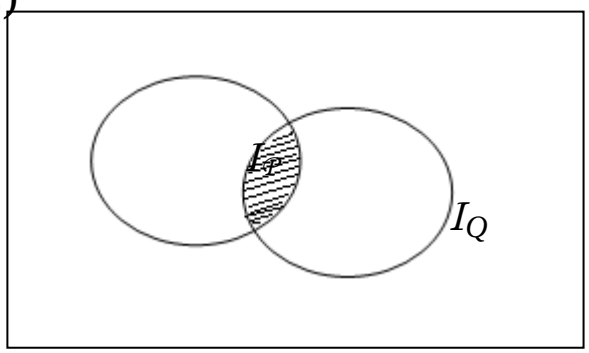
Q (x) – „x ⋮ 5”

Сформулювати предикати, множини істинності яких заштриховані:

1)



2)



IV. Завдання для самостійної роботи

Теоретичні питання. Кванторні операції над предикатами. Правила побудови заперечень тверджень, що містять квантори. Відношення логічного слідування на множині предиката; необхідні і достатні умови.

Практичні завдання.

1. [4, с. 114]. Серед речень виділити предикати і для кожного з них встановити область істинності:

1) $x + 5 = 2,\ x \in R$;

2) $3x + 5,\ x \in R$;

3) $x + y = 4,\ x, y \in R$;

4) $2x - 5 < 4,\ x \in R$;

5) $x \vdots 3,\ x \in N$;

6) існують дійсні числа такі, що $x^2 - 5x + 6 = 0$;

7) студент … є старостою групи;

8) число x додатне, $x \in R$.

2. (1,2) [1, с. 114] Предикати $P(x)$ і $Q(x)$ визначені на множині дійсних чисел. Знайти області істинності цих предикатів. Виконати операції логіки висловлень над даними предикатами і знайти області істинності результатів операцій, якщо:

1) $P(x)$ – "$x > 2$" і $Q(x)$ – "$x \le 6$";

2) $P(x)$ – "$x \ge -3$" і $Q(x)$ – "$-4 < x - 2$";

3. [1, с. 114] Серед предикатів, які визначені на множині дійсних чисел R, вказати такі, що є:

а) тотожно істинними, б) тотожно хибними, якщо:

1) $x^2 + 1 > 0$; 2) $x^2 = 64$;

3) $y^2 < 0$; 4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

5) $\log_2 x > 0$; 6) $\sqrt{x^2 = x}$;

7) $x^2 + 1 = 0$; 8) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

9) $x^2 + y^2 < 0$; 10) $x + y = 2$.

Тема 4: «Відношення логічного слідування і рівносильності на множині предикатів»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання.

ІІ. Теоретичні питання

1. Означення операції навішування квантора загальності на предикат.
2. Означення операції навішування квантора існування на предикат.
3. Заперечення тверджень, що містять квантори.
4. Означення логічного наслідку на множині предикатів. Термін „логічно випливає” на множині предикатів.

5. Критерій логічного наслідку. Вираження цієї властивості через множини істинності предикатів?
6. Випадок для 2-ох предикатів:
   а) поняття логічного наслідку для 2-ох предикатів;
   б) різні критерії логічного наслідку для 2-ох предикатів.
7. Поняття про „необхідну” та „достатню” умови.
8. Рівносильність предикатів та „необхідні і достатні” умови.

II. Практичні завдання

1. №14 [4, с. 115]. Встановити логічні структури і значення висловленнь:
   1) деякі натуральні числа кратні 3;
   2) усі натуральні числа додатні;
   3) усі натуральні числа невід’ємні;
   4) існує раціональне число, квадрат якого дорівнює 2.
   5) усі раціональні числа є додатними;
   6) операція множення натуральних чисел комутативна;
   7) операція множення раціональних чисел асоціативна;
   8) не існує найбільшого натурального числа;
   9)кожне квадратне рівняння має розв’язок у множині дійсних чисел;
   10) деякі прямокутники є ромбами.
2. №15 [4, с. 115]. Висловлення, яке записане в символічній формі, сформулювати словами і встановити його логічне значення:
   1) $\forall a, в \in N: a + в = в + a$;
   2) $\forall a, в \in N \; \exists \; c \in N: ав = c;$
   3) $\exists a \in N \; \forall \; в \in N: a \leq в;$
   4) $\forall \; a, в \in R \; \exists \; x \in R: ax = в;$
   5) $\forall \; a, в \in N \; \exists \; x \in N: a + x = в$;
   6) $\forall a, в \in Z \; \exists \; x \in Z: a + x = в$.
3. Для кожної пари предикатів вкажіть, який предикат логічно випливає з якого. Зобразити відношення між їх множинами істинності за допомогою кругів Ейлера.
   1) $P(x)$ – „число x – додатне”;

Q (x) – „число x – натуральне”;
$M = R$.

2) P (x) – „чотирикутник x – квадрат”;
Q (x) – „чотирикутник x – ромб”;
M – множина чотирикутників.

3) P (x, y) – „x і y – родичі”;
Q (x, y) – „x і y – брати”;
M – множина людей.

4) P (x) – „місто x знаходиться в Італії”;
Q (x) – „місто x знаходиться в Європі”;
M – множина міст світу.

5) P (x, y) – „кути x і y вертикальні”;
Q (x, y) – „кути x і y рівні”;
M – множина кутів.

6) P (x, y) – „прямі x і y – паралельні”;
Q (x, y) – „прямі x і y лежать в одній площині”;
M – множина прямих простору.

4. Визначити, які твердження є істинними:
1) число x – додатне, отже воно натуральне;
2) $x < 2$, отже $x < 6$;
3) x кратне 7, отже x кратне 14;
4) різниця чисел a і $в$ – від’ємна, отже $a < в$;
5) сума цифр запису числа ділиться на 3, отже число кратне 3;
6) трикутник ABC рівнобедрений, отже він рівносторонній;
7) чотирикутник a – прямокутник, отже в ньому є хоча б один прямий кут.

5. Дано предикати.
1) A (x, y) – „точки X і $У$ рівновіддалені від початку координат”;
B (x, y) – „X і $У$ належать колу з центром у початку координат”;
M – множина точок координатної площини.
2) A (x, y) – „трикутники x і y рівні”;

B (x, y) – „трикутники x і y мають рівні площі”;

M – множина трикутників.

3) A (x) – „$x - (x - 7) = 0$”;

B (x) – „x ($x - 3$) + 2 = 2 (x + 1), $x \in R$”;

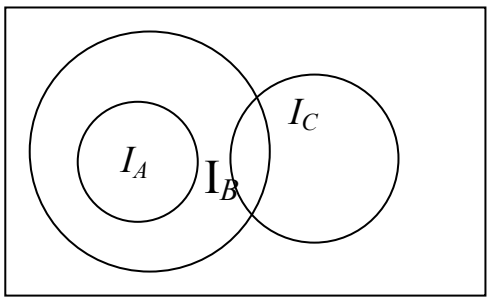
Вказати у яких випадках:

а) предикат B логічно слідує з предиката A;

б) предикат A логічно слідує з предиката B;

в) предикати A і B рівносильні.

6. На малюнку зображені множини істинності предикатів A (x), B (x), C (x) заданих на множині M.



M

Які з тверджень мають місце:

1) Предикат C (x) логічно випливає з предиката A (x);

2) A (x) $\models B$ (x);

3) Висловлення $\forall\ x \in M$: B (x) $\rightarrow C$ (x) – істинне;

4) Висловлення $\forall\ x \in M$: A (x) $\rightarrow B$ (x) – істинне;

5) Висловлення $\forall\ x \in M$: B (x) $\rightarrow A$ (x) – істинне

7. Для заданих предикатів, визначених на множині R, встановити чи слідує один предикат з іншого:

1) $x^2 + x - 6 = 0$ і ($x - 1$) ($x - 2$) ($x - 3$) = 0;

2) $x - 1 = 0$ і ($x - 2$) ($x - 5$) = 0;

3) $x^2 + 5x - 6 = 0$ і $x + 1 = x + 1$;

4) $x^4 = 16$ і $x^2 = 2$

8. На множині Z задано предикати P (x) – „$12 \vdots x$” і Q (x) – „$36 \vdots x$”.

1) довести, що Q (x) логічно випливає із P (x).

2) сформулюйте твердження у вигляді „якщо ..., то ...”.

3) сформулюйте твердження за допомогою слова „достатньо”.

4) сформулюйте твердження за допомогою слова „необхідно”.

5) сформулюйте твердження в термінах „для всіх” або його синонімах.

9. Які з тверджень є істинними:
   1) Присутність на всіх заняттях з математики є достатнім для успішного складання екзамену з математики.
   2) Наявність паспорта чи документа, що його замінює, необхідно для придбання білета на літак.
   3) Досягнення 18-річного віку необхідно для участі у виборах.
   4) Наявність документа про середню освіту достатньо для вступу в університет.
   5) Наявність документа про середню освіту необхідно для вступу в університет?
10. Замість крапок поставити у речення один із 3-ох виразів „необхідно”, „достатньо” або „необхідно і достатньо”, щоб утворити істинне висловлення. Відповідь обґрунтувати.
   1) Для того, щоб трикутник був рівностороннім, ... , щоб він був гострокутнім.
   2) Для того, щоб натуральне число ділилося на 6, ... , щоб воно ділилося на 3.
   3) Для того, щоб добуток двох дійсних чисел дорівнював 0, ..., щоб обидва множники дорівнювали 0.
   4) Для того, щоб добуток 2-х чисел дорівнював 0, ... , щоб один із множників дорівнював 0.
   5) Для того, щоб сума 2-х натуральних чисел ділилася на третє число, ... , щоб обидва доданки ділилися на це число.
   6) Для того, щоб натуральне число ділилося на добуток двох натуральних чисел, ... , щоб воно ділилося на кожен із множників.
11. Користуючись логічною і математичною символікою, довести рівність множин:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C).$$

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання. Міркування та встановлення їх правильності. Теореми та їх будова.

Практичні завдання.

1. № 16 [4, с. 115]. Відомо, що висловлення $\forall x \in M : P(x)$ істинне (хибне). Що можна сказати про логічне значення висловлення $\exists x \in M: P(x)$?

2. № 17 [4, с. 115]. Відомо, що висловлення $\exists x \in M: P(x)$ істинне (хибне). Що можна сказати про логічне значення висловлення $\forall x \in M : P(x)$?

3. № 275[8, с. 54]. На множині $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задані предикати $A(x)$: „$x \vdots 4$” і $B(x)$: „$x \vdots 2$”.

а) Знайдіть значення істинності висловлень $A(a)$ і $B(a)$ при кожному із значень $a \in X$.

б) На основі відповідей, отриманих у пункті а), виясніть чи істинне висловлення „Із $A(x)$ логічно слідує $B(x)$”. Якщо так, то запишіть це, використовуючи символ $\models$.

в) Чи можна стверджувати, що висловлення „Із $B(x)$ логічно слідує $A(x)$” істинне? Чому?

4. №282[8, с. 54]. На множині R задані предикати $E(x)$: „$x - 2 = 0$” і $F(x)$: „$x^2 - 4 = 0$”.

а) Знайти множину істинності цих предикатів.

б) Визначити, у якому відношенні знаходяться множини I_E і I_F.

в) Чи можна стверджувати, що $F(x)$ логічно слідує із $E(x)$ на множині R? Якщо так, то зробіть відповідний запис.

5. № 284[8, с. 55]. Визначити, які із наступних висловлень істинні, а які хибні:

а) $x + 3 = 0 \models x^2 - 9 = 0$;

б) $x^2 = 4 \models x = 2$;

в) $(x - 1)(x - 2) = 0 \models (x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$;

г) $x < 3 \models x < 7$;

д) $x > 4 \models x > 2$.

6. № 285[8, с. 55]. Знайти множини істинності предикатів $A(x)$: „$x \vdots 3$” і $B(x)$: „Сума цифр у записі числа x кратна 3”, заданих на множині $X = \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15\}$, та визначте, у якому відношенні вони знаходяться. Чи будуть предикати $A(x)$ і $B(x)$ рівносильні на множині X?

6. № 290[8, с. 56]. На множині Z задані предикати $E(x)$: „x – дільник 4” і $F(x)$: „x – дільник 12”. Доведіть, що $F(x)$ логічно слідує із $E(x)$. Сформулювати висловлення $E(x) \models F(x)$ за допомогою терміна:

1)”достатньо”; 2) „необхідно”.

7. № 293[8, с. 56]. Замість крапок вставити терміни „необхідно”, „достатньо” або „необхідно і достатньо” так, щоб утворилося істинне висловлення:

а) для того, щоб сума двох натуральних чисел була більше 20, ... , щоб хоча б один із доданків був більше 10;

б) для того, щоб різниця двох чисел була парною, ... , щоб обидва компоненти віднімання були парними;

в) для того, щоб віднімання було виконано на множині натуральних чисел, ... , щоб зменшуване було більше від’ємника;

г) для того, щоб сума двох чисел дорівнювала другому доданку, ... , щоб перший доданок дорівнював нулю;

д) для того, щоб $ab = 0$, ... , щоб $a = 0$;

е) для того, щоб сума двох чисел ділилась на 5, ... , щоб кожний доданок ділився на 5;

ж) для того, щоб число ділилось на 24, ... , щоб воно ділилось на 4;

з) для того, щоб число було кратне 5, ... , щоб воно було кратне 10;

и) для того, щоб 5а дорівнювало нулю, ... , щоб $a = 0$.

Тема 5: «Міркування і теореми»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Безпосередні і опосередковані знання.
2. Поняття про умовивід та його структура. Дедуктивні умовиводи. Теоретична основа умовиводу. Умовний запис умовиводу.
3. Правильні і неправильні умовиводи. Поняття про правило виведення.
4. Простіші правила виведення в логіці висловлень. Яка їх особливість? Як доводиться правильність правила логіки висловлень?
5. Правильні і неправильні міркування. Способи перевірки правильності міркувань, що містять предикати. Суть перевірки правильності міркувань за допомогою кругів Ейлера.
6. Загальні поняття про теорему в математиці. Інші назви поняття теореми.
7. Умовна форма запису теореми. Повний запис теореми за допомогою символів математичної логіки. Будова теореми.
8. Твердження, пов‘язані з даною теоремою. Яке з них обовязково є теоремою?
9. Поняття про доведення теореми. Означення доведення теореми на основі понять математичної логіки.
10. Способи доведення теорем. Суть прямого способу доведення теорем.
11. Непрямий спосіб доведення теорем. Доведення від супротивного. Контрапозитивний спосіб доведення теорем.

ІІІ. Задачі для розв’язування.

1. У наступних міркуваннях встановити чи логічно правильно проведено міркування:

а) Якщо чотирикутник ромб, то його діагоналі

перпендикулярні. Чотирикутник $ABCD$ – ромб. Отже, діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні.

б) Якщо чотирикутник – ромб, то його діагоналі перпендикулярні. У чотирикутника $ABCD$ – діагоналі перпендикулярні. Отже, чотирикутник $ABCD$ – ромб.

в) Для того, щоб 1273 було простим, необхідно щоб 1273 не було кратним 4. 1273 кратне 4 тільки тоді, коли 1273 ⋮ 2, 1273 ⋮ 2. Отже, 1273 – просте число.

г) Для того, щоб задане натуральне число ділилося на 24, достатньо щоб воно ділилося на 3 і 8. Число не ділиться на 3. Число не ділиться на 8. Отже, число не ділиться на 24.

2. Перевірити за допомогою кругів Ейлера правильність міркування.

а) Кожний квадрат – правильний многокутник. Усі квадрати – паралелограми. Існує многокутник, який є квадратом. Отже, деякі правильні многокутники є паралелограмами.

б) Кожне натуральне число, яке кратне 153, кратне 17 і 9. Кожне натуральне число кратне 9 тоді і тільки тоді, коли сума цифр запису цього числа в десятковій системі числення кратна 9. Сума цифр запису числа 23878 не кратна 9. Отже, число 23878 – не кратне 153.

в) №26 (4) [4, с. 116]. Усі рівносторонні трикутники є рівнобедреними. Деякі рівнобедрені трикутники є правильними многокутниками. Отже, всі рівносторонні трикутники є правильними многокутниками.

3. Знайти помилки в таких міркуваннях.

Усі числа рівні між собою. Нехай a і $в$ будь-які два дійсних числа. Візьмемо тотожність:

$$(a - в)^2 = a^2 - 2ав + в^2 = в^2 - 2ав + a^2$$

Звідси маємо: $(a - в)^2 = (в - a)^2$

Отже: $a - в = в - a$

А тому: $2a = 2в$

Звідси слідує, що $a = в$

4. Користуючись логічною і математичною символікою довести рівність множин.

$$(A \cap \overline{C}) \setminus B = A \setminus (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C}$$

5. Користуючись логічною і математичною символікою записати дану теорему в символічній формі, виділити в ній пояснювальну частину, умову, висновок. Записати символічно та сформулювати словами твердження, пов‘язані з даною теоремою і встановити їх логічне значення.

1. Якщо чотирикутник є ромбом, то його діагоналі перпендикулярні.
2. Якщо в сумі двох натуральних чисел, кожен із доданків ділиться на 7, то їх сума ділиться на 7.
3. Вертикальні кути рівні.
4. У чому відмінність задач 1 і 2?

6. Дати кілька різних словесних формулювань теореми: «Вертикальні кути рівні».

7. Довести теорему методом від супротивного.

Якщо пряма перетинає одну із паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

IV. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні питання. Теоретико–множинний підхід до побудови множини цілих невід’ємних чисел та її властивості.

Практичні завдання

№295. [8, с. 58]. Сформулювати наступні теореми у вигляді “Якщо…, то…“, виділяючи в кожній із них умови й висновки:

а) перпендикуляр до однієї з двох паралельних прямих є також перпендикуляром до другої;

б) будь-який паралелограм має центр симетрії;

в) дуги, що знаходяться між рівними хордами, рівні.

№296. [8, с. 58]. Дано теореми:

а) Якщо кожний доданок ділиться на дане число, то й сума ділиться на дане число;

б) Якщо похилі, проведені з однієї точки до однієї й тієї ж прямої, рівні, то рівні і їх проекції.

Кожну з них сформулювати з допомогою термінів “достатньої”, “необхідно”.

№ 349. [8, с. 68]. Довести, що наведені нижче умовиводи, неправильні, підібравши контрприклад.

а) Усі числа, що діляться на 4, діляться на 2. Число 127 не ділиться на 4. Отже, 127 не ділиться на 2.

б) Усі числа, що діляться на 4, діляться на 2. Число 124 ділиться на 2. Отже, число 124 ділиться на 4.

№ 350. [8, с. 70]. Перевірити за допомогою кругів Ейлера правильність наступних умовиводів:

а) Усі дерева є рослинами. Дуб – рослина. Отже, дуб – дерево.

б) Якщо кути вертикальні, то вони рівні. $\angle ABC \neq \angle DEF$. Отже, кути ABC і DEF не вертикальні.

в) Усі натуральні числа цілі. Всі цілі числа раціональні. Отже, всі натуральні числа раціональні.

г) Якщо чотирикутник є прямокутником, то в нього всі кути прямі. $ABCD$ – прямокутник. Отже, всі його кути прямі.

д) Деякі прямокутники – квадрати. Усі квадрати – правильні чотирикутники. Отже, деякі квадрати є правильними чотирикутниками.

е) Деякі цілі числа не кратні 2. Деякі цілі числа не кратні 3. Отже, існують цілі числа, що не кратні 6.

