Махомета Т.М.

ІСТОРИЧНИЙ ЕКСКУРС РОЗВИТКУ ВЧЕННЯ ПРО ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ

Анотація. Махомета Т.М. Історичний екскурс розвитку вчення про лінії та поверхні. Розглянуто періоди розвитку аналітичної геометрії, в тому числі розвиток вчення про лінії та поверхні. Вказано означення ліній і поверхонь в розумінні видатних математиків минулого і сьогодення та проаналізовано їх означення в різних підручниках і посібниках з аналітичної геометрії.

Зародження основних геометричних понять почалося ще в доісторичний період. Перші реальні передумови виникнення наукових знань із геометрії пов'язані з трудовою діяльністю людини, з необхідністю створення знарядь праці та засобів існування. Матеріальні потреби змушували людей виготовляти знаряддя праці, будувати житло, культові споруди, ліпити глиняний посуд. Виконуючи ці операції тисячі разів, поступово дійшли до одного з перших абстрактного геометричного поняття – прямої лінії. Приблизно таким же чином виникли і інші геометричні поняття: точки, поверхні геометричного тіла, тощо. Саме цей початковий період розвитку геометрії характеризується нагромадженням фактів і встановленням перших найпростіших залежностей між геометричними образами та об’єктами.

Лінія (крива) є одним із найважливіших геометричних об’єктів, однією з основних чистих геометричних форм, що має широке використання в різних галузях математики і її застосуваннях. Формування і кристалізація загального означення лінії тривало більше 2000 років, від означення Евкліда “лінія — це довжина без ширини” до строгого внутрішньо геометричного означення П.С. Урисона “лінія — це зв’язний континуум топологічної розмірності 1” [4]. На сучасному етапі поняття лінії означають через трактування її Декартом, Жорданом, Кантором, Пеаном тощо. Не дивлячись на відносну простоту поняття

лінії на інтуїтивному рівні, його загальне означення вимагає ґрунтовної підготовки з використанням, зокрема, топологічних понять, що важко забезпечити при викладанні традиційних курсів аналітичної геометрії.

Проаналізувавши наукову та навчально-методичну літературу ми з‘ясували, що розглядаючи певні класи ліній в різних розділах геометрії користуються фактично різними її означеннями. Подібна ситуація має місце і з поверхнями.

Прослідкуємо трактування лінії на різних етапах розвитку аналітичної геометрії. Центральне місце серед праць із геометрії періоду її розвитку займають складені близько 300 років до н. е. «Початки» Евкліда [1]. У фундаментальній науковій праці Евкліда «Початки», геометрія викладена в логічній послідовності на основі чітко сформульованих основних положень — аксіом та основних просторових уявлень, таких як точка, пряма лінія, площина, геометричне тіло. Лінію Евклід означає, як довжину, що позбавлена ширини. Межами лінії є точки. В його розумінні пряма лінія – це лінія що містить усі свої точки на одному рівні, жодна проміжна точка якої не відхиляється вгору чи вниз. Крива лінія — це така, що може бути частиною кола. Мішана лінія — це така лінія, що не є прямою й не може бути частиною кола. Поверхня — це те, що має довжину й ширину. Межами поверхні є лінії. Плоска поверхня — це така поверхня, всі лінії якої розташовані на одному рівні [2].

У XVII столітті значним внеском у розвитку геометрії стало відкриття Р. Декартом (1596–1650) і П. Ферма (1601–1665) координатного методу (1637 р.) та створення на його основі нового напрямку в геометрії – аналітичної геометрії [6].

Р. Декарт розглядає лінію як алгебраїчну криву, яка може бути описана рівнянням виду $F(x,y)=0$, степінь многочлена $F(x,y)$ визначає порядок алгебраїчної лінії. Проте таке означення лінії є неповним, оскільки уже навіть у той час були відомі криві, які не можна було описати рівнянням виду $F(x,y)=0$. Прикладом такої кривої може слугувати спіраль Архімеда. Поверхнею, в

розумінні Р. Декарта, називається сукупність точок простору, координати яких у деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ — математичний вираз, що містить змінні x, y та z.

Більш чітке визначення лінії дав у другій половині XIX ст. К. Жордан (1838-922). Лінія – це плоска крива, яка є сукупністю точок площини, координати яких задовольняють параметричним рівняння: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, де φ та ψ є неперервними функціями аргументу t на відрізку $0\le t\le 1$. Якщо різним значенням аргументу t з відрізку $[0,1]$ відповідають різні точки площини, то лінія називається простою або лінією (кривою) без крайніх точок. Коли ж значенням 0 та 1 аргументу t відповідає одна й та сама точка площини – то лінія називається замкненою [4].

У 1890 р. Д. Пеано довів, що жорданове означення лінії може не узгоджуватися зі звичним уявленням про лінію. Зокрема, він показав, що можна так підібрати функції φ та ψ неперервні на відрізку $0\le t\le 1$, що сукупність точок, координати яких задовольняють рівнянням $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, заповнює цілий квадрат. Тобто, яку б точку $A(x,y)$ з цього квадрату ми не взяли, завжди знайдеться таке значення параметру $0\le t\le 1$, яке буде задовольняти рівняння $x=\varphi(t), y=\psi(t)$.

