КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

№2 2023

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2023
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора, кандидата наук і PhD за спеціальностями 111, 112, 113, 104, 105 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1188 від 24.09.2020) та за спеціальностями 121, 122, 123, 124 (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1471 від 26.11.2020), та реферується в Реферативному журналі Zentralblatt MATH, JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar, DOAJ, SCOPUS і Науковій періодиці України.

Редакційна колегія:

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, д.ф.-м.н., доц., **заст. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar- Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, д.ф.-м.н., проф.;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;
Мішура Юлія Степанівна, д.ф.-м.н., проф.;
Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:
Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинович, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4 д, 03022 Тел. (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію:КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2

Безкоштовно

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics
No. 2, 2023.

The journal contains results of new research in various fields of mathematics, computer science, mechanics, physics and radiophysics for researchers, academic staff, postgraduates, engineers and students. It is published on the recommendation of the Academic Councils of Faculty of Physics, Faculty of Radiophysics, Electronics and Computer Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics and the Faculty of Computer Science and Cybernetics.

Journal "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics" is included in the List of scientific professional publications of Ukraine, in which the results of the thesises for obtaining the scientific degrees of a doctor and a candidate of sciences (PhD) in specialties 111, 112, 113, 104, 105, 121, 122, 123 and 124 can be published (approved by the orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1188 dated September 24, 2020 and No. 1471 dated November 26, 2020).
Journal is referenced in the abstract journal **Zentralblatt MATH (zbMATH), JournalTOCs, Crossref, ICI World of Journals, Road, Google Scholar, DOAJ, SCOPUS and Scientific periodicals of Ukraine.**

Editorial Board

Moklyachuk Mikhail Pavlovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Editor in Chief;
Rozora Iryna Vasylivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Deputy Editor in Chief;
Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;
Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;
Futorny Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;
Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;
Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;
Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;
Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;
Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;
Pog\'any Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;
Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholm University, Sweden;
Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Trofimchuk Sergey, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;
Akimenko Vitaliy Vladimirovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Igor Alekseevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Anisimov Anatoliy Vasyl'ovych, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Bezuschak Oksana Omelyanivna, Dr., Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Voloshin Aleksey Fedorovich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Garaschenko Fedir Georgievich, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Yezhov Stanislav Nikolaevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zhuk Yaroslav Aleksandrovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Zaslavs'kyj Volodymyr Anatolijovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kurchenko Oleksandr Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Kudin Volodymyr Ivanovich, Dr. Sci., Sr. Sci. Researcher, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Lvov Victor Anatoliyovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;

Makarets' Nikolay Vladimirovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Maiboroda Rostyslav Yevhenovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Mishura Yuliya Stepanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pashko Anatolij Oleksijovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Perestyuk Mykola Oleksijovych, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Petravchuk Anatolij Petrovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Pogorily Serhiy Demyanovych, Dr. Sci., Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Savenkov Serhij Mykolajovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Skrzyevsky Valery Antonovych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine;
Slyvka-Tylyshchak Anna Ivanivna, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine;
Husainov Denys Yah'yevych, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine.

ISSN: 2218-2055 (on-line version)

***ISSN*:** 1812-5409 (printed version)
***DOI**:* https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2

Founders: Taras Shevchenko National University of Kyiv
Foundation year: 1991 (series of bulletins of Kyiv University "Mathematics and Mechanics", "Physics", "Modeling and Optimization of Complex Systems" was reorganized into "Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics").
Certificate of state registration: КВ № 16299-4771 P dated 11.12.2009
Issued: 4 times a year

Mailing Address
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Faculty of Computer Science and Cybernetics,
03022, Ukraine, Kyiv, 4d Academician Glushkov avenue
Phone: (044) 259-01-49
bphm@knu.ua, fm.visnyk@ukr.net

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Зубченко В.П., Мішура Ю.С., Перестюк М.О., Ямненко Р.Є., Яневич Т.О. Михайло Павлович Моклячук – до 75-річчя від дня народження 13