№ 27. [4, с. 116]. (1, 3, 5, 6, 7) Користуючись логічною і математичною символіками, записати дану теорему в символічній формі. Виділити в ній пояснювальну частину, умову й висновок. Записати символічно та сформулювати словами твердження, пов’язані з даною теоремою та встановити їх логічні значення:

1) У прямокутнику діагоналі рівні.

2) Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°.

3) Якщо в сумі двох натуральних чисел кожен із доданків ділиться на 3, то й сума ділиться на 3.

4) Якщо натуральне число ділиться на 10, то воно ділиться на 5.

5) Якщо студент одержав на екзамені оцінку “відмінно”, то він склав екзамен.

Завдання для повторення

Користуючись логічною і математичною символікою та властивостями операцій над множинами, висловленнями і предикатами довести рівність множин:

1) $\overline{A} \cup \overline{B \cap C} = \overline{B \cap A}B \cup \overline{A \cap C}$;

2) 2) $\overline{A} \setminus (B \cup C) = \overline{A \cup B \cup C}$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №3

Завдання 1. Встановити логічну структуру висловлення і вказати його логічне значення:

1. 15 ділиться на 3 і 12 ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли 15 ділиться на 6.
2. Якщо 3 більше за 2, то 5 менше за 4 або 4 більше за 2.
3. Якщо 72 ділиться на 6 і 9, то 72 ділиться на 54.
4. 15 ділиться на 3 або 4 тоді і тільки тоді, коли 15 ділиться на 12.
5. Якщо 3 менше від 2 і 5 більше від 3, то неправильно, що 5 більше від 6.
6. Неправильно, що 15 ділиться на 2 і 3 тоді і тільки тоді, коли 15 ділиться на 6.
7. Якщо 3 менше, ніж 2 і 5 більше, ніж 4, то 15 більше, ніж 8.
8. 20 ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли неправильно, що 400 ділиться на 81 або 80.

9. Якщо 4 більше за 3 і 5 більше за 4, то неправильно, що 4 менше за 2.
10. 13 менше за 10 тоді і тільки тоді, коли 13 менше за 15 і неправильно, що 13 менше за 20.

Зразок розв'язування. Користуючись логічною та математичною символіками, записати висловлення: " 20 ділиться на 5 і 3 тоді і тільки тоді, коли 20 ділиться на 15" у вигляді логічної формули; встановити його логічні структуру та значення.

► Щоб встановити логічні структуру та значення даного висловлення, потрібно позначити змінними прості висловлення, які входять до його складу й замінити пропозиційні зв'язки відповідними символами для позначення операцій логіки висловлень. Нехай p – "20 ⋮ 5", q – "20 ⋮ 3" і r – "20 ⋮ 15". Тоді вихідне висловлення можна записати у вигляді формули $p \wedge q \leftrightarrow r$, яка є еквіваленцією висловлень $p \wedge q$ і r. Тому що p має логічне значення "1", а q – "0", то $p \wedge q$ – "0". Висловлення r має логічне значення "0". А тому, за означенням еквіваленції, висловлення $p \wedge q \leftrightarrow r$ має логічне значення "1". ◄

Завдання 2. Встановити, чи є істинним твердження:

1. $\bar{q} \to \bar{p}, \bar{p} \to r \models p \vee q$;
2. $\bar{p} \wedge q, \bar{r} \vee \bar{q} \models p \leftrightarrow r$;
3. $\bar{p} \wedge r, \bar{q} \leftrightarrow r \models p \vee \bar{q}$;
4. $p \to q, \bar{r} \to \bar{q} \models r \vee \bar{p}$;
5. $p \to q \wedge r \models \bar{q} \vee r \to \bar{p}$;
6. $\bar{p} \vee r, \bar{q} \wedge r \models p \vee \bar{q}$;
7. $p \vee q \to r \models \bar{r} \to \bar{q}$;
8. $p \wedge \bar{q}, \bar{q} \leftrightarrow \bar{r} \models \bar{p} \vee r$;
9. $\bar{p} \vee q, q \leftrightarrow \bar{r} \models \bar{p} \vee r$;
10. $\bar{p} \vee \bar{q}, \bar{p} \wedge r \models q \to r$;

Зразок розв'язування. Встановити, чи є формула $p \leftrightarrow q$ логічним наслідком формул $p \to q$ і $p \vee \bar{q}$.

► Щоб довести, що формула $p \leftrightarrow q$ є логічним наслідком формул $p \to q$ і $p \vee \bar{q}$, потрібно довести, що формула $(p \to q) \wedge (p \vee \bar{q}) \to (p \leftrightarrow q)$ є тотожно істинною, тобто на всіх наборах значень змінних вона набуває логічне значення „1”. Формула містить дві змінні $(p; q)$, а тому її таблиця істинності має $2^2 = 4$ рядки.

На кожному наборі значень змінних обчислюємо результати операцій логіки висловлень у порядку, який задається формулою.

p	q	$(p \to q) \wedge (p \vee \bar{q}) \to (p \leftrightarrow q)$					
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1

У таблиці остаточний результат виділено. З таблиці видно, що формула $(p \to q) \wedge (p \vee \bar{q}) \to (p \leftrightarrow q)$ тотожно істинна, а тому, твердження , $(p \to q), (p \vee \bar{q}) \models (p \leftrightarrow q)$ є істинним ◄

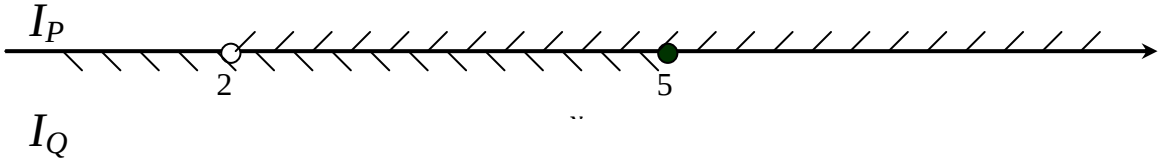
Завдання 3. Предикати $P(x)$ і $Q(x)$ визначені на множині дійсних чисел R. Знайти області істинності предикатів. Виконати операції логіки висловлень над цими предикатами і знайти області істинності результатів операцій, якщо:

1. $P(x)$ – “$x > 2$”; $Q(x)$ – “$x \le 6$”;
2. $P(x)$ – “$x \ge -5$”; $Q(x)$ – “$x < -1$”;
3. $P(x)$ – “$x > 2$”; $Q(x)$ – “$x \ge 5$”;
4. $P(x)$ – “$x > 2$”; $Q(x)$ – “$x \ge -3$”;
5. $P(x)$ – “$x > -6$”; $Q(x)$ – “$x < -1$”;
6. $P(x)$ – “$x > -2$”; $Q(x)$ – “$x > 3$”;
7. $P(x)$ – “$x < 4$”; $Q(x)$ – “$x > -3$”;
8. $P(x)$ – “$x > -4$”; $Q(x)$ – “$x > 0$”;
9. $P(x)$ – “$x > 1$”; $Q(x)$ – “$x > -4$”;
10. $P(x)$ – “$x < 2$”; $Q(x)$ – “$x > -5$”.

Зразок розв'язування. Для предикатів $P(x)$ – "$x > 2$" і $Q(x)$ – "$x \le 5$", визначених на множині дійсних чисел R, знайти області істинності, виконати операції логіки висловлень над ними та знайти області істинності результатів цих операцій.

► 1. Знайдемо області істинності даних предикатів. Якщо x належить R, то предикат $P(x)$ має логічне значення "1" при $x \in]\,2, +\infty\,[$, а предикат $Q(x)$ – при $x \in]\,-\infty; 5\,]$, тобто їх області істинності дорівнюють відповідно $I_P =]\,2; +\infty\,[$ і $I_Q =]\,-\infty; 5\,]$.

1. Виконаємо операції логіки висловлень над даними предикатами та знайдемо області істинності одержаних предикатів. Для встановлення областей істинності результатів операцій логіки висловлень над предикатами $P(x)$ і $Q(x)$ зручно зобразити їх області істинності на координатній прямій.



Мал. 18

1. $\overline{P(x)}$–"$\overline{x > 2}$"≡"$x \le 2$", $\quad I_{\overline{P}} = X_P = R \setminus I_P = R \setminus\,]2; +\infty[=]-\infty; 2].$

2. $\overline{Q(x)}$–"$\overline{x \le 5}$"≡"$x > 5$", $\quad I_{\overline{Q}} = X_Q = R \setminus I_Q = R \setminus]-\infty; 5] =]5; +\infty[.$

3. $P(x) \wedge Q(x)$–"$x > 2$"∧"$x \le 5$"≡"$x > 2$ *і* $x \le 5$"≡"$2 < x \le 5$,"
$I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q =]2; +\infty[\cap]-\infty; 5\,] =]2; 5\,].$

4. $P(x) \vee Q(x)$ – "$x > 2$" ∨ "$x \le 5$" ≡ "$x > 2$ або $x \le 5$",
$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q =]2; +\infty[\cup]-\infty; 5[=]-\infty; +\infty[= R.$

5. $P(x) \to Q(x)$–"$x > 2$"→"$x \le 5$"≡ " якщо $x > 2$, то $x \le 5$ ".
$I_{P \to Q} = X_P \cup I_Q =]-\infty; 2\,] \cup]-\infty; 5\,] =]-\infty; 5\,].$

6. $Q(x) \to P(x)$ – "$x \le 5$" → "$x > 2$" ≡ "якщо $x \le 5$, то $x > 2$",
$I_{Q \to P} = X_Q \cup I_P =]5; +\infty[\cup]2; +\infty[=]2; +\infty[\,.$

7. $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ – "$x > 2$"↔"$x \le 5$"≡"$x > 2$ тоді і тільки тоді, коли $x \le 5$",

$I_{P\leftrightarrow Q} = (I_P \cap I_Q) \cup (X_P \cap X_Q) = (\ ]2; +\infty[\cap]-\infty; 5\ ]) \cup (\ ]-\infty; 2] \cap]3; +\infty\ ]) =$
$]\ 2;\ 5\ ] \cup \varnothing =]\ 2;\ 5\ ]$. ◄

Завдання 4. Висловлення, яке записане у символічній формі, сформулювати словами і встановити його логічне значення:

1. $\forall a; в \in R\ \exists x \in R: ax = в$;
2. $\forall a, в, c \in R: a(в + c) = aв + ac$;
3. $\exists a \in N\ \forall в \in N: вa = в$;
4. $\forall a \in R\ \exists в \in R: a < в$;
5. $\forall a, в, c \in M: (a \perp в) \wedge (в \perp c) \to (a \parallel c)$, де M – множина прямих на площині;
6. $\exists a \in N\ \forall в \in N: a \le в$;
7. $\forall a, в, c \in M: (a \parallel в) \wedge (в \parallel c) \to (a \parallel c)$, де M – множина прямих на площині;
8. $\forall x, y \in R: x + y = y + x$;
9. $\forall a, в, \in Z: (a \le в) \wedge (в \le a) \to (a = в)$;
10. $\forall a, в \in N\ \exists c \in N: aв = c$.

Зразок розв'язування. Висловлення "$\forall x \in N: x > 0$", яке записане у символічній формі, записати словами і вказати його логічне значення.

► Дане висловлення слова запишеться так: "усі натуральні числа більші від нуля" або "усі натуральні числа додатні". Воно набуває логічного значення "1", тому що на множині натуральних чисел предикат "$x > 0$" тотожно істинний. ◄

Завдання 5. Замість крапок поставити у речення один із трьох виразів: "необхідно", "достатньо", "необхідно і достатньо" так, щоб утворилося істинне висловлення. Відповідь обґрунтувати.

1. Щоб натуральне число ділилося на 100, ..., щоб ділилося на 10.

2. Щоб сума квадратів двох дійсних чисел дорівнювала нулю, ..., щоб кожний із доданків дорівнював нулю.
3. Щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб один із його кутів дорівнював 60^{o}.
4. Щоб натуральне число ділилося на 27, ..., щоб сума його цифр ділилася на 9.
5. Щоб трикутник був рівнобедреним, ..., щоб він мав два рівні кути.
6. Щоб натуральне число ділилося на 5, ..., щоб його остання цифра була 5.
7. Щоб натуральне число ділилося на 9, ..., щоб воно ділилося на 18.
8. Щоб натуральне число ділилося на 8, ..., щоб воно ділилося на 2.
9. Щоб добуток двох дійсних чисел дорівнював нулю, ..., щоб обидва множники дорівнювали нулю.
10. Щоб число ділилося на 9, ..., щоб воно ділилося на 3.

Зразок розв'язування. Замість крапок поставити у реченні "для того щоб натуральне число ділилося на 5, …, щоб воно ділилося на 10" один із трьох виразів "необхідно", "достатньо" або "необхідно і достатньо" так, щоб утворилось істинне висловлення. Відповідь обґрунтувати.

► З даного речення можна вичленити два предикати: $P(x)$ – "натуральне число x ділиться на 5" і $Q(x)$ – "натуральне число x ділиться на 10". Областю визначення цих предикатів є множина натуральних чисел. Областю істинності предиката $P(x)$ є множина натуральних чисел, що кратні 5, а областю істинності предиката $Q(x)$ – множина натуральних чисел, що кратні 10. Кожне число, яке кратне 10, кратне і 5, але не кожне число, яке кратне 5, буде кратне 10. Отже, область істинності предиката $Q(x)$ є власною підмножиною області істинності предиката $P(x)$, а тому лише предикат $Q(x) \to P(x)$ буде тотожно істинним на множині натуральних чисел. Отже, подільність

натурального числа 10 є достатньою умовою його подільності на 5, і в даному реченні замість крапок потрібно поставити слово “достатньо”, а саме речення запишеться так: “для того щоб натуральне число ділилося на 5, достатньо, щоб воно ділилося на 10”. ◄

Завдання 6. Користуючись логічною та математичною символікою, записати дану теорему в символічній формі. Виділити в ній пояснювальну частину, умову й висновок. Записати символічно та сформулювати словами твердження, пов’язані з даною теоремою, та встановити їх логічні значення.

1. У прямокутнику діагоналі рівні.
2. Якщо зменшуване і від’ємник діляться на 5, то й різниця ділиться на 5.
3. Якщо плоска фігура є трикутником, навколо неї можна описати коло.
4. Якщо чотирикутник є квадратом, його діагоналі рівні.
5. Якщо плоска фігура є трикутником, у неї можна вписати коло.
6. Якщо чотирикутник є ромбом, його діагоналі взаємно перпендикулярні.
7. Якщо в добутку двох натуральних чисел один із двох множників ділиться на 7, то й добуток ділиться на 7.
8. Якщо в опуклому плоскому многокутнику число сторін дорівнює 5, то сума його внутрішніх кутів дорівнює 540^{o}.
9. Якщо в сумі двох натуральних чисел кожен із доданків ділиться на 3, то й сума ділиться на 3.
10. Якщо опуклий чотирикутник є паралелограмом, то його діагоналі в точці перетину діляться пополам.

Зразок розв’язування. Користуючись логічною і математичною символіками, записати теорему:

“Рівнобедрений трикутник має вісь симетрії” в символічній формі. Встановити будову теореми. Записати в символічній формі та сформулювати словами твердження, які пов’язані з даною теоремою, і встановити їх логічні значення.

► Щоб встановити будову теореми та сформулювати твердження, пов’язані з нею, запишемо її так: “Якщо трикутник рівнобедрений, то він має вісь симетрії”. Запис теореми словами не містить пояснювальної частини і змінних, але їх легко встановити за змістом теореми. Дійсно, в даній теоремі мова йде про довільні трикутники з множини M усіх трикутників. Отже, x – будь-який трикутник множини M, і теорема символічно запишеться так:

$$\forall x \in M : P(x) \to Q(x),$$

де предикат $P(x)$ – “трикутник x – рівнобедрений”,
предикат $Q(x)$ – “трикутник x має вісь симетрії”.
Дана теорема має таку будову:
1) пояснювальна частина: $\forall x \in M;$
2) умова теореми : $P(x)$;
3) висновок теореми: $Q(x)$.

Твердження, обернене даній теоремі, символічно запишеться:

$$\forall x \in M: Q(x) \to P(x).$$

Словами воно сформулюється: ”Якщо трикутник має вісь симетрії, то він рівнобедрений”.

Твердження, протилежне даній теоремі, символічно запишеться :

$$\forall x \in M : \overline{P(x)} \to \overline{Q(x)},$$

а словами: “Якщо трикутник не рівнобедрений, то він не має вісі симетрії”.

Твердження, обернене протилежному до даної теореми, символічно запишеться:

$$\forall x \in M : \overline{Q(x)} \to \overline{P(x)},$$

а словами: “Якщо трикутник не має вісі симетрії, то він не рівнобедрений”.

Усі твердження, пов’язані з даною теоремою, істинні. Отже, вони є теоремами. ◄

Завдання 7. Перевірити за допомогою кругів Ейлера правильність логічної будови міркування (незалежно від фактичного логічного значення складових цього міркування).

1. Деякі прямокутники є квадратами. Всі квадрати – правильні чотирикутники. Отже, деякі прямокутники є правильними чотирикутниками.

2. Усі натуральні числа є цілими числами. Всі цілі числа є раціональними числами. Отже, всі натуральні числа є раціональними числами.

3. Деякі рівнобедрені трикутники є рівносторонніми. Всі рівносторонні трикутники є правильними трикутниками. Отже, всі рівнобедрені трикутники є правильними трикутниками.

4. Усі рівносторонні трикутники є рівнобедреними. Деякі рівнобедрені трикутники є правильними многокутниками. Отже, всі рівносторонні трикутники є правильними многокутниками.

5. Усі натуральні числа є раціональними числами. Всі раціональні числа є дійсними. Отже, всі натуральні числа є дійсними числами.

6. Деякі цілі числа є натуральними. Всі натуральні числа є раціональними числами. Отже, всі цілі числа є раціональними числами.

7. Деякі цілі числа є натуральними. Всі натуральні числа є раціональними числами. Отже, деякі цілі числа є раціональними.

8. Усі ромби є паралелограмами. Деякі паралелограми є правильними чотирикутниками. Отже, деякі ромби є правильними чотирикутниками.

9. Усі ромби є чотирикутниками. Деякі чотирикутники є паралелограмами. Отже, всі ромби є паралелограмами.

10. Усі квадрати є паралелограмами. Деякі паралелограми є правильними чотирикутниками. Отже, всі квадрати є правильними чотирикутниками.

Зразок розв'язування. З'ясувати за допомогою кругів Ейлера правильність умовиводу: "Усі ромби – паралелограми. Деякі паралелограми – квадрати. Отже, деякі ромби – квадрати".

► Запишемо міркування у символічній формі:

$$\forall x \in M : R(x) \to P(x)$$

$$\frac{\exists x \in M : P(x) \wedge Q(x)}{\exists x \in M : R(x) \wedge Q(x)}$$

Якщо позначити P, R і Q множини істинності предикатів відповідно $P(x)$, $R(x)$ *і* $Q(x)$, то на мові теорії множин міркування запишеться

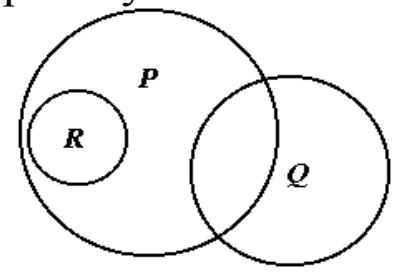
$$R \subset P$$

$$\underline{P \cap Q \neq \varnothing}$$

$$R \cap Q \neq \varnothing.$$

Тепер, вважаючи множини P, R і Q – довільними, але такими, що для них істинні посилки міркування, перевіряємо за допомогою кругів Ейлера, чи буде істинним висновок міркування.

З того, що $R \subset P$ і $P \cap Q \neq \varnothing$, ще не випливає, що $R \cap Q \neq \varnothing$. У цьому нас переконує малюнок.