Наприкінці XIX ст. у математику міцно увійшов теоретико-множинний підхід, який розглядає будь-який математичний об’єкт як множину тих чи інших елементів. Не оминув цей підхід і геометрію. Теоретико-множинне означення лінії дав Г. Кантор (1845-1918), де визначив плоску лінію (криву) як будь-яку зв’язну, компактну множину M точок площини, що не містить у собі ніякої внутрішньої точки [5].

На початку XX ст. розпочинається новий етап в розвитку геометрії. П.С. Уринсоном (1898-1924) та К. Менгером було дано найбільш загальне визначення лінії (кривої), яким користуються в сучасній топології і яке придатне для будь-якого простору. Лінія — це зв’язний континуум топологічної

розмірності 1. Континуум, що лежить на площині, є лінією тоді і тільки тоді, коли він не містить внутрішніх точок [4], [3].

В кінці XX на початку XXI століття намітилася тенденція викладання аналітичної геометрії сумісно з алгеброю у вищих навчальних закладах насамперед технічного та економічного напрямку. Свідченням цього є поява підручників «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» виданих різними авторськими колективами.

На сьогоднішній день, при написанні підручників з аналітичної геометрії, автори не дають одного і того ж чіткого означення лінії та поверхні. Підтвердженням цього є порівняльний аналіз здійснений нами підручників та посібників у таблиці 1.

Таблиця 1.

Означення лінії та поверхні в підручниках та посібниках з аналітичної геометрії

№ п/п	Прізвище та ініціали автора, назва підручника	Означення лінії та поверхні
1.	Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Учебник для студентов высших учебных заведений. – [7-е изд] – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 227 с.	Лінія є геометричне місце усіх точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$. Рівнянням поверхні називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома змінними, якому задовольняють координати x, y, z кожної точки, що лежить на цій поверхні, та не задовольняють координати ніякої іншої точки, яка не лежить на ній.
2.	Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. – Учебник для студентов вузов. – [3-е изд.]. – М.: Наука, 1968. – 176 с.	Автор спочатку узагальнює поняття ліні називаючи її кривою, а потім стверджує, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається рівнянням кривої в неявній формі, якщо йому задовольняють координати x та y будь-якої точки цієї кривої а будь яка пар чисел x та y, що задовольняє рівнянню $\varphi(x, y) = 0$, являє собою координати точки кривої. Рівняння $f(x, y, z) = 0$ називається рівнянням поверхні в неявному вигляді, якщо координати кожної точки поверхні задовольняють цьому рівнянню.
3.	Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Учебник для студентов университетов. [4-е изд.]– М.:, Наука, 1988. – 224 с.	Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ називається рівнянням лінії L, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та y будь якої точки, що лежить на лінії L і не задовольняють координати x та y будь якої іншої точки, що не лежить на лінії L.

		Рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ називається рівнянням поверхні S, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x,y,z будь якої точки, що лежить на поверхні S, та не задовольняють координати x,y,z будь-якої іншої точки, що не лежить на площині S.
4.	Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. Підручник для педагогічних інститутів. – Київ, «Радянська школа», 1962. – 364 с.]	Лінією, заданою рівнянням $F(x,y)=0$ відносно певної системи координат у площині, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють задане рівняння. Поверхнею, заданою рівнянням $F(x,y,z)=0$ відносно певної декартової системи координат у просторі, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють дане рівняння.
5	Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Издание 13, стереотипное. Учебник для высших технических учебных заведений. – М.: Наука, 1966. – 272 с	Рівняння між змінними x та y, якому задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії, називається рівнянням даної лінії. Поверхня – геометричне місце точок і дає роз'яснення щодо загального означення рівняння поверхні.
6.	Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для студентов вузов по специальности «прикладная математика» – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 320 с.	Рівняння $F(x,y)=0$ і відповідно $F(x,y,z)=0$ називаються рівняннями лінії L на площині (поверхні π в просторі) в заданій системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати усіх точок лінії L (поверхні π).
7.	Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник для студентов физико-математических специальностей вузов. – М.: Наука, 1979. – 511 с	Визначення лінії на площині та поверхні в тривимірному просторі потрібно визначати як множину розв'язків наступних алгебраїчних рівнянь: $F(x,y)=0$ для ліній, та $F(x,y,z)=0$ для поверхонь.

Література

1. Ball, W.W. Rouse A Short Account of the History of Mathematics, вид. 4th ed. [Reprint. Original publication: London: Macmillan & Co., 1908], 1960. — С. pp. 50–62
2. Евклид. Начала, том 1-Ш. – М-Л.: Гостехиздат. – 1948-1950.
3. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – М., 1968. – 319 с.
4. Математический єнциклопедический словар/ Гл.ред. Ю.В. Прохоров – М.: Сов.энциклопедия , 1988. – 847 с.
5. Пархоменко А.С. Что такое линия. – М., 1954. – 140 с.
6. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1978. – 336 с/