Безущак О.О., Автоморфізми груп Маккі 16

Голомозий В. В., Мішура Ю. С., Яневич Т. О. , Ізарова І. О., Порівняння 2D згорток та щільних нейронних мереж в моделях природної обробки мови з кількома вхідними реченнями 20

Голіченко І.І., Моклячук М.П. Задача фільтрації для періодично корельованих випадкових послідовностей із пропущеними даними 30

Зубченко В.П., Авраменко А.В. Дослідження скорингової моделі для кредитопозичальників банку 44

Ральченко К.В., Яковлєв М.С. Асимптотична нормальність оцінок параметрів змішаного дробового броунівського руху 54

Грігутіс А. Імовірнісний огляд ймовірностей дефолту для портфелів з низьким рівнем дефолту введених К. Плуто та Д. Таше 63

Боднарчук І.М. Асимптотика м’якого розв’язку параболічного рівняння із загальною стохастичною мірою 75

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батутіна Т.Я., Олійник В.Н. Напівемпіричне оцінювання акустичних навантажень на головну частину ракети при нестандартній конфігурації стартових споруд 84

Борисейко О.В., Гусак В.О., Маципура В.Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів у методі часткових областей 88

Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю. Дослідження напружено-деформівного стану півнескінченного порожнистого поропружного циліндру під дією вісісиметричного навантаження 92

Вайсфельд Н.Д., Процеров Ю.С., Толкачов А.В. Плоска задача про коливання балкової плити на прямокутній основі 96

Даляк Т.М., Шацький І.П. Про крихке руйнування тіла з частково залікованою зірчастою тріщиною 100

Жук О.П., Жук Я.О., Клімчук Т.В. Взаємодія системи сторонніх об’єктів у рідині, обумовлена силами акустичного випромінювання 104

Жук Я.О., Мельниченко М.М., Андрущенко В.О., Кір'єв А.М., Пучко Н.П., Водотовка М.А. Експериментальне вивчення руйнування матеріалів після ударно-хвильового навантаження 108

Зражевський Г.М., Зражевська В.Ф. Застосування BPOE та CVaR при визначенні оптимальних керувань формами коливань круглої платівки 112

Камінський А. О., Дудик М. В., Решітник Ю.В. Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини 116

Куценко О.Г., Харитонов О.М., Куценко А.Г. Розклинювання підінтерфейсної тріщини пластичним наплавленням 120

Куценко О.Г., Харитонова Л.В., Круш Р.М. Закономірності росту плоских тріщин в пластинах 124

Лубков М.В. Моделювання деформування соляних структур внаслідок гравітаційної плавучості 128

Маковійчук М. В., Шацький І. П. Аналіз граничної рівноваги зігнутої сферичної оболонки з колінеарними тріщинами за локальним та інтегральним критеріями руйнування 132

Маслов Б.П. Побудова критерію довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок 136

Онишкевич В.М., Барабаш Г.М. Фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при ковзанні вздовж твірної 140

Плащинська А.В., Романов О.В. Щодо розрахунку втомної довговічності призматичних стержнів за умов одновісного асиметричного згину 144

УДК 539.375 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.17

Камінський А. О.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Дудик М. В.[2], к.ф.-м.н., доц.,
Решітник Ю. В.[2], к.ф.-м.н., доц.

Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: dfm11@ukr.net
[2] Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, 20300, м. Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com, dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

A. O. Kaminsky[1], Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
M. V. Dudyk[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.
Yu. V. Reshitnyk[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack

[1] S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3,
e-mail: dfm11@ukr.net
[2] Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, 20300, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com, dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

Розвинуто модель зони передруйнування, яка в умовах плоскої деформації поширюється з вершини міжфазної тріщини під кутом до плоскої межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, на якій виконується двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла. Параметрами моделі служать опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Модель враховує крихкий і пластичний механізми руйнування і може бути використана для опису квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Показано можливість переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування при зміні відношення опорів відриву і зсуву матеріалу.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, критерій міцності Мізеса – Хілла.