Отже, міркування, побудовані за такою схемою, неправильні. ◄

ТЕСТИ

Елементи математичної логіки (Модуль 3)

1. Думка, в якій виділяється певний об‘єкт, встановлюються його властивості та зв‘язки з іншими об‘єктами оточуючої нас дійсності, називається...

а) ознакою; *в) обсягом поняття;*

б) поняттям; *г) твердженням.*

2. Висловлення – це ...

а) думка про яку можна сказати істинна вона чи хибна;

б) твердження, про яке можна сказати істинне воно чи хибне;

в) твердження, про яке можна сказати, що воно лише істинне;

г) твердження, про яке можна сказати, що воно лише хибне.

3. Пропозиційними зв‘язками у висловленнях є вирази:

а) „неправильно, що”, „і”, „або”, „якщо..., то”, „лише тоді, коли”;

б) „правильно, що”, „і”, „або”, „якщо..., то”, „тоді і тільки тоді”;

в) „неправильно, що”, „і”, „або”, „якщо..., то”, „тоді і тільки тоді, коли”;

г) „неправильно, що”, „і”, „якби”, „якщо..., то”, „тоді і тільки тоді”.

4. Висловлення, яке набуває логічного значення „1” тоді і тільки тоді, коли дане висловлення має логічне значення „0”, називається...

а) запереченням, *в) імплікацією,*

б) кон’юнкцією, *г) еквіваленцією* висловлень.

5. Висловлення, яке набуває логічного значення „1” тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення мають логічне „1”, називається...

а) запереченням, *в) кон’юнкцією,*

б) еквіваленцією, *г)диз’юнкцією* висловлень.

6. Висловлення, яке набуває логічного значення „0” тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення мають логічне значення „0”, називається...

а) диз'юнкцією, *в) еквіваленцією,*
б) імплікацією, *г) запереченням* висловлень.

7. Висловлення, яке набуває логічного значення „0” тоді і тільки тоді, коли перше висловлення має логічні значення „1”, а друге – „0”, називається...

а) диз'юнкцією, *в) запереченням,*
б) еквіваленцією, *г) імплікацією* висловлень.

8. Висловлення, яке набуває логічного значення „1” тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення мають однакові логічні значення, називаються...

а) імплікацією, *в) кон'юнкцією,*
б) запереченням, *г)еквіваленцією* висловлень.

9. Якщо прості висловлення замінити символами, а пропозиційні зв'язки відповідними знаками операцій логіки висловлень, то одержимо вираз, який називається...

а) теоремою, *в) формулою,*
б) поняттям, *г) тотожно істиним.*

10. Вказати закон виключення третього:

а) $p \wedge \overline{p}$*;* *б)* $p \vee \overline{p}$*;* *в)* $p \vee q$*;* *г)* $p \rightarrow q$*.*

11. При якій з даних операцій між висловленнями ставиться сполучник „або”:

а) еквіваленції, б) кон'юнкції, в) імплікації, г) диз'юнкції?

12. Вказати правильну послідовність виконання операцій у формулі логіки висловлень, при умові, що немає дужок:

а) еквіваленція, заперечення, імплікація, кон'юнкція, диз'юнкція;
б) заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція;
в) імплікація, заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, еквіваленція;

г) заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, еквіваленція, імплікація.

13. Таблицю, із занесеними логічними значеннями результатів операцій формули логіки висловлень, називають...

а) таблицею висловлень; *в) таблицею хибності;*
б) таблицею істинності; *г) таблицею результативності.*

14. Вираз „якщо…, то … ” між висловленнями ставиться при виконанні операції:

а) диз'юнкції; *б) еквіваленції;* *в) імплікації;* *г) заперечення.*

15. Еквіваленція двох висловлень p і q *символічно* записується так:

а) $p \leftrightarrow q$; *б)* $p \wedge q$; *в)* $p \rightarrow q$; *г)* $p \vee q$.

16. Формула логіки висловлень називається нейтральною:

а) якщо вона набирає кожне з логічних значень;
б) якщо при всіх наборах логічних значень змінних вона набирає логічного значення „1”;
в) якщо при всіх наборах логічних значень змінних вона набирає логічного значення „0”;
г) якщо вона тотожно хибна.

17. Вказати закон контрапозиції:

а) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$; *б)* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$;
в) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$; *г)* $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge \bar{r} \rightarrow \bar{q})$.

18. Вказати назву законів: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$.

а) закон де Моргана; *б) закони ідемпотентності;*
в) асоціативні закони; *г) закон подвійного заперечення.*

19. Вказати закон висновку.

а) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$; *б)* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$;
в) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$; *г)* $(r \wedge p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{p})$.

20. Вказати комутативні закони операцій логіки висловлень:

а) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$; *в)* $p \wedge q \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$;
б) $(p \vee q) \wedge r \equiv p \wedge (q \vee r)$; *г)* $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$.

21. Вказати закон розширеної контрапозиції:

а) $(p \to q) \leftrightarrow (\bar{q} \to \bar{p})$;

б) $(r \wedge p \to q) \leftrightarrow (r \wedge \bar{q} \to \bar{p})$;

в) $(p \to q) \wedge p \to q$;

г) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$.

22. Вказати назву закону: $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$.

а) закон силогізму; *в) закон тотожності;*

б) закон висновку; *г) закон несуперечності.*

23. Висловлення, яке не має логічних сталих, називається:

а) хибним; *б) складеним;* *в) пропозиційним;* *г) простим.*

24. Операцією заперечення висловлення, називається:

а) операція при якій довільному висловленню p ставиться у відповідність $\bar{p}$;

б) операція при якій довільному висловленню $\bar{p}$ *ставиться у відповідність p;*

в) висловлення, яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли дане висловлення p має логічне значення "0";

г) висловлення, яке набуває логічного значення "0" тоді і тільки тоді, коли дане висловлення p має логічне значення „1".

25. Формула тотожно істинна, якщо при всіх наборах логічних значень змінних, що входять до її складу, вона набуває:

а) логічного значення „хиба"; *в) різних логічних значень;*

б)істинності; *г) логічного значення „істина".*

26. Дві формули і **A** і **B** називаються рівносильними, якщо при всіх наборах логічних значень змінних, що входять до її складу, вони набувають:

а) однакових логічних значень; *в) логічного значення „1";*

б) різних логічних значень; *г) не мають логічного значення.*

27. Як читається запис: $p \vee q$?

а) p або q; *в) p і q;*

б) якщо p, то q; *г) p тоді і тільки тоді, коли q.*

28. Як читається:запис: $p \wedge q$?

а) якщо p, то q; *в) p і q;*

б) p або q; *г) p тоді і тільки тоді, коли q.*

29. Вказати дистрибутивний закон кон'юнкції відносно диз'юнкції:

а) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

б) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

в) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (p \wedge r)$;

г) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

30. Множина значень змінної, при яких предикат перетворюється в істинне висловлення називається:

а) областю визначення предиката;

б) областю значення предиката;

в) областю хибності предиката;

г) областю істинності предиката.

31. Область хибності предиката $P_{(x)}$ позначається:

а) $\overline{P}_{(x)}$; *б)* X_P; *в)* I_P; *г)* $X_{\overline{p}}$.

32. Предикат називається тотожно істинним, якщо його область істинності дорівнює області ...

а) визначення; б) значення; в) хибності; г) істинності.

33. Рівносильність предикатів $P_{(x)}$ і $Q_{(x)}$ записується так:

а) $Q_{(x)} = P_{(x)}$; *б)* $Q_{(x)} \wedge P_{(x)}$; *в)* $Q_{(x)} \vee P_{(x)}$; *г)* $Q_{(x)} \equiv P_{(x)}$.

34. Квантор загальності зображається:

а) $\forall$; *б)* $\models$; *в)* $\exists$; *г)* $\equiv$.

35. Квантор $\exists$ читається:

а) для кожного; б) існує; в) для всіх; г) для будь–якого.

36. Якщо на предикат навісити квантор загальності або квантор існування, то предикат перетворюється у:

а) істинне твердження; *в) висловлення;*

б) хибне твердження; *г) теорему.*

37. Якщо предикат містить більш як одну змінну, то, для того щоб він перетворився у висловлення, треба на кожну змінну навісити...:

а) змінну; б) предикат; в) диз'юнкцію; г) квантор.

38. Форма мислення, в якій з одного або кількох тверджень одержується нове твердження, яке містить в собі нові знання, називається:

а) умовиводом; б) теоремою; в) операцією; г) аксіомою.

39. Кожний умовивід складається з:

а) умови, висновку і пояснювальної частини;

б) гіпотез, висновків, виводу;

в) пояснювальної частини, гіпотез, висновків;

г) гіпотез, висновків, умови.

40 Правильність умовиводу можна встановити за допомогою:

а) кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації;

б) таблиці істинності; наведення контерприкладу; кругів Ейлера, логічних законів;

в) за допомогою гіпотез; висновку;

г) за допомогою законів логіки висловлень.

41. Предикат – це:

а) твердження, про яке можна сказати істинне воно чи хибне;

б) твердження, яке містить зміну і перетворюється у висловлення при заміні її значенням з області визначення;

в) висловлення, яке містить змінну;

г) твердження, яке містить змінну.

42. Вказати приклади двомісних предикатів:

а) $2x + 3y - 15 = 3$; *в) $3x + 5y - 12z + 10 = 0$;*

б) $2x - 15 = 0$; *г) $3a \cdot в > 15$.*

43. Якщо замість однієї або кількох змінних підставити значення, то місткість предикату:

а) збільшиться на таку саму кількість;

б) зменшиться на таку саму кількість;

в) залишиться незмінною;

г) буде нульовою.

44. Предикат $P_{(x)}$, визначений на множині M, є тотожно істинним, коли:

а) $I_p = M$; *б) $X_p = M$;* *в) $M = I_p \cup X_p$;* *г) $I_P \neq \varnothing$*

45. Два предикати $P_{(x)}$ *і* $Q_{(x)}$, визначені на множині *M*, називається рівносильними, якщо:

а) їх області хибності збігаються;

б) їх області хибності і істинності збігаються;

в) їх області істинності збігаються;

г) області істинності збігаються з множиною M.

46. Вибрати праву частину для рівності, щоб вона була істинною $I_{p \leftrightarrow Q} =$:

а) $(I_p \cap I_Q) \cup (X_p \cap X_Q)$; *в)* $(I_p \cap I_Q) \cap (X_p \cup X_Q)$;

б) $(X_p \cup I_Q) \cup (X_Q \cup I_p)$; *г)* $(I_p \cup I_Q) \cap (X_p \cup X_Q)$.

47. Вибрати праву частину для рівності, щоб вона була істинною $I_{P \wedge Q} =$:

а) $I_P \cup I_Q$; *б)* $I_{\bar{P}} \cup I_{\bar{Q}}$; *в)* $I_Q \cap I_P$; *г)* $I_P \cap I_Q$.

48. Квантор $\forall$ читається:

а) „для одного”; *в) „існує”;*

б) „для кожного”; *г) „для деякого”.*

49. Висловлення, яке написане словами: ”Для будь-яких дійсних чисел *а* і *в* існує натуральне число *с* таке, що *а* помножити на *в* дорівнює *с”*, записується символічно так:

а) $\forall\ a, в \in N\ \exists\ c \in N: a \cdot в = c$;

б) $\forall\ a, в \in N\ \exists\ c \in R: a \cdot в = c$;

в) $\exists\ a, в \in R\ \forall\ c \in N: a \cdot в = c$;

г) $\forall\ a, в \in R\ \exists\ c \in N: a \cdot в = c$.

50. Запис $\frac{A_1, A_2, \ldots A_n}{B}$ рівносильний наступному запису:

а) $A_1, A_2, \ldots A_n = B$; *в)* $A_1, A_2, \ldots A_n \models B$;

б) $A_1, A_2, \ldots A_n \subset B$; *г)* $B \models A_1, A_2, \ldots A_n$.

51. Теоремою називається:

а) висловлення, про яке можна сказати істинне воно чи хибне;

б) твердження, істинність якого треба довести на основі вже відомих істинних тверджень;

в) твердження, яке треба довести на основі виведених з цього твердження висновків;

г) істинне твердження.

52. Якщо на множині M, визначені предикати $P_{(x)}$ і $Q_{(x)}$, то $P_{(x)} \models Q_{(x)}$ тоді і тільки тоді, коли:

а) $P_{(x)} \to Q_{(x)}$; *б)* $P_{(x)} \Leftrightarrow Q_{(x)}$; *в)* $I_P \subset I_Q$; *г)* $I_{Q;} \in I_P$.

53. Якщо на множині M визначені предикати $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, то $P_{(x)} \models Q_{(x)}$ тоді і тільки тоді, коли:

а) висловлення $\exists\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$ *істинне;*

б) висловлення $\forall\, x \in M : Q_{(x)} \to P_{(x)}$ *істинне;*

в) висловлення $\exists\, x \in M : Q_{(x)} \to P_{(x)}$ *істинне;*

г) висловлення $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$ *істинне.*

54. Якщо на множині M визначені предикати $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, то $P_{(x)}$ буде достатньою умовою для предиката $Q_{(x)}$, якщо:

а) $P_{(x)} \models Q_{(x)}$; *в)* $Q_{(x)} \models P_{(x)}$;

б) $P_{(x)} \to Q_{(x)}$ – „1”; *г)* $P_{(x)} \wedge Q_{(x)}$ – „1”.

55. Якщо на множині M задано предикат $P_{(x)}$, то істинним буде твердження:

а) $I_p \cap X_p = M$; *в)* $I_p \cup X_p = \varnothing$;

б) $I_P \cup X_p = M$; *г)* $I_p \setminus X_p = M$.

56. Предикати $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, які визначенні на множині M, називаються рівносильними, якщо:

а) $I_P \cup I_Q = M$; *в)* $I_P = I_Q$;

б) $I_P \cap I_Q = M$; *г)* $I_P \cap I_Q = \varnothing$.

57. Областю істинності кон‘юнкції предикатів $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, які визначенні на множині M, є:

а) $I_P \cup I_Q$; *б)* $I_P \cap I_Q$; *в)* $I_P \setminus I_Q$; *г)* $M \setminus I_Q$.

58. Областю істинності диз‘юнкції предикатів $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, які визначенні на множині M, є:

а) $I_P \cap I_Q$; *б)* $I_{\bar{p}} \cup I_Q$; *в)* $I_P \setminus I_Q$; *г)* $I_P \cup I_Q$.

59. Областю істинності імплікації предикатів $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, які визначенні на множині M, є:

а) $I_P \cup I_Q$; *б)* $I_{\bar{p}} \cup I_Q$; *в)* $I_P \cap I_Q$; *г)* $I_P \cup I_Q$.

60. Областю істинності еквіваленції предикатів $P_{(x)}$.і $Q_{(x)}$, які визначенні на множині M, є:

а) $I_P \cup I_Q$; *в)* $(I_P \cup I_Q) \cap (I_{\bar{p}} \cup I_Q)$;

б) $(I_P \cap I_Q) \cup (X_P \cap X_Q)$; *г)* $(I_P \cap I_Q) \cup (I_{\bar{p}} \cap I_Q)$.

61. Операція навішування квантора загальності полягає в тому, що довільному одномісному предикату $P_{(x)}$, визначеному на множині M, ставиться у відповідність висловлення:

а) $\forall\ x \in M : P_{(x)}$*, яке набуває логічного значення ,,1'' тоді і тільки тоді, коли* $I_P = M$*;*

б) $\forall\ x \in M : P_{(x)}$*, яке набуває логічного значення ,,1'' тоді і тільки тоді, коли* $I_P \neq \varnothing$;

в) $\exists\ x \in M : P_{(x)}$*, яке набуває логічного значення ,,1'' тоді і тільки тоді, коли* $I_P \neq \varnothing$;

г) $\exists\ x \in M : P_{(x)}$*, яке набуває логічного значення ,,1'' тоді і тільки тоді, коли* $I_P = M$.

62. Яке з твердженнь істинне:

а) $\exists\ \overline{x, y \in N : x > y} \equiv \forall\ x, y \in N : \overline{x > y}$;

б) $\exists\ \overline{x, y \in N : x > y} \equiv \forall\ x, y \in N : \overline{x \leq y}$;

в) $\exists\ \overline{x, y \in M: x > y} \equiv \exists\ x, y \in N : \overline{x > y}$;

г) $\exists\ \overline{x, y \in M: x > y} \equiv \exists\ x, y \in N : x < y$?

63. Яке з твердженнь істинне:

а) $\forall\ \overline{x, y \in N : x \vdots y} \equiv \exists\ x, y \in N : \overline{x \vdots y}$;

б) $\forall\ \overline{x, y \in N : x \vdots y} \equiv \forall\ x, y \in N : \overline{x \vdots y}$;

в) $\forall\ \overline{x, y \in N : x \vdots y} \equiv \exists\ \overline{x, y \in N : x \vdots y}$;

г) $\forall\ \overline{x, y \in N : x \vdots y} \equiv \exists\ x, y \in N : x \vdots y$?

64. Предикати $P_{(x)}$ і $Q_{(x)}$*, визначені на множині M,* рівносильні тоді і тільки тоді, коли:

а) $P_{(x)} \models Q_{(x)}$; *в)* $I_P = I_Q$;

б) $P_{(x)} \models Q_{(x)}$ і $Q_{(x)} \models P_{(x)}$; *г) висловлення* $\forall\ x \in M : P_{(x)}$ *істинне.*

65. Якщо $P_{(x)}$ – умова, а $Q_{(x)}$ – висновок імплікації, то в реченні ставиться слово ,,достатньо'', якщо:

а) $P_{(x)} \models Q_{(x)}$; *б)* $Q_{(x)} \models P_{(x)}$; *в)* $I_P \subset I_Q$; *г)* $I_Q \subset I_P$,

66. Якщо $P_{(x)}$ – умова, а $Q_{(x)}$ – висновок імплікації, то в реченні ставиться слово ,,необхідно'', якщо:

а) $P_{(x)} \models Q_{(x)}$ *і* $Q_{(x)} \models P_{(x)}$; *в)* $P_{(x)} \models Q_{(x)}$;

б) $Q_{(x)} \models P_{(x)}$; *г)* $I_P \subset I_Q$.

67. Якщо $P_{(x)}$ – умова, а $Q_{(x)}$ – висновок імплікації, то в реченні ставиться вираз ,,необхідно і достатньо", якщо:

а) $I_P = I_Q$; *в)* $I_Q \subset I_P$;

б) $I_P \subset I_Q$; *г)* $P_{(x)} \models Q_{(x)}$ *і* $Q_{(x)} \models P_{(x)}$.

68. Теорема, яка сформульована в імплікативній формі, має символічний запис:

а) $\exists\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$; *в)* $\forall\, x \in M : P_{(x)} \leftrightarrow Q_{(x)}$;

б) $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$; *г)* $\exists\, x \in M : P_{(x)} \leftrightarrow Q_{(x)}$.

69. У теоремі, записаній так: $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$, - вираз $\forall\, x \in M$ є її:

а) умовою; *в) висновком;*

б) пояснювальною частиною; *г) гіпотезою.*

70. У теоремі, записаній так: $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$, - предикат $P_{(x)}$ є її:

а) умовою; *в) висновком;*

б) пояснювальною частиною; *г) гіпотезою.*

71. Твердження: $\forall\, x \in M : Q_{(x)} \to P_{(x)}$ є:

а) оберненим теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

б) протилежним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

в) рівносильним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

г) оберненим до протилежного або протилежним до оберненого теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$.

72. Твердження $\forall\, x \in M : \overline{Q}_{(x)} \to \overline{P}_{(x)}$ є:

а) оберненим теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

б) протилежним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

в) рівносильним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

г) оберненим до протилежного або протилежним до оберненого теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$.

73. Твердження $\forall\, x \in M : \overline{\overline{P}}_{(x)} \to Q_{(x)}$ є:

а) оберненим теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

б) протилежним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

в) рівносильним теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$;

г) оберненим до протилежного або протилежним до оберненого теоремі $\forall\, x \in M : P_{(x)} \to Q_{(x)}$.

74. Твердження $\overline{\overline{P}}_{(x)} \to Q_{(x)}$ рівносильне твердженню:

а) $P_{(x)} \to Q_{(x)}$; *б)* $\overline{Q}_{(x)} \to \overline{P}_{(x)}$; *в)* $Q_{(x)} \to P_{(x)}$; *г)* $P_{(x)} \leftrightarrow Q_{(x)}$;

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ IV
(Цілі невід‘ємні числа)

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1: «Теоретико-множинна побудова множини цілих невід’ємних чисел (кількісна теорія)»

Аналіз контрольної роботи

1. Загальний аналіз
2. Аналіз по задачах.
3. Опрацювання контрольної роботи.

Теоретичні питання

1. На основі яких джерел судять про виникнення натурального числа?
2. Історія виникнення поняття числа.
3. Поняття про число 0. Множина цілих невід’ємних чисел.
4. Різні підходи до означення множини цілих невід’ємних чисел.
5. На основі чого означається поняття цілих невід’ємних чисел при теоретико-множинній побудові множини цілих невід’ємних чисел?
6. Означення скінченної і нескінченної множин. Властивості скінченних множин.
7. Різні формулювання означення натурального числа при теоретико-множинній побудові множини цілих невід’ємних чисел.
8. Означення нуля. Множина цілих невід’ємних чисел.
9. Рівність і нерівність цілих невід’ємних чисел. Чому, при встановленні тверджень про цілі невід’ємні числа, в яких користуються властивостями множин представників, потрібно доводити, що ця властивість не залежить від множин представників?
10. Означення відношення „менше” на множині цілих невід’ємних чисел та його властивості.

11. Відношення “менше”, „більше”, „менше або дорівнює”, „більше або дорівнює” на множині цілих невід’ємних чисел та їх властивості. Відношення природного порядку на множині цілих невід’ємних чисел.
12. Поняття про приєднання елемента до множини. Поняття наступного цілого невід’ємного числа.

Задачі для розв’язування

1. Навести приклади рівнопотужних множин.
2. Дано множину $A = \{а, б, в, г, д, е\}$ і $B = \{к, л, м, н\}$. Виділити у множині A підмножину, яка рівнопотужна множині B.
3. У відношенні рівності чи рівнопотужності знаходяться множини A і B: .
   1) A – множина сторін трикутника,
      B – множина вершин трикутника;
   2) A – множина кілець на зрізі стовбура,
      B – множина років, які росло дерево;
   3) A – множина різних букв у слові математика,
      $B = \{м, а, т, е, и, к\}$;
   4) A – множина натуральних чисел, які кратні 10 і менші 101,
      B – множина натуральних чисел, які є точними квадратами і менші 101;
   5) $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$,
      $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$?
4. Скільки елементів містить кожна із множин:
   1) $A = \{x \in N_0 / x < 10\}$;
   2) $B = \{x \in N_0 / x < 1\}$;
   3) $C = \{x \in N_0 / 0 < x < 1\}$;
   4) $Д = \{x \in N_0 / x \leq 0\}$?

   Чи є серед них рівнопотужні?
5. Множина A містить 3 елементи і рівнопотужна множині C, яка є власною підмножиною множини $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Вкажіть серед наступних відповідей правильні:

1) $C = \{1, 2, 3\}$; 2) $C = \{1, 3, 5, 7\}$;
3) $C = \{3, 7, 9\}$; 4) $C = \{0, 1, 3\}$.

6. Користуючись означення відношення „менше” на множині цілих невід‘ємних чисел, поясніть чому істинні нерівності:
1) $0 < 1$; 2) $4 < 6$; 3) $3 < 7$.

7. Довести, що для довільних множин A_1, B_1, A_2, B_2, якщо:
$A_1 \sim A_2$, $A_1 \cap B_1$
$B_1 \sim B_2$, $A_2 \cap B_2$
то $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$

8. Довести, що означення відношення „менше” на множині цілих невід‘ємних чисел не залежить від множини представників.

9. Довести, що декартів добуток довільних скінченних множин A і B є множина скінченна.

Завдання для самостійного опрацювання:

Теоретичні завдання. Додавання і віднімання цілих невід‘ємних чисел.

Практичні завдання.

1. № 38. [8, с. 126]. Прочитайте записи: $n(A) = 5$, $n(B) = 0$. Наведіть приклади множин А і В, що задовольняють ці умови.
2. № 39. [8, с. 126]. Придумайте множини C і D, для яких виконуються такі умови: а) $n(C) = n(D)$ і $C \neq D$;
б) $n(C) = n(D)$ і $C = D$.
3. № 40. [8, с. 126]. Використовуючи теоретико-множинне трактування відношення „менше”, покажіть що:
а) $4 < 5$; б) $0 < 2$
4. № 41. [8, с. 126]. Порівняйте числа $n(A)$ і $n(B)$, якщо
а) $A \subset B$; б) $A \subset B$ і $A \neq B$.
5. № 42. [8, с. 126]. Наведіть приклади завдань із підручників з математики для початкових класів, у яких:
а) натуральне число виступає як кількісне;
б) відношення „менше” для натуральних чисел розглядається з теоретико-множинних позицій.

Тема 2: «Додавання і віднімання цілих невід‘ємних чисел»

І. Теоретичні питання

1. Означення суми 2-х цілих невідмних чисел через об‘єднання множин.
2. Що і для чого потрібно довести про суму 2-х цілих невідмних чисел?
3. Операція додавання. Закони додавання. Наслідки.
4. Як дати означення відношення „<” на множині цілих невід‘ємних чисел через додавання? Для чого треба це означення?
5. Закони монотожності і правила скорочення для додавання цілих невід‘ємних чисел.
6. Сума і додавання в початковому курсі математики. Означення суми кількох цілих невід‘ємних чисел.
7. Означення різниці цілих невід‘ємних чисел, через доповнення підмножини до множини.
8. Означення різниці через суму. Теорема про існування і єдиність різниці.
9. Операція віднімання цілих невід‘єних чисел. Правила віднімання числа від суми і суми від числа.
10. Різниця і віднімання в початковому курсі математики.

ІІ. Практичні завдання

1. Довести, що сума 2-х цілих невід‘ємних чисел не залежить від множин представників через які вона означена.

2. Чому сума двох цілих невід‘ємних чисел є цілим невід‘ємним числом?

3. Звідки випливає, що сума завжди існує і визначається однозначно?

4. Довести закон монотонності і правило скорочення для додавання відносно відношення менше:

$\forall\ a, в, c \in N_0\ a < в \rightarrow a + c < в + c,$

$\forall\ a, в, c \in N_0\ a + c < в + c \rightarrow a < в.$

5. Знайти $|A|$, $|B|$ і $|A \cup B|$

1) $A = \{a, в, c\}$; $B = \{d, e, f\}$;

2) $A = \{ a, в, c \}$; $B = \{a, в, d, e \}$;

3) $A = \{ a, в, c \}$; $B = \varnothing$.

6. Які умови потрібно накласти на скінченні множини A і B, щоб були істинними твердження:

1) $|A| + |B| > |A \cup B|$;

2) $|A| + |B| = |A|$;

3) $|A| + |B| = |B|$;

4) $|A| + |B| = |A \cup B|$?

7. Чи може сума 2-х цілих невід‘ємних чисел дорівнювати їх різниці?

8. Використовуючи логічну і математичну символіку, записати такі висловлення:

1) яке б не було ціле невід‘ємне число x знайдеться ціле невід‘ємне число y таке, що $x - y = 1$;

2) яке б не було ціле невід‘ємне число x існує натуральне число y таке, що $x - y = x$;

3) існує ціле невід‘ємне число x, таке, що $x - x = x$.

9. Обчислити значення виразу найзручнішим способом.

1) $(30 + 7) + (10 + 4)$;

2) $38 + 89 + 32 + 11$;

3) $277 + 169 + 431 + 323$;

4) $(16 + 9) + (21 + 14)$;

5) $273 + 154 + 1227 + 446$;

6) $573 + 189 + 327 = 900 + 189$.

11. Не проводячи обчислень вказати результат:

1) $(1087 - 678) + 678$;

2) $468 + (3906 - 468)$.

12. Розв‘язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами операцій.

1) $(x + 25) + 70 = 220$;

2) $160 - (x - 15) = 90$;

3) $(15 + x) - 60 = 90$;

4) $(x + 15) - 60 = 90$.

13. № 48. [4, с. 128]. Поясніть, чому нижченаведені задачі розв’язуються додаванням:

а) Оля зібрала гриби: три білих і два підберезники. Скільки грибів зібрала Оля?

б) У парку 9 беріз. Їх на 3 менше ніж ялинок. Скільки ялинок у парку?

14. № 56. [4, с. 128]. Пояснити чому нижченаведені задачі розв’язуються відніманням:

а) На станцію прибуло 7 вагонів з вугіллям, 3 вагони розвантажили. Скільки вагонів залишилось розвантажити?

б) На столі 10 чашок, їх на 2 більше, ніж ложок. Скільки ложок на столі?

15. На основі теоретико-множинного підходу до побудови множини цілих невід‘ємних чисел, обгрунтувати вибір операцій при розв‘язуванні задач.

1) В математичній олімпіаді брали участь 5 учнів 6-го класу. Число учнів цього класу, які не брали участі в олімпіаді, на 17 більше, ніж учасників олімпіади. Скільки учнів у класі?
2) Із 45 учнів кожен відвідує хоровий гурток або спортивну секцію, причому 30 учнів відвідує хоровий гурток, а 20 – спортивну секцію. Скільки учнів ходить лише на хоровий гурток і лише в спортивну секцію?

16. Довести, що якщо відповідні різниці існують, то для довільних цілих невід‘ємних чисел a, $в$, c, мають місце рівності:

а) $a – (в – c) = (a – в) + c$;

б) $a – (в – c) = (a + c) – в$.

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичне завдання. Множення і ділення цілих невід‘ємних чисел

Практичні завдання.

1. № 46. [4, с. 127]. Встановити, на основі яких законів додавання здійснені нижче наведені перетворення:

а) 79 + 54 + 21 = 79 + 21 + 54 = (79 + 21) + 54;

б) (86 + 78) + 22 = 86 + (78 + 22) = (78 + 22) + 86;

в)23 + (88 + 77) = (23 + 88) + 77 = (88 + 23) + 77 = 88 + (23 + 77).

2. № 47. [4, с. 128]. Знайти значення виразу і поясніть, які закони додавання були при цьому використані:

а) (57 + 58 + 89) + (32 + 11 + 43);

б) 38 + 89 + 32 + 11.

3. № 48. [4, с. 128]. Пояснити, чому нижче наведені задачі розв’язуються додаванням:

а) Із коробки взяли спочатку 4 олівці, а потім – ще 2 олівці. Скільки всього олівців взяли із коробки?

б) У Каті було 3 кульки, а у Тані на 1 кульку більше. Скільки кульок було у Тані?

4. № 50. [4, с. 128]. Чи може сума двох натуральних чисел дорівнювати:

а) одному із доданків; б) нулю?

5. № 51. [4, с. 128]. Як зміниться сума, якщо:

а) один із доданків збільшити на 2;

б) один із доданків збільшити у 2рази;

в) кожний із двох доданків збільшити на 2?

г) кожний із двох доданків збільшити у 2 рази?

Наведені припущення доведіть у загальному виді.

6. № 52. [4, с. 128]. Встановити, на якій теоретичній основі вивчається в початковому курсі математики переставна властивість додавання. Ознайомтесь з правилами додавання числа до суми, суми до числа, суми до суми. Які закони додавання натуральних чисел є основою даних правил?

7. № 53. [4, с. 128]. Знайти $|A|$, $|B|$ і $|\overline{B_A}|$, якщо $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$, а його підмножина:

а) $B = \{e, d, k\}$; б) $B = \{a, b, c, d, e, f, k\}$;

в) $B = \varnothing$.

8. № 56. [4, с. 128]. Пояснити чому нижче наведені задачі розв’язуються відніманням:

а) На нашій вулиці будують дев’ятиповерховий будинок. 5 поверхів уже побудували. Скільки поверхів потрібно добудувати?

б) У зоопарку 6 ведмедів, а верблюдів на 2 менше. Скільки верблюдів у зоопарку?

Тема 3: «Множення і ділення цілих невід'ємних чисел»

І. Теоретичні питання

1. Означення добутку двох цілих невід'ємних чисел через декартів добуток множин.
2. Що і чому потрібно довести про означення добутку двох цілих невід'ємних чисел? Як це робиться?
3. Теорема про існування і єдиність добутку двох цілих невід'ємних чисел.
4. Як дається означення добутку 2-х цілих невід'ємних чисел у початковому курсі математики? (Означення добутку через суму).
5. Операція множення цілих невід'ємних чисел. Закони операції множення.
6. Особливості законів монотонності та правил скорочення для операції множення.
7. Означення добутку кількох цілих невід'ємних чисел.
8. Означення частки цілого невід'ємного і натурального числа через розбиття множини на класи рівнопотужних множин.
9. Означення частки цілого невід'ємного числа і натурального числа в початковому курсі математики (означення частки через добуток).
10. Існування і єдиність частки. Означення операції ділення цілих невід'ємних чисел.
11. Основна властивість частки.
12. Правило ділення суми на число.
13. Правила ділення добутку на число.

ІІ. Практичні завдання

1. Знайти безпосередньо $|A|$, $|B|$ і $|A \times B|$, якщо:
   1) $A = \{a, в, c\}$ і $B = \{a, в\}$;
   2) $A = \{a, в, c\}$ і $B = \{a\}$;
   3) $A = \{a, в, c\}$ і $B = \varnothing$.
2. Дані висловлення записати в символічній формі і вказати їх логічне значення. Відповідь обґрунтуйте.

1) Яке б не було натуральне число x знайдеться натуральне число y таке, що $x \cdot y = x$
2) Яке б не було ціле невід'ємне число x знайдеться ціле невід'ємне число y таке, що $xy = 0$.
3) Яке б не було ціле невід'ємне число x знайдеться ціле невід'ємне число y таке, що $xy > 1000$.
4) Існує ціле невід'ємне число a таке, що $(a + 5) : 5 = 5$.
5) Для довільного цілого невід'ємного числа a знайдеться натуральне число $в$, таке, що $(a + в) : в = a + 5$.

3. Довести, що при існуванні відповідних часток для довільних натуральних чисел a, $в$, c мають місце рівності:
1) $a : (вc) = (a : в) : c$ – правило ділення числа на добуток
2) $a : (в : c) = (ac) : в$ } – правила ділення числа на
3) $a : (в : c) = (a : в) \cdot c$ } частку

4. Обчислити найзручнішим способом. Відповідь обгрунтувати.

1) $5 \cdot 582 \cdot 2$;
2) $8 \cdot 97 \cdot 125$;
3) $(36 \cdot 15) : 9$;
4) $(670 + 134) : 67$;
5) $4 \cdot 427 \cdot 25$;
6) $125 \cdot 21 \cdot 8 \cdot 7$;
7) $(750 : 5) : 2$;
8) $(210 – 21) : 21$.

5. Замість крапок поставте один із знаків „=", „<", „>" так, щоб утворилось істинне висловлення. Відповідь обґрунтуйте.

1) $842 \cdot 52$ ... $842 \cdot 61$;
2) $8 \cdot 31 – 3 \cdot 31$ ... $6 \cdot 31$;
3) $3 \cdot 29 + 7 \cdot 29$ ... $10 \cdot 29$;
4) $7 \cdot 43 + 9 \cdot 43$ ... $15 \cdot 43$.

6. На основі залежності між компонентами і результатами операцій розв'язати рівняння:

1) $(x : 2) \cdot 11 = 209$;
2) $728 : (7 \cdot x) = 13$;
3) $28x : 14 = 12$.

7. Встановити помилки в міркуванні:

1) Доведемо, що будь-яке ціле невід'ємне число дорівнює 0.
Для довільного цілого навідємного числа має місце рівність $(a + a)(a - a) = (a - a)(a - a)$
Скориставшись правилом скорочення $a + a = a - a \Rightarrow 2a = 0. a = 0$
2) Доведемо, що для будь-якого цілого невід'ємного числа a має місце рівність $a = 2a$.
Дійсно рівність $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$ істинна для будь-якого цілого невід'ємного числа. Цю рівність можна записати так $a(a - a) = (a + a)(a - a)$. За правилом скорочення $a = a + a$; $a = 2a$.
3) Рівняння учень розв'язав так:

$$x^2 + x = 5x,$$
$$x + 1 = 5,$$
$$x = 4.$$

8. На основі теоретико-множинного підходу до побудови множини цілих невід'ємних чисел обґрунтуйте вибір операції при розв'язуванні задач.

1). № 72. [4, с. 131]. Для уроку з трудового навчання дівчинка принесла 6 листочків червоного паперу, це у 2 рази менше, ніж зеленого. Скільки листків зеленого паперу принесла дівчинка?

2) У дівчинки є 5 різних платтячок, 3 різні кофтинки і 3 різні спіднички. Кожного дня вона може одягти платтячко, або спідничку і кофтинку. Протягом кількох днів дівчинка може бути по різному одягнена.

3) № 76 [4, с. 131]. У Колі 12 кроликів, а у Володі в 4 рази менше, ніж у Колі. Скільки кроликів у Володі?

4) № 76 [4, с. 131]. У коробці лежало 8 кольорових олівців, їх у 2 рази більше, ніж простих. Скільки простих олівців лежало у коробці?

5) У грі взяли участь 66 хлопців і 30 дівчаток. Вони поділилися на загони по 12 осіб у кожному. Скільки утворилося загонів?

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання. Аксіоматична побудова множини цілих невід'ємних чисел.

Практичні завдання.

1. № 64. [4, с. 130]. Знайти $|A|$, $|B|$ і $|A \times B|$, якщо $A = \{k, l, m, n, s\}$, а множина B така:

а) $B = \{r, p\}$; б) $B = \{l\}$; в) $B = \varnothing$.

2. № 67. [4, с. 130]. Встановити, на основі яких законів множення виконані перетворення:

а) $26 \cdot 15 = 26 \cdot (3 \cdot 5) = 26 \cdot (5 \cdot 3) = (26 \cdot 5) \cdot 3$;

б) $4 \cdot 47 \cdot 25 = 4 \cdot 25 \cdot 47 = (4 \cdot 25) \cdot 47$.

3. № 69. [4, с. 131]. Знайти значення виразу, використовуючи дистрибутивність множення відносно додавання:

а) $9 \cdot 13 + 9 \cdot 87$; б) $5 \cdot (12 + 44)$; в) $62 \cdot 103$.

4. № 72. [4, с. 131]. Пояснити, чому нижче наведені задачі, розв'язуються дією множення:

а) На кожне дитяче пальто потрібно пришити 4 ґудзики. Скільки ґудзиків потрібно пришити на 7 таких пальт?

б) Учениця прочитала першого дня 9 сторінок книжки, а другого дня – у 2 рази більше, ніж першого. Скільки сторінок книжки прочитала учениця другого дня?

5. № 76. [4, с. 131]. Пояснити, чому наведені нижче задачі розв'язуються дією ділення:

а) 6 кусків цукру розклали у склянки з чаєм по 2 кусочки в кожну. На скільки склянок вистачило цукру?