A model of the pre-fracture zone, which under plane strain conditions extends from the tip of the interface crack at an angle to the plane interface of two different homogeneous isotropic materials, has been developed. The pre-fracture zone is represented by the displacement discontinuity line, on which the strength condition of the Mises - Hill type is satisfied. The parameters of the model are the tensile resistance and shear resistance of the material in which the zone develops. The model takes into account brittle and ductile fracture mechanisms and can be used to describe the quasi-brittle fracture of a piece-homogeneous body with an interface crack. The possibility of a transition between brittle and ductile fracture mechanisms is shown when the ratio of tensile and shear resistance of the material changes.

Key Words: interface crack, pre-fracture zone, Mises-Hill strength criterion.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. У механіці руйнування для дослідження процесів в околі концентраторів напружень поширеним є використання різного роду моделей зон передруйнування. Строгий опис процесів передруйнування ускладнений нелінійністю визначальних рівнянь, які задають напружено-деформований стан матеріалу в зоні. Це зумовило впровадження ряду спрощених моделей зон з використанням тих чи інших критеріїв руйнування, які за певних умов допускають аналітичне розв'язання. До таких моделей відносяться, зокрема, модель пластичної зони Дагдейла і зони процесу Леонова – Панасюка, які подають зони передруйнування поверхнями розриву переміщення з заданими критеріальними обмеженнями на компоненти тензора напружень.

Моделі Дагдейла і Леонова – Панасюка використовують однопараметричні критерії руйнування типу Треска – Сен-Венана і спочатку призначались для дослідження зон передруйнування в однорідних матеріалах. Згодом з'явились приклади їх успішного застосування до моделювання зон передруйнування біля вершин тріщин в кусково-однорідних та анізотропних тілах. Однак ці

© А.О. Камінський, М.В. Дудик, Ю.В. Решітник, 2023

моделі викликають питання про достатність використання в них однопараметричних критеріїв у випадку квазікрихкого типу процесів руйнування, або за складного характеру навантаження. У зв'язку з цим на увагу заслуговують багатопараметричні критерії руйнування.

У роботах [1, 2] використано двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла [3] для побудови моделей зон передруйнування біля вершини тріщини в ортотропних та кусково-однорідних тілах відповідно. Параметрами моделей служили опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Ефективність моделей в [1] була підтверджена експериментально, в [2] – успішним порівнянням передбачуваних та спостережуваних на досліді кутів повороту міжфазної тріщини.

Метою даної роботи є дослідження в рамках моделі [2] впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на формування зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини.

Опис моделі. Розглядається модель маломасштабної зони передруйнування в умовах плоскої деформації біля вершини розкритої міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, нахиленою під кутом α до межі розділу (рис. 1). Нормальне і дотичне напруження на лінії розриву задовольняють критерій міцності типу Мізеса – Хілла

$$(\sigma_\theta / \sigma_1)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_1)^2 = 1, \qquad (1)$$

де σ_1, τ_1 – опори відриву та зсуву першого матеріалу, в якому передбачається утворення зони. Довжина зони передруйнування l вважається значно меншою, ніж довжина тріщини L *(l<< L)* (рис. 1).

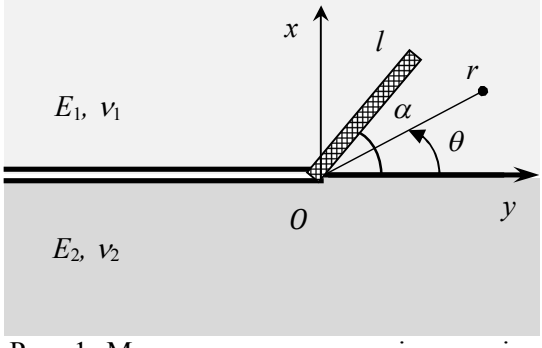


Рис. 1. Модель кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною і зоною передруйнування

Умову на нескінченості сформульовано у вигляді можливості зшивання шуканого розв'язку на відстанях $l = r = L$ з асимптотикою розв'язку аналогічної задачі без лінії розриву [4].