б) 10 зошитів роздали 5 учням порівну. Скільки зошитів отримав кожен?

Тема 4: «Аксіоматичний підхід до побудови множини цілих невідємних чисел. Аксіоми Пеано».

І. Теоретичні питання

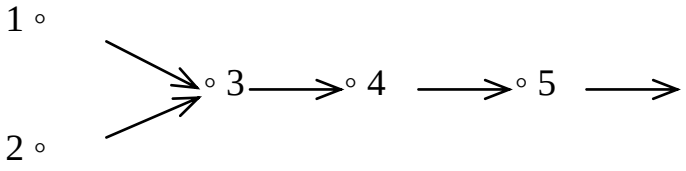
1. Суть аксіоматичного методу.
2. Вимоги до системи аксіом.
3. Аксіоми Пеано.

4. Означення додавання та множення.
5. Властивості операцій додавання та множення.

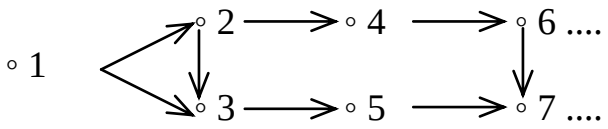
II. Практичні завдання

1. Встановити, які із множин, зображених на малюнках, є моделями системи аксіом Пеано:

а)



б)



в) ◦ 5 ⟶ ◦ 6 ⟶ ◦ 7 ⟶ ◦ 8 ....

2. На основі аксіоматичної побудови множини цілих невід‘ємних чисел, істотно використавши аксіому індукції, а також раніше доведені твердження, довести, що:

а) $\forall\ a, в, c \in N_0 : a = в \rightarrow a + c = в + c;$

б) $a, в, c \in N_0 : (a + в) + c = a + (в + c)$.

3. Знайти суму, користуючись аксіоматичним означенням додавання: 6 + 5.

4. Проблемне завдання для учнів початкових класів. Коли таке буває?

$47 + x = 47 - x;$ $x + 89 = 89 - x.$

5. Знайти добуток 8×5, користуючись аксіоматичним означенням множення.

6. Довести правий дистрибутивний закон множення відносно додавання:

$\forall\ a, в, c \in N_0 : (a + в) \cdot c = ac + вc.$

7. Довести асоціативний закон множення: $\forall\ a, в, c \in N_0 : (a \cdot в)\ c = a\ (в \cdot c)$.

III. Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичне завдання. Властивості множини цілих невід‘ємних чисел. Принцип і метод математичної індукції.

Практичні завдання.

№17. [8, с. 213]. Чи задовольняє аксіомам Пеано множина чисел

$\{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $n \in N_0$?

№18. [8, с. 213]. На основі аксіоматичної побудови множини цілих невід'ємних чисел, використовуючи аксіому індукції, довести, що:

1) $\forall\, a \in N_0$: $a + 1 = 1 + a = a'$;

3) $\forall\, a \in N_0$: $a' + b = a + b' = (a + b)'$;

4) $\forall\, a \in N_0$: $a' \cdot b = a \cdot b + b$.

№19. [8, с. 213]. Скласти таблиці додавання і множення для числа 4.

Тема 5: «Властивості множини цілих невід’ємних чисел. Ділення з остачею. Метод математичної індукції»

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Означення відношення „менше” на множині цілих невід’ємних чисел та його властивості.
2. Означення відношення „більше”, „менше або рівне”, „більше або рівне” на множині цілих невід’ємних чисел та їх властивості.
3. Властивості рівностей і нерівностей з цілими невід’ємними числами.
4. Дискретність множини цілих невід’ємних чисел.
5. Принципи найменшого і найбільшого чисел.
6. Ділення з остачею.
7. Принцип математичної індукції.
8. Схема доведення методом математичної індукції.
9. Відрізок натурального ряду чисел та його властивості.

10. Лічба елементів.
11. Означення скінченої множини.

III. Задачі для розв'язування.

1. №23 (2,4) [4, с. 213]. Користуючись методом математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа n мають місце рівності.

1) $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n\,(2n - 1)$;

2) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$.

2. №24. [4, с. 213]. Відомі остачі від ділення чисел a і b на число c. Як знайти найзручнішим способом остачі від ділення $a + b$ і $a \cdot b$ на число c?

3. №25. [4, с. 213]. Які остачі одержаться при діленні числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$ на числа 2, 3, 4, 5 і 6? Яка остача одержиться при діленні даного числа на число 120?

4. №26. [4, с. 213]. Скільки і які різні остачі одержуються при діленні цілих невід'ємних чисел на число 6 ? 4? 2? (усно).

5. №27. [4, с. 213]. Записати загальний вигляд цілих невід'ємних чисел, які при діленні на число m дають остачу r. Розглянути підмножини всіх таких чисел. Скільки при цьому одержиться різних підмножин множини цілих невід'ємних чисел N_0? Чи задають вони розбиття множини N_0 на класи?

6. Записати числа відрізка натурального ряду чисел: $\overline{1;5}$, $\overline{1;8}$.

IV. Завдання для самостійної роботи

1. №23 (1,3) [4, с. 213]. Користуючись методом математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа n мають місце рівності:

1) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + n\,(3n + 1) = n\,(n+ 1)^2$.

2. [9, ч.І. Завд. 1 (в. 9, 10), с. 16].

1) Скільки різних двобуквених відкритих складів можна скласти із букв слова „вітчизна”?
2) Бібліотеці треба оправити 1500 книг. Одна майстерня може оправити ці книги за 15 днів, а друга – за 10. За скільки днів закінчать роботу ці майстерні, працюючи разом?

3. Розв’язати рівняння: $8 - 40 : (((25 \cdot x + 4) - 19) : 3) = 6$.

Тема 6: «Відрізки і операції над ними. Натуральне число як міра відрізка.

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Поняття відрізка. Порівняння відрізків.
2. Еталон вимірювання. Вимірювання відрізків.
3. Відношення між відрізками.
4. Операції над відрізками.
5. Натуральне число, як міра відрізка.
6. Додавання і віднімання натуральних чисел, які є мірами відрізків.
7. Множення і ділення натуральних чисел, які є мірами відрізків.

ІІІ. Задачі для розв’язування

1. № 90. [8, с. 135]. При вимірюванні різних величин отримали 8 м, 8 $см^2$, 8 кг, 8 хв. Які величини виміряли? Що показує у кожному випадку число 8?
2. № 91. [8, с. 135]. Накреслити ламану МРТ так, щоб довжина відрізка МР дорівнювала 42 мм, а довжина відрізка РТ дорівнювала 56 мм. Виміряти довжину відрізка МТ. Скільки розв’язків має задача?
3. № 92. [8, с. 135]. Користуючись означенням натурального числа, як міри відрізка, обґрунтува вибір дій при розв’язуванні наступних задач:

а) Будинок мав висоту 7 м 20 см. Потім його добудували на 4 м 90 см. Якої висоти став будинок?

б) Маса діжки з медом 58 кг. Маса порожньої діжки 8 кг. Скільки кілограмів меду в цій діжці?

в) Склянка чаю коштує 3 к. Скільки коштують 4 склянки чаю?

г) Ширина річки 18 м, а ширина струмка 2 м. У скільки разів річка ширша від струмка?

4. №93. [1, с. 135]. Нижченаведену задачу розв'язати різними способами, надавши до задачі графічну ілюстрацію і вкажіть найбільш раціональний спосіб її розв'язування:

В овочевий магазин привезли 5 т 180 кг картоплі. Із магазину в одну палатку відправили 1 т 400 кг картоплі, а в другу – 840 кг. Скільки картоплі залишили в магазині?

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №4

Завдання 1. На основі теоретико-множинного підходу до побудови множини цілих невід'ємних чисел обгрунтувати вибір операцій при розв'язуванні задач.

1. У спортивній грі взяли участь 66 хлопчиків і 30 дівчаток. Вони поділилися на загони по 12 осіб у кожному. Скільки утворилося загонів?
2. У дівчинки є 5 платтячок, 4 кофточки і 3 спіднички. Кожного дня вона може одягати або платтячко, або кофточку і спідничку. Протягом скількох днів може бути по різному одягнена?
3. На турбазу прибуло першого дня 150 туристів, а другого дня – 170. Щоб здійснити похід, 200 туристів розділились на групи по 20 осіб у групі, а решта – по 15 осіб. Скільки утворилося груп?

4. Три брати спіймали 41 карася. Коли один брат відклав для юшки 7 карасів, другий – 3, а третій – 4, то в кожного брата залишилась однакова кількість рибин. Скільки карасів спіймав кожний брат?
5. Комплексний обід складається з чотирьох страв. У меню є найменування 5 холодних, 2 перших, 6 других і 4 третіх страв. Скільки різних комплексних обідів можна скласти з цих страв?
6. На двох деревах сиділи граки. З першого дерева 9 граків полетіли зовсім, а з другого на перше перелетіли 5 граків. Після цього на кожному дереві стало по 8 граків. Скільки граків було на кожному дереві спочатку?
7. У шкільному саду росло 17 яблунь. Після того, як учні посадили ще вишні і сливи то в саду стало всього 59 дерев. Скільки слив посадили учні, якщо вишень вони посадили всього 23?
8. Треба пофарбувати 150 рам. Один маляр може це зробити за 10 днів, а другий за – 15. За скільки днів виконають цю роботу обидва маляри, якщо працюватимуть разом?
9. Скільки різних двохбуквених відкритих складів можна скласти із букв слова „батьківщина”?
10. Бібліотеці треба оправити 1500 книг. Одна майстерня може оправити ці книги за 15 днів, а друга – за 10. За скільки днів закінчать роботу ці майстерні, працюючи разом?

Зразок розв’язування. На основі теоретико-множинного підходу до побудови множини цілих невід'ємних чисел обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні задачі.

Майстер виготовляє 120 деталей за 8 год. Але коли він працює зі своїм учнем, то стільки ж деталей вони виготовляють за 5 год. Скільки деталей виготовляє учень за 1 год.?

► Нехай A – множина деталей, які виготовляє майстер за 8 год., працюючи сам, або з учнем за 5 год. B – множина деталей, які виготовляють майстер і учень за 1 год. разом, а C – множина деталей, які виготовляє майстер за 1 год. сам. Тоді множина C є підмножиною множини B. Потужність множини деталей, що виготовляє учень за одну годину за означенням різниці буде $|B \setminus C| = |B| - |C|$.

Число деталей, що виготовляють майстер і учень за одну годину разом, тобто потужність множини B, буде дорівнювати потужності однієї з підмножин множини A, коли її розбити на 5 рівнопотужних множин, які попарно не перетинаються. Отже, за означенням частки будемо мати $|B| = |A| : 5$. За умовою задачі $|A| = 120$, а тому $|B| = 120 : 5 = 24$ (деталі).

Число деталей, які виготовляє майстер за одну годину, тобто потужність множини C, буде дорівнювати потужності однієї із підмножин множини A, коли її розбити на 8 рівнопотужних підмножин, які попарно не перетинаються. Значить, $|C| = 120 : 8 = 15$ (деталей).

Отже, число деталей, які виготовляє учень за одну годину, буде

$$24 - 15 = 9 \text{ (деталей).}$$

Відповідь: учень виготовляє за одну годину 9 деталей. ◄

Завдання 2.

На основі аксіоматично побудови множини цілих невід'ємних чисел, істотно використовуючи аксіому індукції, довести, що:

1. $\forall a,в \in N_0 : a + в = a + в.$
2. $\forall a,в,c \in N_0 : (a + в) + c = a + (в + c)$
3. $\forall a,в,c \in N_0 : a = в \to a + c = в + c$
4. $\forall a \in N_0 : 0 \cdot a = 0$

5. $\forall a \in N_0 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

6. $\forall a, в \in N_0 : a^{/} в = ав + в$

7. $\forall a, в \in N_0 : ав = ва$

8. $\forall a, в, \in N_0 : (a + в)c = ac + вc$

9. $\forall a, в, c \in N_0 : (ав)c = a(вc)$

10. $\forall a \in N_0 \forall x \in N : a + x \neq a$.

Зразок розв'язування. Доведемо, що для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце рівність

$a + b = b + a.$ (1)

Позначимо через M – множину тих цілих невід'ємних чисел b, для яких при довільному цілому невід'ємному числу a має місце рівність (1).

1) Перевіримо, що $0 \in M$, тобто, що рівність має місце при $в = 0$. За властивістю нуля при додаванні для цілого невід'ємного числа a має місце рівність:

$a + 0 = 0 + a.$

Отже, $0 \in M$.

2) Припустимо, що $b \in M$, тобто, що для b і для довільного цілого невід'ємного числа a виконується рівність (1).

3) Доведемо, що і $b' \in M$. Дійсно,

$a + b' =$ за аксіомою 6

$= (a + b)' =$ за припущенням

$= (b + a)' =$ за аксіомою 6

$= b + a' =$ за властивістю одиниці при додаванні

$= b + (1 + a) =$ за асоціативністю додавання

$= (b + 1) + a =$ за властивістю одиниці при додаванні

$= b' + a.$

Звідси за транзитивністю відношення рівності одержуємо

$a + b' = b' + a.$

Отже, $b' \in M$. А тому за аксіомою індукції $M = N_0$. Це значить, що рівність (1) має місце для довільних цілих невід'ємних чисел a і b. ◄

Завдання 3. Користуючись методом математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа n має рівність

1. $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$;
2. $\frac{1}{1\cdot7}+\frac{1}{7\cdot13}+\frac{1}{13\cdot19}+\ldots+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{n}{6n+1}$;
3. $\frac{1}{1\cdot8}+\frac{1}{8\cdot15}+\frac{1}{15\cdot22}+\ldots+\frac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\frac{n}{7n+1}$;
4. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$;
5. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;
6. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;
7. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;
8. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{n}{2n+1}$;
9. $1+4+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$;
10. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Зразок розв'язування. $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

1) Перевіримо, що рівність має місце при $n = 1$.

$\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{3(2\cdot1+3)}$

$\frac{1}{15}=\frac{1}{15}$

Отже, рівність правильна при $n = 1$.

2) Припустимо, що рівність має місце при деякому натуральному числі
k ($n = k$), тобто

$$\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)}.$$

3) Доведемо, що рівність має місце при $n = k + 1$, тобто

$$\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+5)}.$$

Справді, перетворюючи ліву частину цієї рівності, на основі припущення 2) отримаємо, що

$$\frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \frac{1}{7\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{k}{3(2k+5)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}.$$

Розкладемо чисельник дробу на множники, використавши формулу: $ax^2 + вx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – корені тричлена $ax^2 + вx + c$.

$2k^2 + 5k + 3 = 0$

$D = в^2 - 4\,ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$k_1 = \frac{-в-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$; $\qquad k_2 = \frac{-в+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+1}{4} = -1$;

$2k^2 + 5k + 3 = 2\,(k + \frac{3}{2})\,(k + 1) = (2k + 3)(k + 1)$. Тому

$\frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{(2k+3)(k+1)}{3(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{3(2k+5)}$. Отже рівність має місце при $n = k + 1$.

4) Так як рівність має місце при $n = 1$ і з того, що вона правильна при деякому на натуральному числі k, слідує, що вона має місце при $k + 1$, то за принципом математичної індукції, вона має місце для будь-якого натурального числа n.

Завдання 4. Знайти x, використовуючи залежність між компонентами і результатами дій. Виконати перевірку одержаної відповіді.

1) $(74 \cdot 33 : 6 - x : 5) \cdot 29 - 3120 = 2680$;

2) $((5x + 178) \cdot 15 + 90) : 45 = 180$;

3) $200: (((7 + \frac{154}{x}) + 132) \cdot 5 - 630) = 2$;

4) $((\frac{(120+x)\cdot 40}{2} + 200) : 131) : 20 = 1$;

5) $315 : (36 - (\frac{(115+29)\cdot 3}{5x-198} + 15)) = 21$;

6) $(\frac{1000000-7x}{8} \cdot 5 + 529210) \cdot 10 - 9999999 = 1$;

7) $200 - 18 : (372 : 3x - 1) - 28 = 166$;

8) $1000 - 3\cdot(\frac{750}{3x} - 1) : 7 - 809 = 170$;

9) $(7x + 222171 : (100000 - 97843)) : 33 = 64$;

10) $564 - (48 \cdot (1683 - (197 + 7x)) : 1516) = 540$.

Зразок розв'язування. $100 - ((90000 - (\frac{112500}{x} - 468) \cdot 150) : 450) = 44$

1. Остання дія зліва – віднімання, x знаходиться у від'ємнику. Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного (100) відняти різницю (44).

$$100 - 44 = 56.$$

Маємо: $(90000 - (\frac{112500}{x} - 468) \cdot 150) : 450 = 56.$ (1)

2. В рівнянні (1) останньою зліва виконується дія ділення, x знаходиться в діленому. Щоб знайти невідоме ділене, треба частку (56) помножити на дільник (450).

$$56 \cdot 450 = 25200.$$

Маємо: $90000 - (\frac{112500}{x} - 468) \cdot 150 = 25200.$ (2)

3. В рівнянні (2) останньою зліва виконується дія віднімання, x знаходиться у від'ємнику. Щоб знайти

невідомий від'ємник, треба від зменшуваного (90000) відняти різницю (25200).

$$90000 - 25200 = 648000.$$

Маємо: $(\frac{112500}{x} - 468) \cdot 150 = 64800$ (3)

4. Останньою зліва у рівнянні (3) виконується дія множення. Щоб знайти невідомий множник, треба добуток (64800) поділити на відомий множник (150).

$64800 : 150 = 432.$

Тому $\frac{112500}{x} - 468 = 432.$

5. Міркуючи аналогічно, знаходимо невідоме зменшуване. Для цього до різниці (432) додаємо від'ємник (468).

$$432 + 468 = 900$$

$$\frac{112500}{x} = 900$$

6. Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене (1125500) поділити на частку (900). $x = 112500 : 900$

$x = 129.$

ТЕСТИ

Множина цілих невід'ємних чисел *(Модуль 4)*

1. Множина називається скінченною, якщо вона:

а) не має власної підмножини рівнопотужної їй;

б) не має власної підмножини.

в) має власну підмножину їй рівнопотужну;

г) збігається з будь-якою її власною підмножиною.

2. Множина рівнопотужна скінченній множині є множина:

а) нескінченна; б) порожня; в) скінченна; г) одинична.

3. Довільна підмножина скінченної множини є множина:

а) нескінченна; б) порожня; в) одинична; г) скінченна.

4. Об'єднання скінченної і одиничної множин є множина:

а) скінченна; б) порожня; в) нескінченна; г) одинична.

5. Об'єднання довільної скінченної сукупності скінчених множин є множина:

а) нескінченна; б) скінченна; в) порожня; г) одинична.

6. Клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин називається:

а) нулем; *в) цілим невід'ємним числом;*

б) одиницею; *г) натуральним числом.*

7. Запис $a = |A|$ читається:

а) число а належить множині А;

б) число а є потужністю множини А;

в) а є модулем числа А;

г) а є модулем множини А.

8. Нулем називається:

а) потужність порожньої множини;

б) множина, яка не містить елементів;

в) спільна властивість класу скінченних непорожніх рівнопотужних множин;

г) потужність скінченної множини.

9. Множиною натуральних чисел називається:

а) потужність скінченної множини;

б) спільна властивість класу скінченних множин;

в) клас скінченних непорожніх рівнопотужних множин;

г) всі натуральні числа.

10. Множиною цілих невід'ємних чисел називається:

а) потужність скінченної множини;

б) спільна властивість класу скінченних множин;

в) клас скінченних непорожніх рівнопотужних множин;

г) об'єднання множини натуральних чисел і числа „нуль".

11. Цілим невід'ємним числом називається:

а) потужність скінченної множини;

б) спільна властивість класу скінченних множин;

в)клас скінченних непорожніх рівнопотужних множин;

г) всі натуральні числа.

12. Два цілі невід'ємні числа *а* і *в* називаються рівними, якщо:

а) множина А дорівнює множині В;
б) А ~ В, де а = |А| і в = |В|;
в) множини, для яких ці числа є потужностями, рівнопотужні; *г) а = |А| і в = |В|.*

13. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел:
а) транзитивне; *в) антирефлексивне;*
б) зв'язне; *г) антисиметричне.*

14. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел:
а) зв'язне; *в) рефлексивне;*
б) антирефлексивне; *г) антисиметричне.*

15. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел:
а) зв'язне; *в) симетричне;*
б) антирефлексивне; *г) антисиметричне.*

16. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням:
а) еквівалентності; *в) порядку;*
б) зв'язним де а = |А|; *г) антисиметричним.*

17. Якщо у множині *А,* де а = |*А*|, знайдеться відмінна від неї підмножина A_1, яка рівнопотужна множині *В*, для якої *в* = |*В*|;то:
а) а > в; *б) а ≥ в;* *в) а < в;* *г) а ≤ в.*

18. Відношення „менше" на множині цілих невід'ємних чисел:
а) транзитивне; *в) симетричне;*
б) не зв'язне; *г) рефлексивне.*

19. Відношення „менше" на множині цілих невід'ємних чисел:
а) антирефлексивне; *в) симетричне;*
б) не зв'язне; *г) рефлексивне.*

20. Відношення „менше" на множині цілих невід'ємних чисел:
а) антисиметричне; *в) симетричне;*

б) не зв'язне; *г) рефлексивне.*

21. Відношення „менше" на множині цілих невід'ємних чисел:

а) зв'язне; *в) симетричне;*

б) не зв'язне; *г) рефлексивне.*

22. Відношення „менше" на множині цілих невід'ємних чисел:

а) не є відношенням порядку;

б) не зв'язне;

в) не є відношенням еквівалентності;

г) є відношенням порядку.

23. Сумою двох цілих невід'ємних чисел *а* і *в* називається:

а) потужність об'єднання двох множин А і В, де а = |А| і в = |В|;

б) потужність об'єднання двох множин А і В, які не перетинаються і потужностями яких є відповідно числа а і в;

в) об'єднання двох множин А і В, потужностями яких є відповідно числа а і в;

г) декартів добуток двох множин А і В, потужностями яких є відповідно числа а і в.

24. Підібрати кінцівку до правила скорочення для операції додавання: $\forall\ a, в, c \in N_0$:

а) $a = в \rightarrow a + c = в + c$; *в)* $a + в = в + a$;

б) $a + в = c + в \rightarrow a = c$; *г)* $(a + в) + c = a + (в + c)$.

25. Підібрати кінцівку до правила монотонності для операції додавання: $\forall\ a, в, c \in N_0$:

а) $a = в \rightarrow a + c = в + c$; *в)* $a + в = в + a$;

б) $a + в = c + в \rightarrow a = c$; *г)* $(a + в) + c = a + (в + c)$.

26. Підібрати кінцівку до символічного запису комутативного закону додавання: $\forall\ a, в, \in N_0$:

а) $a = в \rightarrow a + c = в + c$; *в)* $a + в = в + a$;

б) $a + в = c + в \rightarrow a = c$; *г)* $(a + в) + c = a + (в + c)$.

27. Вказати кінцівку до асоціативного закону додавання: $\forall\ a, в, c \in N_0$:

а) $a = в \rightarrow a + c = в + c$; *в)* $(a + в) \cdot c = ac + вc$;

б) $a + в = c + в \rightarrow a = c$; *г)* $(a + в) + c = a + (в + c)$.

28. Вказати правило монотонності для додавання відносно відношення порядку:
а) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a < в \rightarrow a + c = в + c;$
б) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a < в \rightarrow a + в > в + a;$
в) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a < в \rightarrow a + c < в + c;$
г) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a < в \rightarrow a + c > в + c.$

29. Вказати правило скорочення для додавання відносно відношення порядку:
а) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a + c < в + c \rightarrow a > в;$
б) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a + в = в + a \rightarrow a = в;$
в) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a + c < в + c \rightarrow a < в;$
г) $\forall\ a, в, c \in N_0\ \ a + c < в + c \rightarrow a = в.$

30. „Від перестановки доданків сума не зміниться” – це закон:
а) дистрибутивний; *в) комутативний;*
б) монотонності; *г) асоціативний.*

31. „Від перестановки дужок значення суми не зміниться” – це закон:
а) комутативний; *в) дистрибутивний;*
б) асоціативний; *г) монотонності.*

32. Різницею двох цілих невід‘ємних чисел *а* і *в*, що є потужностями відповідно множин *А* і *В* називається:
а) доповнення підмножини В до множини А;
б) доповнення підмножини А до множини В;
в) потужність доповнення підмножини В до множини А;
г) потужність доповнення підмножини А до множини В.

33. Відніманням двох цілих невід‘ємних чисел *а* і *в* називається:
а) доповнення підмножини В до множини А;
б) потужність доповнення підмножини В до множини А;
в) операція у множині цілих невід‘ємних чисел, при якій двом числам а і в ставиться у відповідність їх різниця а – в;
г) операція на множині цілих невід‘ємних чисел при якій двом числам а і в ставиться у відповідність їх різниця а – в.

34. Додаванням двох цілих невід‘ємних чисел *а* і *в* називається:

а) операція у множині цілих невід‘ємних чисел, при якій довільним двом числам а і в ставиться у відповідність число, що є їх сумою;

б) операція на множині цілих невід‘ємних чисел, при якій довільним двом числам а і в ставиться у відповідність їх сума;

в) об‘єднання двох множин А і В, які не перетинаються;

г) потужність об‘єднання двох множин А і В, які не перетинаються і потужностями яких є відповідно числа а і в.

35. Вказати кінцівку правила віднімання суми від числа (правильну рівність): $\forall$ *а, в, с* $\in N_0$*:*

а) $a - (в + c) = (a - в) + (a - c)$;

б) $(a + в) - c = (a - c) + (в - c)$;

в) $(a + в) - c = (a - c) + в = a + (в - c)$;

г) $a - (в + c) = (a - в) - c = (a - c) - в$.

36. Вказати кінцівку правила віднімання числа від суми (правильну рівність). При умові існування відповідних різниць, має місце рівність:

а) $a - (в + c) = (a - в) + (a - c)$;

б) $(a + в) - c = (a - c) + (в - c)$;

в) $(a + в) - c = (a - c) + в = a + (в - c)$;

г). $a - (в + c) = (a - в) - c = (a - c) - в$.

37. Добутком двох цілих невід’ємних чисел *а* і *в* називається:

а) декартів добуток множин А і В, потужностями яких є відповідно числа а і в;

б) сума в рівних доданків, кожен з яких дорівнює числу а;

в) операція на множині цілих невід’ємних чисел, при якій довільним двом числам а і в ставиться у відповідність їх добуток;

г) потужність декартового добутку двох множин А і В, потужностями яких є відповідно числа а і в.

38. Множенням цілих невід’ємних чисел *а* і *в* називається:

а) операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій довільним двом числам а і в ставиться у відповідність їх добуток;
б) потужність декартового добутку двох множин А і В, потужностями яких є відповідно числа а і в;
в) операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел а і в ставиться у відповідності число а · в, що є їх добутком;
г) сума в рівних доданків, кожен з яких дорівнює числу а.

39. Вказати хибне твердження:
а) добуток двох цілих невід'ємних чисел визначається однозначно;
б) добуток двох цілих невід'ємних чисел не завжди є цілим невід'ємним числом;
в) означення добутку двох цілих невід'ємних чисел не залежить від вибору множин-представників;
г) добуток двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

40. Вказати назву компонент і результату при множенні.
а) множники і частка; *в) множники і сума;*
б) множники і добуток; *г) доданки і добуток.*

41. Вказати назву компонент і результату при додаванні.
а) доданки і добуток; *в) доданки і сума;*
б) доданки і різниця; *г) множники і сума.*

42. Вказати комутативний закон множення.
а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a + в) \cdot c = a\,c + в\,c$;
б) $\forall\ a, в \in N_0$: $a \cdot в = в \cdot a$;
в) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c)$;
г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a = в \rightarrow ac = в\,c$.

43. Вказати асоціативний закон множення.
а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a + в) \cdot c = a\,c + в\,c$;
б) $\forall\ a, в \in N_0$: $a \cdot в = в \cdot a$;
в) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c)$;
г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a = в \rightarrow ac = в\,c$.

44. Вказати дистрибутивний закон множення відносно додавання.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a + в) \cdot c = a\,c + в\,c$;

б) $\forall\ a, в \in N_0$: $a \cdot в = в \cdot a$;

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c)$;

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a = в \rightarrow ac = в\,c$.

45. Вказати закон монотонності операції множення відносно відношення “рівно”.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a + в) \cdot c = a\,c + в\,c$;

б) $\forall\ a, в \in N_0$: $a \cdot в = в \cdot a$;

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c)$;

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a = в \rightarrow ac = в\,c$.

46. Вказати закон монотонності операції множення відносно відношення порядку.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a\,c < в\,c) \wedge c \neq 0 \rightarrow a < в$;

б) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a < в) \wedge (c \neq 0) \rightarrow a\,c < в\,c$;

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a\,c < в\,c \rightarrow a < в$;

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a < в \rightarrow a\,c < в\,c$.

47. Вказати правило скорочення операції множення відносно відношення порядку.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a\,c < в\,c) \wedge (c \neq 0) \rightarrow a < в$;

б) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a < в \rightarrow a\,c < в\,c$;

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$:$a\,c < в\,c \rightarrow a < в$;

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a < в) \wedge (c \neq 0) \rightarrow a\,c < в\,c$.

48. Вказати правило скорочення операції множення відносно відношення “рівно”.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a\,c < в\,c \rightarrow a < в$;

б) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $a\,c > в\,c \rightarrow a > в$;

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$:$a\,c = в\,c \rightarrow a = в$;

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$: $(a\,c = в\,c) \wedge (c \neq 0) \rightarrow a = в$.

49. Добутком двох цілих невід‘ємних чисел *а* і *в* називається:

а) потужність декартового добутку двох множин А і В, де $a = |A|$ *і* $в = |B|$;

б) 1) число нуль, якщо $в = 0$;

2) число а, якщо в = 1;

3) число, яке є сумою в доданків, кожний з яких дорівнює а, якщо в > 1.;

в) декартів добуток двох множин А і В, потужностями яких є числа а і в;

г) операція на множині цілих невід'ємних чисел при якій довільній парі чисел а і в ставиться у відповідність їх добуток.

50. Якщо множину *А*, потужністю якої є число *а,* розбито на рівнопотужні підмножини, що попарно не перетинаються, то часткою числа *а* і довільного натурального числа *в* називається:

а) потужність кожної із підмножин розбиття, якщо множину А розбито на в підмножин, або число підмножин розбиття, якщо кожна з них має потужністю число в;

б) називається ціле невід'ємне число х, добуток якого з числом в дорівнює числу а;

в) потужність кожної із підмножин розбиття;

г) число підмножин розбиття, якщо число в є потужністю кожної із підмножин розбиття.

51. Часткою довільного цілого невід'ємного числа *а* і натурального числа *в* називається:

а) потужність кожної із підмножин розбиття, якщо множину А розбито на в підмножин, або число підмножин розбиття, якщо кожна з них має потужністю число в;

б) ціле невід'ємне число х, добуток якого з числом в дорівнює числу а;

в) потужність кожної із підмножин розбиття;

г) число підмножин розбиття, якщо число в є потужністю кожної із підмножин розбиття.

52. Вказати хибне твердження:

а) якщо частка двох цілих невід'ємних чисел а і в існує, то а ≥ в;

б) при умові існування відповідних часток, частка не зміниться, якщо ділене і дільник поділити або помножити на одне й теж саме число;

в) для довільних цілого невід'ємного числа а і натурального числа в, якщо їх частка існує, то вона єдина;

г) частка двох цілих невід'ємних чисел завжди існує.

53. Вказати основну властивість частки:

а) для довільних цілого невід'ємного числа а і натурального числа в, якщо їх частка існує, то вона єдина;

б) частка двох цілих невід'ємних чисел завжди існує;

в) якщо частка двох цілих невід'ємних чисел а і в існує, то а ≥ в;

г) при умові існування відповідних часток, частка не зміниться, якщо ділене і дільник поділити або помножити на одне й теж саме число.

54. Вказати правильне твердження.

а) $\forall\ a, в, c \in N_0 : (a \cdot в) : c = (a : c) \cdot (в : c);$

б) $\forall\ a, в, c \in N_0 : a : в : c = a \cdot (в : c);$

в) $\forall\ a, в, c \in N_0 : a\ c : в\ c = a : в;$

г) $\forall\ a, в, c \in N_0 : a : (в \cdot c) = (a : в) \cdot c.$

55. Вказати кінцівку правила ділення суми на число.

При умові існування відповідних часток має місце рівність:

а) (а + в) : с = а : с + в : с; *в) а : (в·+ с)= а : в + а : с;*

б) (а – в) : с = (а : с) – в; *г) (а – в) : с = а : с – в :с.*

56. Вказати кінцівку правила ділення різниці на число.

При умові існування відповідних часток має місце рівність:

а) (а + в) : с = а : с + в : с; *в) а : (в·+ с)= а : в + а : с;*

б) (а – в) : с = (а : с) – в; *г) (а – в) : с = а : с – в :с.*

57. Первісними (неозначуваними) поняттями аксіоматичної теорії цілих невід'ємних чисел є:

а) ,,множина цілих невід'ємних чисел", ,,площина", ,,пряма";

б) ,,натуральне число", ,,один", ,,безпосередньо йде за";

в) ,,множина", ,,число", ,,пряма";

г) ,,ціле невід'ємне число", ,,нуль", ,,безпосередньо йде за".

58. Вказати неправильне твердження:

а) для кожного цілого невід'ємного числа існує одне і тільки одне ціле невід'ємне число, що безпосередньо йде за ним;

б) нуль є найменшим цілим невід'ємним числом, яке не йде безпосередньо за жодним цілим невід'ємним числом;

в) кожне ціле невід'ємне число іде за одним і тільки одним цілим невід'ємним числом;

г) кожне ціле невід'ємне число безпосередньо іде не більш як за одним цілим невід'ємним числом.

59. Правильні твердження у п. 58 відносяться до:

а) до аксіом Пеано;

б) до кількісної теорії побудови множини цілих невід'ємних чисел;

в) до принципу математичної індукції;

г). до властивостей множини натуральних чисел.

60. Вказати набір аксіом додавання:

а) $\forall\ a, в, c \in N_0 : a = в \rightarrow a + c = в + c;\ \forall\ a \in N_0 : a + 1 = a;$

б) $\forall\ a \in N_0 : a + 0 = a;\ \forall\ a, в \in N_0 : a + в' = (a + в)'.$

в) $\forall\ a, в \in N_0 : a + в = в + a;\ \forall\ a \in N_0 : a + 1 = a';$

г) $\forall\ a, в, c \in N_0 : (a + в) + c = a + (в + c);\ \forall\ a \in N_0 : a + 0 = a;$

61. Яка послідовність рівностей є властивостями операції додавання цілих невід'ємних чисел в аксіоматичній теорії побудови множини цілих невід'ємних чисел:

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$*:*
$a + 0 = 0 + a = a;$
$a + 1 = 1 + a = a';$
$(a + в) + c = a + (в + c);$
$a + в = в + a;$
$a = в \rightarrow a + c = в + c.$

б) $\forall\ a, в, c \in N_0$*:*
$a + 1 = 1 + a = a';$
$a + 0 = 0 + a = a;$
$(a + в) + c = a + (в + c);$
$a + в = в + a;$
$a = в \rightarrow a + c = в + c.$

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$*:*
$a + в = в + a;$
$(a + в) + c = a + (в + c);$
$a + 0 = 0 + a = a;$
$a + 1 = 1 + a = a';$
$a = в \rightarrow a + c = в + c.$

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$*:*
$a + 0 = 0 + a = a;$
$a + 1 = 1 + a = a';$
$a + в = в + a;$
$(a + в) + c = a + (в + c);$
$a = в \rightarrow a + c = в + c.$

62. Вказати аксіоми множення:

а) $\forall\ a \in N_0 : 1 \cdot a = a;\ \forall\ a, в, c \in N_0 : (a \cdot в) \cdot c = c \cdot (в \cdot c);$
б) $\forall\ a \in N_0 : a \cdot 0 = 0;\ \forall\ a, в \in N_0 : a \cdot в' = ав + a;$
в) $\forall\ a \in N_0 : a \cdot 1 = a;\ \forall\ a, в \in N_0 : a \cdot в = в \cdot a;$
г) $\forall\ a \in N_0 : a \cdot 0 = 0;\ \forall\ a, в \in N_0 : a \cdot в' = ав \cdot a.$

63. Яка послідовність рівностей є властивостями операції множення цілих невід'ємних чисел в аксіоматичній теорії побудови множини цілих невід'ємних чисел:

а) $\forall\ a, в, c \in N_0$:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
$a \cdot в = в \cdot a;$
$(ав) \cdot c = a(в \cdot c);$
$(a + в) \cdot c = ac + вс;$
$a = в \to ac = вс.$

б) $\forall\ a, в, c \in N_0$:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
$(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c);$
$ав = вс;$
$(a + в) \cdot c = ac + вс;$
$a = в \to ac = вс.$

в) $\forall\ a, в, c \in N_0$:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$
$(a + в) \cdot c = ac + вс;$
$(ав) \cdot c = a \cdot (вс);$
$ав = ва;$
$a = в \to ac = вс.$

г) $\forall\ a, в, c \in N_0$:
$1 \cdot a = a \cdot 1 = 0;$
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$
$(a + в) \cdot c = ac + вс;$
$(ав) \cdot c = a(в \cdot c);$
$ав = ва;$
$a = в \to ac = вс.$

64. (Аксіоматична теорія). Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $в$ число a називається меншим числа $в$, якщо:

а) існує власна підмножина A_1 *множини* A, *така що* $A_1 \sim B$, *де* $a = |A|$ *і* $в = |B|$;
б) існує ціле невід'ємне число x, *таке що* $a = в + x$;
в) існує власна підмножина B_1 *множини* B, *така що* $A \sim B_1$, *де* $a = |A|$ *і* $в = |B|$;.
г) існує ціле невід'ємне число x, *таке що* $a + x = в$.

65. (Кількісна теорія). Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $в$ число a називається меншим числа $в$, якщо:

а) існує власна підмножина A_1 *множини* A, *така що* $A_1 \sim B$, *де* $a = |A|$ *і* $в = |B|$;
б) існує ціле невід'ємне число x, *таке що* $a = в + x$;

в) існує власна підмножина B_1 множини B, така що $A \sim B_1$, де $a = |A|$ і $в = |B|$;.
г) існує ціле невід'ємне число x, таке що $a + x = в$.

66. Вказати неправильне твердження:
а) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a < в) \wedge (c < d) \to ac = вd$;
б) $\forall\ a, в, c, d \in N : (a < в) \wedge (c < d) \to ac < вd$;
в) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a = в) \wedge (c = d) \to a + c = в + d$;
г) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a = в) \wedge (c = d) \to ac = вd$.