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача про розрахунок параметрів зони зведено до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, для якого отримано наближений розв'язок. Використовуючи умову обмеженості напружень в кінці лінії розриву, знайдено рівняння для розрахунку довжини зони l [2]:

$$\left[\frac{G_{11}^{0+}(-1)}{\sigma_1 K^+(-1)}\left(2\,\mathrm{Re}\left(CF_1 l^{\lambda_0} N_1\right)+\frac{\mathcal{H}_{12}}{2\pi}\right)\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{G_{22}^{0+}(-1)}{\tau_1 K^+(-1)}\left(2\,\mathrm{Re}\left(CF_2 l^{\lambda_0} N_2\right)+\frac{\mathcal{H}_{21}}{2\pi}\right)\right]^2 = 1,$$

де $C = -ie'KL^{-i\omega}$, $e' = \dfrac{\sqrt{(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)}}{2\sqrt{2\pi}[(e+\kappa_1)^2-(1+e\kappa_2)^2]}$,

$\omega = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{e+\kappa_1}{1+e\kappa_2}$, $e = \dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\dfrac{E_1}{E_2}$, $\kappa_{1(2)} = 3-4\nu_{1(2)}$;

$\lambda_0 = -0.5 + i\omega$ – показник сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини; K – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, який характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження. Решта позначень приведено в [2] і опущено тут через громіздкість. Орієнтація зони передруйнування визначається з умови максимуму величини дисипації енергії в зоні, для якої в [2] отримано відповідний аналітичний вираз. Виведено формули для розкриття тріщини у її вершині $\delta u = \sqrt{\langle u_\theta(0,\alpha\rangle^2 + \langle u_r(0,\alpha\rangle^2}$ та середнього значення фазового кута напружень в зоні $\psi = \mathrm{arctg}\dfrac{(\tau_{r\theta}/\tau_1)}{(\sigma_\theta/\sigma_1)}$.

Числовий аналіз моделі. Дослідимо наслідки моделі щодо впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на параметри зони передруйнування. В якості прикладу розглянемо внутрішню міжфазну тріщину довжиною L у кусково-однорідній площині, навантаженій на нескінченності рівномірно розподіленими тангенціальними і розтягувальними нормальними зусиллями ($\tau_{xy}=q$, $\sigma_x=p>0$ при $x^2+y^2\to\infty$ в декартовій системі координат, зображеній на рис. 1). Нормований комплексний КІН в кінці тріщини визначається як $K=K_1+iK_2$ [4], де

$$K_1 = \frac{(p-2\omega q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\omega}, \quad K_2 = \frac{(2\omega p+q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\omega}.$$

Зовнішнє навантаження задаємо безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2+q^2}/\sigma_1$ та конфігурацією, що визначається фазовим кутом $\varphi = \mathrm{arctg}(q/p)$. Результати числових розрахунків для сталих ко-

ефіцієнтів Пуассона $\nu_1=\nu_2=0.3$ подано на рис. 2, де графіки *a*, *b*, *c*, *d* відображають залежності від відношення опорів відриву та зсуву матеріалу, в якому виникла зона, відповідно відносної довжини зони передруйнування $x=l/L$, кута α нахилу зони до межі розділу, фазового кута ψ напруження в зоні та нормованого розкриття тріщини у її вершині $\delta\tilde{u}=\dfrac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\dfrac{\delta u}{L}$.

Як випливає з аналізу рис. 2, у залежності параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву передбачається два специфічних ефекти. Перший полягає у переході від крихкого характеру руйнування матеріалу до пластичного та проявляється у швидкому зростанні розмірів зони і розкриття тріщини при перевищенні опором відриву σ_1 матеріалу значення опору зсуву τ_1 (рис. 2*a*, *d*). При цьому також змінюється характер залежності кута нахилу зони до межі розділу (рис. 2*b*) і фазового кута напружень в зоні (рис. 2*c*) від відношення σ_1/τ_1. Даний ефект може спостерігатися при зміні температури твердих тіл, оскільки при нагріванні опір відриву змінюється мало, тоді як опір зсуву помітно зменшується [5]. Підтвердженням цього можуть бути результати експериментів з дослідження впливу температури на поширення міжфазної тріщини у багатошарових вуглепластикових ламінатах [6]. Як встановлено в [6], кут повороту тріщини від межі розділу двох різнонаправлених шарів зменшується зі збільшенням температури. Цей результат узгоджується зі зменшенням кута нахилу зони передруйнування при збільшенні відношення σ_1/τ_1 (суцільні лінії на рис. 2*b* для $\varphi\le 0°$) і пов'язаний зі зменшенням опору зсуву матеріалу шару при підвищенні температури. Однак розвинута вище модель не забезпечує кількісний аналіз результатів роботи [6], оскільки не враховує залежність від температури пружних характеристик і теплове розширення матеріалів, що приводитиме до викривлення межі розділу та появи додаткових напружень.