67. Вказати неправильне твердження:
а) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : a = в \wedge (c < d) \to a + c < в + d$;
б) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a < в) \wedge (c < d) \to a + c < в + d$;
в) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a = в) \wedge (c < d) \to ac < вd$;
г) $\forall\ a, в, c, d \in N_0 : (a = в) \wedge (c < d) \to ac = вd$.

68. Строго лінійно впорядкована множина називається дискретною, якщо:
а) між будь-якими двома елементами множини існує третій елемент;
б) існують елементи, що мають сусідні елементи;
в) для кожного її елемента існує сусідній елемент;
г) між двома елементами множини, немає третього елемента.

69. Елемент *в* деякої множини *M* називають сусіднім елементом *a*, якщо:
а) множина M дискретна;
б) множина M неперервна;
в) між ними немає третього елемента;
г) між ними існують ще інші елементи.

70. Вказати принцип найменшого числа:
а) у будь-якій множині існує найменше число;
б) у кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел існує найменше число;
в) нуль є найменшим цілим невід'ємним числом;
г) у множині натуральних чисел немає найбільшого числа.

71. Вказати принцип найбільшого числа:

а) у будь-якій множині існує число, яке більше даного;
б) у кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел, які не перевищують заданого числа, існує найбільше число;
в) у множині цілих невід'ємних чисел не існує найбільшого числа;
г) у множині цілих невід'ємних чисел існує найбільше число.

72. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $в \neq 0$, поділити a на $в$ з остачею означає:
а) знайти пару цілих невід'ємних чисел q і r, таких що $a = в \cdot q + r$, де $r < в$;
б) знайти пару цілих невід'ємних чисел q і r, таких що $q = r \cdot в + a$;
в) знайти пару чисел q і r, таких що $a = в \cdot q + r$, де $r < в$;
г)знайти пару натуральних чисел q і r, що $a = в \cdot q + r$, де $r < в$.

73. Для натуральних чисел a і $в$, якщо їх частка $a : в$ існує, то:
а) $a \geq в$; *б) $a \leq в$;* *в) $a < в$;* *г) $a > в$.*

74. Якщо при діленні a на $в$ з остачею $a = в \cdot q + r$, де $r < в$, то:
а) a – дільник, $в$ – ділене, q – неповна частка, r – остача;
б) a – ділене, $в$ – дільник, q – неповна частка, r – остача;
в) a – частка, $в$ – дільник, q – ділене, r – частка;
г) a – ділене, $в$ – неповна частка, q – дільник, r – остача.

75. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $в \neq 0$ їх частка існує тоді і тільки тоді, коли при діленні a на $в$ з остачею:
а) остача дорівнює 0; *в) $a > в$;*
б) неповна частка рівна 0; *г) $a \geq в$.*

76. Вказати правильну кінцівку принципу математичної індукції.

Якщо предикат $P(n)$, визначений на множині цілих невід'ємних чисел такий що:
а) $(M \subset N_0 : (0 \in M) \wedge (\exists\, a \in N_0 : a \in M \to a' \in M))$ то $M = N_0$;

б) висловлення (P(1) істине і $\forall k \in N_0 : P(k) \to P(k + 1)$ *то* $(\forall n \in N_0 : P(n))$

в) висловлення (P(0) істине і $\forall k \in N_0 : P(k) \to P(k + 1)$ *то* $(\forall n \in N_0 : P(n))$;

г) $(M \subset N_0 : (0 \in M) \wedge (\forall a \in N_0 : a \in M \to a' \in M))$ *то* $M = N_0$.

77. Вказати схему доведення правильності твердження для будь–яких цілих невід'ємних чисел методом математичної індукції:

а) 1. перевіряємо правильність твердження при n = 1;

2. припускаємо, що твердження правильне при деякому цілому невід'ємному числі k;

3. доводимо, що твердження правильне при k + 1;

4. робимо висновок.

б) 1. перевіряємо правильність твердження при n = 0;

2. доводимо, що твердження правильне при деякому числі k;

3. припускаємо, що твердження правильне при k + 1;

4. робимо висновок.

в) 1. припускаємо що твердження правильне при n = 0;

2. перевіряємо, чи твердження правильне при n = k;

3. доводимо, що твердження правильне при n = k + 1;

4. робимо висновок.

г) 1. перевіряємо правильність твердження при n = 0;

2. припускаємо, що твердження правильне при деякому цілому невід'ємному числі k;

3. доводимо, що твердження правильне при k + 1;

4. робимо висновок.

78. Натуральним рядом чисел називається:

а) множина натуральних чисел, впорядкована відношенням ,,менше'';

б) множина натуральних чисел, що знаходяться між числами а і в;

в) ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

г) множина чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

79. Відрізком натурального ряду чисел називається:

а) множина натуральних чисел, які більші за деяке число а;

б) множина натуральних чисел, які не перевищують заданого натурального числа n;

в) множина натуральних чисел x, таких що $a < x < в$, де a і $в \in N$;

г) множина натуральних чисел x, таких, що $a \le x \le в$.

80. Відрізок натурального ряду чисел від 1 до *n* записується:

а) $\overline{1;n}$; б) $x < n$; в) $1; n$; г) N_n.

81. Вказати кінцівку, щоб утворене твердження було істинним: “Відрізок натурального ряду чисел є. . .”

а) неперервною множиною; в) скінченною множиною;

б) щільною множиною; г) нескінченною множиною.

82. Вказати правильне твердження:

а) кожна скінченна непорожня множина рівнопотужна єдиному відрізку натурального ряду;

б) кожний відрізок натурального ряду рівнопотужний будь-якій скінченій множині;

в) кожна скінченна непорожня множина рівнопотужна будь-якому відрізку натурального ряду;

г) кожна скінченна множина нерівнопотужна деякому відрізку натурального ряду.

83. Нумерацією елементів множини *A* називається:

а) встановлення взаємно однозначної відповідності між множиною цілих невід’ємних чисел і елементами скінченної непорожньої множини A;

б) відношення між елементами множини A і множини натуральних чисел;

в) встановлення взаємно однозначної відповідності між числами відрізка натурального ряду і елементами скінченної непорожньої множини A;

г) відображення елементів множини A у множину натуральних чисел.

84. Множина називається скінченною, якщо вона:

а) нерівнопотужна деякій своїй власній підмножині;

б) нерівнопотужна жодній своїй власній підмножині;

в) має власну підмножину, яка рівнопотужна їй;

г) нерівнопотужна жодній своїй підмножині.

85. Множина називається скінченною, якщо вона:

а) має підмножину, яка рівнопотужна їй;

б) рівнопотужна будь-якій своїй підмножині;

в) порожня або рівнопотужна деякому відрізку натурального ряду;

г) рівнопотужна натуральному ряду.

86. Вказати правильне твердження:

а) кожна скінченна непорожня множина рівнопотужна будь-якому відрізку натурального ряду;

б) жодний відрізок натурального ряду нерівнопотужний ніякій своїй власній підмножині;

в) будь-який відрізок натурального ряду рівнопотужний своїй власній підмножині;

г) існує відрізок натурального ряду, який має власну підмножину рівнопотужну цьому відрізку.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ V
(Системи числення і подільність)

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1. Десяткова система числення та виконання арифметичних операцій у ній

І. Теоретичні питання

1. Системи числення, вимоги до систем числення. Види систем числення.
2. Позиційні і непозиційні системи числення.
3. Запис натурального числа у десятковій системі числення. Теорема про десятковий запис натурального числа у десятковій системі числення.
4. Читання натурального числа у десятковій системі числення.
5. Теореми, що лежать в основі порівняння чисел, записаних у десятковій системі числення.
6. Алгоритми додавання і віднімання у десятковій системі числення.
7. Алгоритми множення і ділення.

ІІ. Практичні завдання

1. № 94[8, с.137]. Замініть наступні суми коротким записом числа:

а) $2 \cdot 10 + 7$;

б) $6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1$;

в) $9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$;

г) $3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7$;

д) $8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 6$;

е) $1 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2$.

2. № 95[8, с.137]. Запишіть число, в якому:

а) x десятків і одна одиниця;

б) 3 десятки та x одиниць;

в) m десятків і t одиниць.

3. № 96[8, с.137]. Скільки у числі 132 620:
   а) одиниць;
   б) одиниць тисяч;
   в) десятків;
   г) десятків тисяч;
   д) сотень;
   е) сотень тисяч?
4. № 97[8, с.137]. Скільки цифр в записі числа: а) 245; б) 0; в) 1 000 000; г) 343 537? Скільки серед них різних цифр?
5. № 98[8, с.137]. Цифра десятків у записі даного двоцифрового числа втричі більша цифри одиниць. Якщо ці цифри переставити, то вийде число, менше за дане на 36. Знайдіть дане число.
6. № 99[8, с.137]. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 16. Якщо від цього числа відняти число, записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку, то вийде – 18. Знайдіть це число.
7. № 101[8, с.137]. Учні початкових класів виконують завдання: „Поясни, як виконано додавання трьохцифрових чисел: 246 + 123 = (200 + 40 + 6) + (100 + 20 + 3) = (200 + 100) + (40 + 20) + (6 + 3) = 360 + 60 + 9 = 369”. Поясніть розв’язання даного прикладу, використовуючи “мову” учнів. Поясніть зміст цього завдання, опираючись на поняття десяткової системи числення і закони додавання натуральних чисел.
8. № 102[8, с.137]. Виконайте дії, використовуючи асоціативний закон додавання:
   а) (7 357 + 2 848) + 5 152;
   б) 18 356 + (1 644 + 2 135).
9. № 103 [8, с.137]. Вирахуйте раціональним способом значення кожного із нижче наведених виразів і поясніть, які закони додавання були при цьому використані:
   а) 386 + 287 + 213 + 564;
   б) 3 057 + 1 561 + 1 513 + 829 + 2 564.
10. № 104 [8, с.137]. Розв’язання нижче наведеної задачі запишіть у вигляді числового виразу, а потім знайдіть його значення:

У місті три бібліотеки. В одній із них 24 650 книг, в другій – на 8 060 більше, ніж в першій, а в третій на 1 700 книг більше, ніж у другій. Скільки книг в трьох бібліотеках?

11. № 106 [8, с.138].. Учні початкових класів виконують завдання: „Поясни, як виконано віднімання двоцифрового числа: 64 – 23 = (60 + 4) – (20 + 3) = (60 – 20) + (4 – 3) = 40 + 1 = 41”. Обґрунтуйте зміст цього завдання, використовуючи поняття десяткової системи числення.
12. № 108 [8, с.138].. Учні початкових класів виконують завдання: „Поясни, спосіб множення: 426 · 3 = (400 + 20 + 6) · 3 = 400 · 3 + 20 · 3 + 6 · 3 = 1200 + 60 + 18 = 1278”. Обґрунтуйте зміст цього завдання, використовуючи поняття десяткової системи числення та закони дій над числами.
13. № 110 [8, с.138]. Вирахуйте раціональним способом значення виразу і поясніть, які закони множення були при цьому використані:

    а) 46 · 1001; б) 999 · 32; в) 4 · 16 · 19 · 25.
14. № 112 [8, с.138]. Обґрунтуйте спосіб обчислення

    а)13 · 64 = 26 · 32 = 52 · 16 = 104 · 8 = 208 · 4 = 416 · 2 = 832 · 1 = 832;

    б)24 · 17= 24 · 16 + 24 = 48 · 8 + 24 = 96 · 4 + 24 = 192 · 2 + 24 = 384 · 1 + 24 = 384 + 24 = 408.
15. № 113 [8, с.138].. Використовуючи спосіб множення, що описаний у попередній вправі, знайдіть значення добутку:

    а) 23 · 16; б) 451 · 8; в) 91 · 12.
16. № 136[8, с.142]. Скільки цифр необхідно для запису чисел:

    а) у десятковій системі числення;

    б) у двійковій системі числення;

    в) у вісімковій системі числення;

    г) у системі числення з основою *p*.

III. Завдання для самостійного опрацювання

1. Теоретичне завдання. Запис чисел в різних системах числення.
2. Практичні завдання.

1. № 105[8, с.137]. Встановіть, які теоретичні положення використовуються при відніманні багатоцифрових чисел: $482 – 257 = (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2) – (2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7) = (4 \cdot 10^2 – 2 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10 – 5\ 10) + (2 – 7) = (4 – 2) \cdot 10^2 + (7 + 1) \cdot 10 – 5 \cdot 10 + (2 – 7) = 2 \cdot 10^2 + (7 \cdot 10 – 5 \cdot 10) + 1 \cdot 10 + (2 – 7) = 2 \cdot 10^2 + (7 – 5) \cdot 10 + (12 – 7) = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5 = 225.$

2. № 107[8, с.139]. Обґрунтуйте спосіб множення трицифрового числа на одноцифрове:
$637 \cdot 4 = (6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7) \cdot 4 = (6 \cdot 10^2) \cdot 4 + (3 \cdot 10) \cdot 4 + 7 \cdot 4 = (6 \cdot 4) \cdot 10^2 + (3 \cdot 4) \cdot 10 + 7 \cdot 4 = 24 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 28 =$

$(2 \cdot 10 + 4) \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 8) = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 8 = 2 \cdot 10^3 + (4 + 1) \cdot 10^2 + (2 + 2) \cdot 10 + 8 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 = 2548$

3. № 151 [8, с.142]. Розв’яжіть нижченаведені задачі, використовуючи запис числа в десятковій системі числення:

а) Двоцифрове число закінчується цифрою 3. Якщо суму його цифр помножити на 4, то вийде число, записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку. Знайдіть двоцифрове число.

б) У двоцифровому числі десятків у три рази більше, ніж одиниць. Якщо між цифрами цього числа вставити цифру 0, то число збільшиться на 540. Знайдіть двоцифрове число.

в) У трицифровому числі десятків на один більше, ніж одиниць і сотень на одну більше, ніж десятків. Якщо до цього числа додати число, записане тими ж цифрами, але у зворотному прядку, то вийде 444. Знайдіть це число.

д) Різниця між найбільшим трицифровим числом і задуманим у 2 рази більша різниці між задуманим числом і найбільшим двоцифровим числом. Знайти задумане число.

Тема 2. Недесяткові позиційні системи числення. Додавання і віднімання чисел у них

І. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

ІІ. Теоретичні питання

1. Запис натурального числа в недесятковій позиційній системі числення.
2. Теорема про існування запису будь-якого натурального числа в недесятковій позиційній системі числення.
3. Алгоритм порівняння чисел на основі їх запису.
4. Алгоритми додавання і віднімання.
5. Алгоритм переходу від десяткової системи числення до іншої позиційної системи числення і навпаки.

ІІІ. Практичні завдання

1. Записати число 379 в системі чисел з основою $q = 6$; 759 – з основою $q = 2$; 256642 – з основою 5; 7; 11.
2. Записати числа 511403_7 і 30213_4 в десятковій системі числення.
3. Обчислити суму:
   а) $434213_5 + 2343_5$; в)$10011_2 + 111001_2 + 1111_2$.
   б) $3758_9 + 276_9$;
4. Знайти різницю (з перевіркою):
   а) $343001_6 - 24213_6$; б)$134602_8 - 26415_8$.
5. Обчислити:
   $4413_{(6)} - 3234_{(6)} + 40432_{(6)}$.

6. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами:

а) $x + 431_5 = 3314_5$; б) $x - 142_7 = 5631_7$.

IV. Завдання для самостійної роботи

1. Теоретичні питання. Множення і ділення натуральних чисел у недесятковій позиційній системі числення. Перехід від запису натурального числа в одній позиційній системі числення до іншої позиційної системи числення.
2. Практичні завдання.

№1. Обчислити:

а) $745_8 + 427_8 + 653_8 + 1175_8$;

б) $2020021_3 + 10210212_3 + 10221_3 - 1212002_3$.

Тема 3. Множення і ділення у недесятковій позиційній системі числення. Перехід від запису числа в одній позиційній системі числення до запису в іншій

I. Контроль та корекція виконання практичних завдань, що виносилися на самостійне опрацювання

II. Теоретичні питання

1. Алгоритм множення в недесятковій системі числення. Таблиця множення.
2. Алгоритм ділення в недесятковій системі числення.
3. Алгоритм переходу від запису числа в одній недесятковій позиційній системі числення до його запису в іншій позиційній системі числення.

III. Задачі для розв'язування

1. Знайти добуток чисел:

а) $2734_8 \odot 653_8$; б) $43413_5 \odot 423_5$.

2. Знайти частку чисел:

а) $2134_5 : 12_5$; б) $1022_3 : 12_3$; в) $731_8 : 13_8$.

3. Перейти від запису числа в одній системі числення до його запису в іншій системі числення і зробити перевірку:

а) $23045 = a_6$; б) $4367_8 = a_7$;
в) $475_9 = a_3$; г) $34 = a_2$.

4. При якому значенні x правильна рівність:
а) $203_x = 53$; б) $401_x = 197$; в) $236_x = 1240_5$?
5. Знайти основу системи числення:
а) $306_x + 124_x = 220$; б) $752_x - 647_x = 67$.
6. Знайти значення виразу:
а) $67_8 \cdot 64_5 - 57_8\ 37_8$; б) $23213_5 : 32_5 - 113_5 \cdot 3_5$;
в) $275_8 \circ 342_5 + 4742_8 - 32012_4$.

IV. Завдання для самостійної роботи
1. Теоретичні питання. Відношення подільності. Ознака подільності Паскаля. Ознака подільності на 2, 3 (9), 4, 5, 11, 25.
2. Практичні завдання.

1. № 39 [4, с.288]. У якій системі числення істинна рівність:
1) $4 = 10_x$; 2) $29 = 104_x$; 3) $12 = 15_x$.
2. № 40 [4, с.288]. Знайти значення x:
1) $306_x + 124_x = 220$; 2) $102_x + 212_x = 34$;
3) $752_x - 647_x = 67$; 4) $626_x : 123_x = 5$.
3. Обчислити: $2445_6 + 8567_9 - 2434_6 \cdot 37_9$.

САМОСТІЙНА РОБОТА

Обчислити значення виразу в позиційній системі числення з основою g, якщо:

1. $3203_4 \cdot 43_5 - 42323_5 + 8105_9$ і $g = 5$;
2. $105454_6 + 22122_3 \cdot 54_6 - 8204_9$ і $g = 6$;
3. $1311200_7 - 41122_5 \cdot 64_7 + 5107_9$ і $g = 7$;
4. $137024_8 + 148854_9 - 11004_6 \cdot 63_8$ і $g = 8$;
5. $3121_4 \cdot 34_5 + 213413_5 - 7360_8$ і $g = 5$;
6. $350012_6 - 17506_8 + 20312_8 \cdot 54_6$ і $g = 6$;

7. $150613_8 + 5403_6 \cdot 64_7 - 546352_7$ і $g = 7$;

8. $288177_9 - 240753_8 + 33021_5 \cdot 73_8$ і $g = 8$;

9. $310341_5 - 21202_3 \cdot 43_5 + 7305_9$ і $g = 5$;

10. $342033_6 + 6504_7 - 12303_5 \cdot 45_6$ і $g = 6$.

Зразок розв'язування: $2314_5 \cdot 37_8 + 8105_9 - 13762_8$ і $g = 8$. Число 2314_5 запишемо в системі числення з основою g. Перехід від запису числа з меншою основою до його запису з більшою основою зручно зробити способом множення.

2314_8

$\times \underline{5}$

$12 + 3 = 15$

$\times \underline{5}$

$101 + 1 = 102$

$\times \underline{5}$

$512 + 4 = 516_8$

Число 8105_9 запишемо в системі числення з основою 8. Перехід від запису числа з більшою основою до запису його з меншою основою зручно зробити способом ділення.