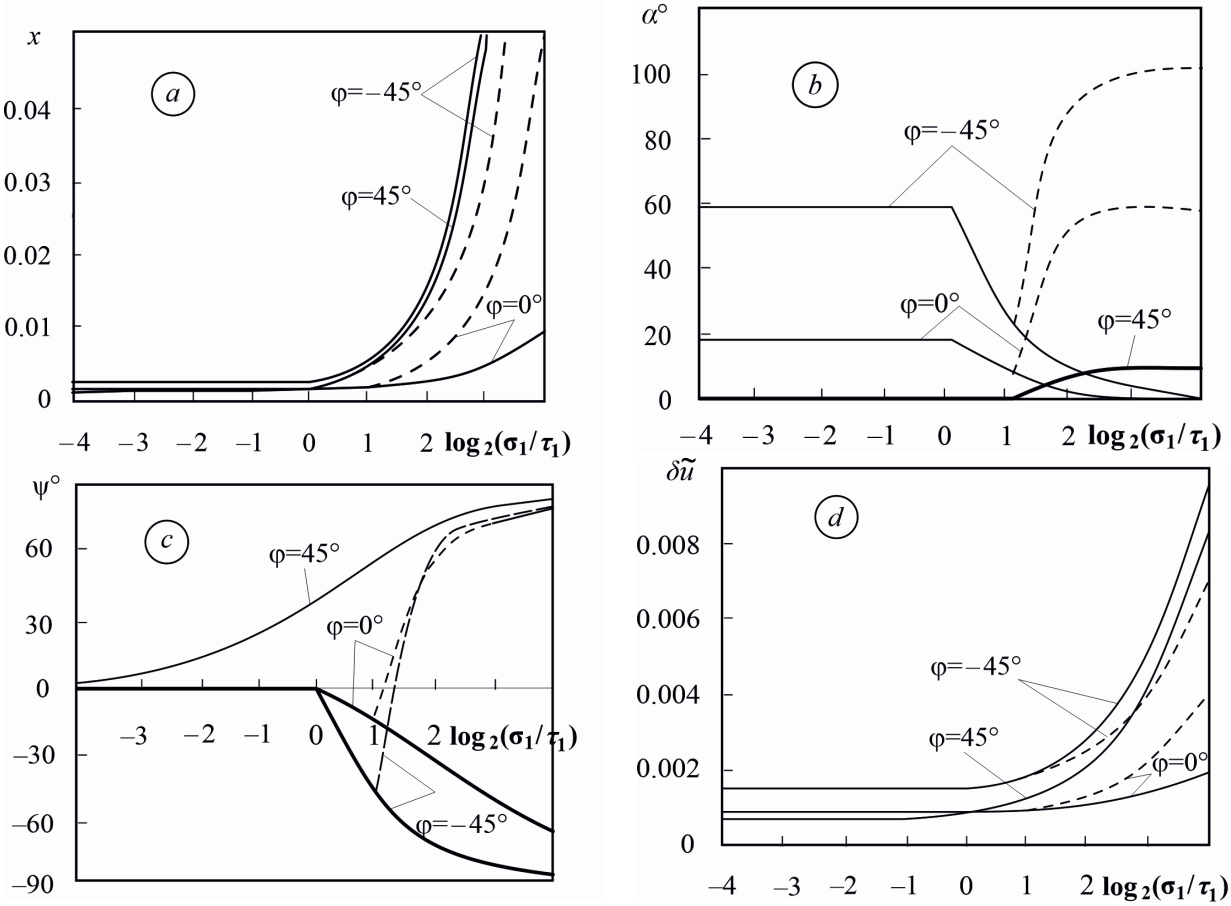


Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву

Другий ефект від зміни відношення опорів відриву і зсуву проявляється в розгалуженні зони передруйнування при $\sigma_1\ge 2\tau_1$ і $\varphi\le 0°$. Одна із гілок зони (їй відповідають суцільні лінії на графіках) повертається до межі розділу, а інша (пунктирні лінії) відхиляється від межі на значний кут (рис. 2*b*). Крім того, в них виявляється різним напрямок дотичних напружень (рис. 2*c*). Оскільки при

$\sigma_1 \geq 2\tau_1$ процеси руйнування в зоні набувають переважно пластичного характеру і пов'язані з зсувними деформаціями, розгалуження зони передруйнування можна розглядати як непрямий наслідок закону парності дотичних напружень. Розгалуження пластичної зони демонструють, зокрема, результати числового моделювання в [7] маломасштабного поля пластичних деформацій у пружнопластичному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. Однак слід зазначити, що розвинута вище модель лише вказує на можливість розгалуження зони передруйнування, але непридатна для визначення параметрів її гілок, оскільки базується на припущенні про наявність лише однієї гілки.

Висновки. В статті досліджено двохпараметричну модель маломасштабної зони передруйнування в квазіпружному матеріалі композитного з'єднання біля вершини міжфазної тріщини. Особливістю моделі є використання критерію міцності типу Мізеса – Хілла, параметрами якого служать опір відриву і опір зсуву матеріалу. Модель враховує одночасно крихкий і пластичний процеси руйнування матеріалу в зоні та призначена для вивчення квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Виконано числовий аналіз параметрів зони передруйнування в кінці внутрішньої міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині при її навантаженні віддаленими рівномірно розподіленими тангенціальним і розтягувальним нормальним зусиллями. Виявлено існування переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування у вузькому інтервалі значень відношення опорів відриву і зсуву біля $\sigma_1/\tau_1 \approx 2$.

Список використаних джерел

1. *Kaminsky A.A.* On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary / A.A. Kaminsky, O.S. Bogdanova, V.N. Bastun // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2010. – Vol. 34. – P. 345–355.
2. *Kaminsky A.O.* An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials / A.O. Kaminsky, M.V. Dudyk, Y.V. Reshitnyk, Y.O. Chornoivan // Int. J. Solids and Struct. – 2023. – Vol. 267. – N 112117.
3. *Hill R.A.* Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals / R.A. Hill // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1948. – Vol. 193. – P. 281–297.
4. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J.R. Rice // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – Vol. 55, N 3. – P. 98–103.
5. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Часть 1. Деформация и разрушение / Я.Б. Фридман. – М.: Машиностроение, 1972. – 472 с.
6. *Yamamoto S.* Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam / S. Yamamoto, T. Ikeda, A. Senba // Arch. Mech. – 2016. – Vol. 68, N 5. – P. 349–369.
7. *Shih C.F.* Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding / C.F. Shih, R.J. Asaro // J. Appl. Mech. – 1989. – Vol. 56. – P. 763–779.

References

1. KAMINSKY, A.A., BOGDANOVA, O.S. & BASTUN, V.N. (2010) On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 34. p.345-355.
2. KAMINSKY, A.O., DUDYK, M.V., RESHITNYK, Y.V. & CHORNOIVAN Y.O. (2023) An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids and Struct*. 267 (112117).
3. HILL, R.A. (1948) Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London.* 193. p.281-297.
4. RICE, J.R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 55 (3). p.98-103.
5. FRIDMAN, Ya.B. (1972) *Mehanicheskie svoystva metallov.* Part 1. Moskva: Mashinostroenie.
6. YAMAMOTO, S. , IKEDA, T. & SENBA, A. (2016) Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam. *Arch. Mech*. 68 (5). p.349-369.
7. SHIH, C.F. and ASARO, R.J. (1989) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding. *J. Appl. Mech.* 56. p.763-779.

Надійшла до редколегії 20.08.23