8105_9	8_9			
$\underline{-8}$	1011	8		
10	$\underline{-8}$	112	8	
$\underline{-8}$	11	$\underline{-8}$	12	8
15	$\underline{-8}$	22	$\underline{-8}$	1
$\underline{-8}$	21	$\underline{-17}$	3	a_4
6	$\underline{-17}$	4	a_3	
a_0	3	a_2		
	a_1			

$8105_9 = 13436_8$

Записуємо вираз, у якому всі числа записані в системі числення з основою $g = 8$

$516_8 \cdot 37_8 + 13436_8 - 13762_8 = 23136_8$

1) 516_8 $\quad$ $\underline{+\ 37_8}$ $\quad$ 4442

2) 24162_8 $\quad$ $\underline{+\ 13436_8}$ $\quad$ 37620_8

3) $_\ 37620_8$ $\quad$ $\underline{13762_8}$ $\quad$ 23136_8

$$\begin{array}{r} {}^{+}\,1752 \\ \hline 24162_8 \end{array}$$

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ПИТАННЯ З КУРСУ *"МАТЕМАТИКА"*
для студентів І курсу стаціонарного відділу
педагогічного факультету

1. Поняття про множину. Елементи множини. Круги Ейлера. Способи задання множин. Приклади скінченних і нескінченних множин. Порожня і одинична множини.
2. Рівність множин. Підмножина множини Відношення включення і перетину множин. Універсальна множина.
3. Числові і точкові множини.
4. Переріз множин. Зображення перерізу двох множин за допомогою кругів Ейлера. Закон операції перерізу множин. Переріз трьох і більше множин.
5. Об'єднання множин. Зображення об'єднання двох множин за допомогою кругів Ейлера. Закони операції об'єднання множин. Об'єднання трьох і більше множин.
6. Різниця двох множин. Операція віднімання множин. Доповнення підмножини до множини. Доповнення множини. Закони операції доповнення.
7. Число елементів у об'єднанні двох і більше скінченних множин.
8. Поняття про розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються. Розбиття множини на класи. Класифікація та її застосування.
9. Розбиття множини на класи за допомогою однієї, двох і трьох властивостей її елементів.
10. Поняття про кортеж та його основні характеристики. Впорядкована пара.
11. Декартів добуток двох і більше множин. Графічне зображення декартового добутку двох числових множин.
12. Дистрибутивні закони, що пов'язують операції перерізу і об'єднання множин.

13. Дистрибутивні закони, які пов'язують операцію декартового множення з операціями перерізу, об'єднання і віднімання множин.
14. Число елементів у декартовому добутку двох і більше скінченних множин.
15. Відношення між елементами двох множин та його основні характеристики. Операції над відношеннями між елементами двох множин. Обернене та протилежне відношення.
16. Граф відношення. Точковий графік відношення між елементами двох числових множин. Способи задання відношень.
17. Відношення на множині та їх основні властивості. Особливості графа відношення на множенні.
18. Відношення еквівалентності та його зв'язок із розбиттям множин на класи.
19. Відношення порядку та його види.
20. Функціональне відношення та його основні характеристики. Способи задания функцій.
21. Відображення множин. Види відображень. Рівнопотужні множини. Потужність множини.
22. Алгебраїчні операції. Комутативний та асоціативний закони операцій. Дистрибутивні закони, які пов'язують дві операції.
23. Комбінаторні задачі. Правила суми і добутку. Число всіх підмножин скінченої множини.
24. Поняття про алгоритм. Основні властивості алгоритмів. Приклади алгоритмів, які використовуються в початковій школі.
25. Поняття. Зміст і обсяг поняття. Відношення між поняттями.
26. Означення понять. Способи означення понять. Означуванні і неозначуванні поняття.
27. Поняття про твердження. Математичні твердження.
28. Означення понять та вимоги до них. Помилки в

означеннях понять. Контр приклад.

29. Висловлення і його логічне значення. Логічні сталі: пропозиційні зв'язки і квантори. Прості і складені висловлення. Операції логіки висловлень. Пропозиційні змінні.
30. Заперечення висловлення. Закон подвійного заперечення. Закон де Моргана.
31. Кон'юнкція двох висловлень. Властивості операції кон'юнкції висловлень. Кон'юнкція трьох і більше висловлень.
32. Диз'юнкція висловлень. Властивості операції диз'юнкції висловлень. Диз'юнкція трьох і більше висловлень.
33. Дистрибутивні закони, що пов'язують диз'юнкцію і кон'юнкцію висловлень.
34. Імплікація двох висловлень. Види імплікацій, які пов'язані з даною. Властивості операції імплікації висловлень.
35. Еквіваленція висловлень. Властивості операції еквіваленції висловлень.
36. Формула логіки висловлень. Таблиця істинності формули логіки висловлень.
37. Відношення логічного слідування і рівносильності на множині висловлень.
38. Поняття про змінну в математиці. Предикат. Види предикатів. Області визначення, істинності і хибності предиката. Рівносильні предикати.
39. Тотожно істинні і тотожно хибні предикати.
40. Заперечення предиката. Область істинності заперечення предиката.
41. Кон'юнкція предикатів. Область істинності кон'юнкції предикатів.
42. Диз'юнкція предикатів. Область істинності диз'юнкції предикатів.
43. Імплікація предикатів. Область істинності імплікації предикатів.

44.Еквіваленція предикатів. Область істинності еквіваленції предикатів.
45.Операції навішування кванторів на предикати. Правила побудови висловлень, що містять заперечення над кванторами.
46.Відношення логічного слідування і рівносильності на множині предикатів. Необхідні і достатні умови.
47.Теореми, їх будова і види. Твердження, які пов'язані з даною теоремою.
48.Поняття про доведення теореми. Способи доведення теорем.
49.Правильні і неправильні міркування. Правила виведення. Перевірка правильності міркувань за допомогою наведення контрприкладів і кругів Ейлера.
50.Скінченні множини і їх властивості.
51.Різні підходи до побудови множини цілих невід'ємних чисел. Поняття про аксіоматичний метод побудови теорії.
52.Натуральне число як, спільна властивість класу скінченних не порожніх рівнопотужних множин. Поняття про нуль. Множина цілих невід'ємних чисел. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел.
53.Відношення порядку на множині цілих невід'ємних чисел. Упорядкованість множини цілих невід'ємних чисел.
54.Сума цілих невід'ємних чисел, її існування і єдиність. Операція додавання цілих невід'ємних чисел і її властивості.
55.Різниця цілих невід'ємних чисел, її існування і єдиність. Операція віднімання цілих невід'ємних чисел. Зв'язок віднімання з додаванням. Додавання і віднімання у початковому курсі математики.
56.Теоретико-множинний зміст правил віднімання числа від суми і суми від числа.

57. Добуток цілих невід'ємних чисел, як потужність декартового добутку скінченних множин. Існування і єдиність добутку. Операція множення цілих невід'ємних чисел, її властивості.
58. Добуток цілих невід'ємних чисел як сума рівних між собою доданків. Існування і єдиність добутку. Множення у початковому курсі математики.
59. Частка від ділення цілого невід'ємного числа на натуральне (кількісна теорія). Існування і єдиність частки. Операція ділення. Зв'язок ділення з множенням. Ділення в початковому курсі математики.
60. Теоретико-множинний зміст правил ділення суми і добутку на число.
61. Аксіоми Пеано. Аксіоматичне означення цілого невід'ємного числа, додавання і множення цілих невід'ємних чисел. Таблиці додавання і множення. Закони додавання і множення.
62. Операції віднімання і ділення цілих невід'ємних чисел. Неможливість ділення на нуль.
63. Операція ділення цілого невід'ємного числа на натуральне з остачею. Теорема про існування і єдиність частки й остачі.
64. Метод математичної індукції.
65. Властивості множини цілих невід'ємних чисел.
66. Відрізок натурального ряду чисел, лічба елементів скінченої множини. Порядкові і кількісні натуральні числа.
67. Операції над відрізками та їх основні властивості.
68. Натуральне число як міра відрізка. Арифметичні операції і їх властивості над числами, що розглядаються як міри відрізків.

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ТЕРМІНИ.

Аксіома – твердження, яке приймається в межах даної теорії істинним без доведення.

Визначаюче поняття – поняття, через яке дається означення означуваному поняттю.

Висловлення – твердження, про яке можна сказати, що воно тільки або істинне, або хибне.

Віднімання цілих невід'ємних чисел – операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$.

Відношення між елементами множин A і B – довільна підмножина декартового добутку множин A і B. При цьому множина A називається *областю* (*множиною*) *відправлення відношення*, множина B – *областю* (*множиною*) *прибуття відношення*.

Відношеннями природного порядку на множині цілих невід'ємних чисел – відношення «<», «>», «≤» і «≥».

Відображення множини A у множину B – відношення між елементами множин A і B, при якому кожному елементу множини A ставиться у відповідність тільки один елемент із множини B.

Відрізок – множина точок прямої, що лежать між двома її різними точками, які називаються кінцями відрізка,

Власна підмножина – підмножина, яка не є порожньою і не збігається з даною множиною.

Внутрішні точки відрізка – всі точки відрізка, крім його кінців.

Всюди визначене відношення – відношення в якого область визначення збігається з областю відправлення.

Геометрична фігура або просто *фігура* – довільна непорожня точкова множина.

Граф – множина точок і відрізків, які попарно з'єднують деякі з цих точок. Точки називаються *вершинами графа*, а відрізки – його *ребрами*.

Графік відношення – множина впорядкованих пар, що складають відношення.

Декартів добуток множин X і Y – множина всіх упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині X, а друга – Y, позначається $X \times Y$.

Диз'юнкція (від лат. *disjungo* – роз'єдную, розрізняємо) висловлень – висловлення, яке набуває логічного значення "хиба" тоді і тільки тоді, коли всі висловлення мають логічне значення "хиба". Позначається $p \vee q$ і читається: « p або q».

Дискретна множина – строго лінійно впорядкована множина така що, для кожного її елемента існує сусідній елемент.

Ділене – перший компонент ділення..

Ділення цілих невід'ємних чисел – операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b, де $b \neq 0$, ставиться у відповідність їх частка $a : b$.

Дільник – другий компонент ділення.

Добуток – результат множення.

Добуток довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a \cdot b$) – потужність декартового добутку множин A і B, потужностями яких є відповідно числа a і b або: число 0, якщо $в = 0$, число а, якщо $в = 1$, сума $в$ доданків, кожний з яких дорівнює числу a, якщо $в > 1$. *Добуток (натур. число як міра відрізка)* двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n \cdot k$) – натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де n є мірою цього ж самого відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε при одиничному відрізку ε_1.

Добуток довільних цілих невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (позначається $a_1 a_2 \ldots a_n$ або $\prod_{i=1}^{n} a_i$) – потужність декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, потужностями яких є відповідно числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Довжина кортежу – кількість компонент у кортежі

Додавання цілих невід'ємних чисел – операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел *a* і *b* ставиться у відповідність їх сума *a* + *b*.

Доданки – компоненти додавання.

Еквіваленція (від лат *aequivalens* – рівноцінний) довільних двох висловлень – висловлення, яке набуває логічного значення «істина» тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення набувають однакових логічних значень. Позначається p ↔ q і читається: «p тоді і тільки тоді, коли q».

Елементи множини – об'єкти, що складають множину.

Зміст поняття – сукупність істотних ознак, які мають всі об'єкти, що належать обсягу цього поняття.

Імплікація (від лат. *implico* – тісно зв'язую) довільних висловлень *p* і *q* – висловлення, яке набуває логічного значення " хиба" тоді і тільки тоді, коли *p* має логічне значення "істина", а *q* – "хиба". Позначається p→ q і читається: «якщо p, то q».

Комбінаторні задачі – задачі про обчислення числа можливих підмножин або кортежів, які складаються з елементів деякої скінченної множини або множин, у відповідності із заданими умовами.

Компоненти кортежу – об'єкти, з яких складається кортеж .

Кон'юнкція (від лат. *conjunctio* – зв'язок, об'єднання) висловлень – висловлення, яке набуває логічного значення "істина" тоді і тільки тоді, коли кожне висловлення має логічне значення "істина". Позначається p ∧ q, читається: «p і q».

Кортеж – скінченна сукупність деяких об'єктів, які розміщені в цілком визначеному порядку, причому об'єкти в кортежі можуть повторюватися.

Круги Ейлера – зображення обсягів понять плоскими геометричними .□□□фігурами, зокрема кругами

Множення цілих невід'ємних чисел – операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a \cdot b$.

Множина – сукупність певних об'єктів, об'єднаних за деякою ознакою чи правилом.

Множина натуральних чисел – сукупність всіх натуральних чисел.

Множина цілих невід'ємних чисел – множина, яка є результатом приєднання числа нуль до множини натуральних чисел.

Множники – компоненти множення.

Натуральне число – клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Не порівнювані поняття – поняття, які не мають спільних ознак.

Нерівності однакового смислу – нерівності $a < b$, $c < d$ ($a > b$ і $c > d$).

Нерівності протилежного смислу – нерівності $a < b$, $c > d$ ($a > b$ і $c < d$)

Нескінченна множина – множина, а) елементи якої не можна перелічити; б) яка має власну підмножину рівно потужну їй.

Несумісними поняття – поняття, обсяги яких не мають спільних об'єктів.

Об'єднання множин – множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать принаймні одній з даних множин.

Область визначення відношення – множина всіх перших компонент графіка відношення, позначається $D(\rho)$.

Область значення відношення – множина всіх других компонент графіка відношення, позначається $E(\rho)$.

Обсяг поняття – сукупність тих об'єктів, які охоплюються цим поняттям.

Ознака - думка про властивість об'єктів.

Ознака істотна – ознака, без якої об'єкт існувати не може.

Ознака неістотна – ознака, яку може мати даний об'єкт, а може і не мати. Істотність ознаки об'єкта залежить від потреб практики людини.

Означуване поняття – поняття, якому дається означення

Операція віднімання множин, або *віднімання множин* – правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх різниця $X \setminus Y$,

Операція декартового множення – правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх декартів добуток $X \times Y$.

Операція доповнення множини - X – правило, за яким кожній підмножині X універсальної множини U ставиться у відповідність її доповнення $\overline{X}$.

Операція об'єднання множин – правило, за яким довільним двом множинам X і Y ставиться у відповідність їх об'єднання $X \cup Y$.

Операція перерізу множин – правило, за яким двом довільним множинам X і Y ставиться у відповідність їх переріз $X \cap Y$.

Орієнтований граф – граф, на ребрах якого вказано напрями.

n–арна (*n–місна*) *операція* – правило, за яким n об'єктам, взятим у певному порядку, ставиться у відповідність не більше як один об'єкт, що називається *результатом операції*.

Переріз множин – множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать кожній з даних множин .

Підмножина множини A – множина, кожний елемент якої є елементом множини A.

Плоска фігура – фігура, всі точки якої належать одній площині.

Повний образ будь-якого елемента $\boldsymbol{x}$ *з області відправлення X* відношення ρ – множина елементів області прибуття Y відношення, з якими він перебуває у заданому відношенні. Кожний елемент $\rho(x)$ з множини Y називається *образом елемента x*.

Повний прообраз будь-якого елемента $\boldsymbol{y}$ *з області*

прибуття відношення ρ – множина елементів області відправлення, які перебувають з ним у цьому відношенні.

Поняття – форма мислення, в якій відображаються загальні істотні властивості предметів і явищ об'єктивної дійсності, загальні взаємозв'язки між ними у вигляді цілісної системи істотних ознак.

Порівнювані поняття – поняття, які мають принаймні одну спільну ознаку.

Порожня множина – множина, яка не містить елементів, позначається символом $\varnothing$.

Предикати (*висловлювальні форми*) – твердження, що містять одну або кілька змінних і перетворюються у висловлення при заміні змінних їх значеннями.

Просторова фігура – фігура, у якої не всі точки належать одній площині.

Протилежні поняття – такі два співпідпорядковані поняття у яких обсяг їх спільного родового поняття містить принаймні один об'єкт, який не міститься в обсягах кожного з цих понять.

Рівні множини – множини, які складаються з одних і тих же елементів, тобто кожний елемент першої множини є елементом другої множини і кожний елемент другої множини є елементом першої множини.

Рівносильні означення – означення, обсяги понять, які вони визначають, збігаються

Різниця довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) – потужність доповнення підмножини B до множини A, де число a є потужністю множини A, а число b є потужністю множини B, або – ціле невід'ємне число x, сума якого з числом b дорівнює числу a, тобто $x + b = a$ або $(a - b) + b = b + (a - b) = a$. *Різниця (натур. число як міра відрізка)* двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n - k$) – натуральне число, яке є мірою різниці двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне

число n, другий – натуральне число k при одному і тому ж одиничному відрізку.

Різниця множин X і Y – множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи множини X, що не належать множині Y.

Розбиття множини M на підмножини, які попарно не перетинаються – система непорожніх підмножин множини M таких що, кожний елемент множини M належить одній і тільки одній із підмножин системи, при цьому кожна підмножина системи називається *класом розбиття*.

Скінченна множина – множина, а) елементи якої можна перелічити; б) яка не має власної підмножини, рівно потужної їй; в) рівно потужна деякому відрізку натурального ряду.

Спів підпорядковані поняття – два або більше несумісних понять, таких що будь-які два з них несумісні, а всі вони є видами деякого спільного роду.

Сума – результат додавання чисел.

Сума довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a + b$) – потужність об'єднання множин A і B, які не перетинаються і мають своїми потужностями відповідно числа a і b. *Сума (натур. число як міра відрізка)* довільних двох натуральних чисел n і k (позначається $n + k$) – натуральне число, яке є мірою відрізка, що є сумою двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k при одному й тому ж одиничному відрізку.

Сума довільних цілих невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (позначається $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ або $\sum_{i=1}^{n} a_i$) – потужність об'єднання множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які попарно не перетинаються і потужностями яких є відповідно числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Сумісні поняття – поняття, обсяги яких мають спільні об'єкти.

Сюр'єктивне відношення – відношення в якого область

значення збігається з областю прибуття.

Твердження (*судження*) - думка, в якій виділяється певний об'єкт, встановлюються його властивості або зв'язки з іншими об'єктами.

Теорема – твердження, істинність яких доводиться на основі вже відомих істинних тверджень. Іноді замість терміну "теорема" вживаються також терміни "закон", "властивість", "наслідок", "правило" тощо.

Умовивід – форма мислення, в якій з одного або кількох тверджень одержується (говорять також виводиться) нове твердження, яке містить у собі нові знання

Універсальна множина – множина, для якої всі інші множини, які розглядаються у задачі чи теорії, є її підмножинами, її позначають у більшості випадків *U*.

Функція – відношення між елементами множин *A* і *B,* при якому кожному елементу множини *A* ставиться у відповідність не більш як один елемент множини *B*□

Цілі невід'ємні числа – елементи множини цілих невід’ємних чисел

Частка – результат ділення.

Частка довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b (позначається $a:b$ або $\frac{a}{b}$) – ціле невід'ємне число x, добуток якого з числом b дорівнює a.

Частка чисел a і b (позначаються $a:b$ або $\frac{a}{b}$) – потужність кожної із множин розбиття, якщо множину *A, що* має потужністю число *a,* розбити на b рівнопотужних підмножин, які попарно не перетинаються, або число підмножин розбиття, якщо кожна з них має потужність b.

Частка(натур. число як міра відрізка) двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n:k$ або $\frac{n}{k}$) – натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де число n є мірою цього ж відрізка при

одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε_1 при одиничному відрізку ε.

Числова множина – множина, елементами якої є числа.

Числові послідовності – функції, області визначення яких є множина натуральних чисел N (або множина цілих невід'ємних чисел N_0.