Дудик М.В.

Діхтяренко Ю.В.

СУЧАСНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Навчальний посібник

для студентів вищих навчальних закладів

фізико-математичних спеціальностей

Умань 2015

УДК 539.3 (075.8)

ББК 22.371.1я73

С91

Рецензенти:
Краснобокий Ю.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент
Дякон В.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного факультету Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 5 від 18.12.2014 р.)

Укладачі: Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

С91 Сучасні методи теорії пружності (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 108 с.

© Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

© СПД Жовтий, 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 5
Пояснювальна записка.....6
Структура навчальної дисципліни.....6
Теми індивідуального навчального дослідження 6
Методи і критерії оцінювання 7
Розподіл балів, які отримують студенти.....8
Шкала оцінювання: національна та ЄКТС 8
Рекомендована література.....9
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....10
§1. Вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла 10
§2. Напруження.....11
§3. Компоненти напружень.....12
§4. Тензор деформацій.....13
§5. Закон Гука 15
§6. Плоский напружений стан і плоска деформація.....18
§7. Напруження в точці.....19
§8. Диференціальні рівняння рівноваги.....20
§9. Граничні умови.....21
§10. Рівняння сумісності.....22
§11. Принцип Сен-Венана 24
РОЗДІЛ 2. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ.....26
§12. Функція напружень Ері 26
§13. Розв’язки у поліномах.....27
§14. Визначення переміщень 30
§15. Згин консолі, навантаженої на кінці 31
§16. Вигин балки рівномірним навантаженням.....35
РОЗДІЛ 3. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ.....39
§17. Загальні рівняння в полярних координатах.....39
§18. Полярно-симетричний розподіл напружень 40
§19. Чистий згин кривих брусів.....42
§20. Компоненти деформацій у полярних координатах 44
§21. Переміщення при симетричних полях напружень 45
§22. Обертання диска.....47
§23. Вигин кривого бруса силою, прикладеної на кінці 49
§24. Крайові дислокації 53
§25. Вплив круглого отвору на розподіл напружень у пластинці 54
§26. Зосереджена сила, прикладена в деякій точці прямолінійної границі 57
РОЗДІЛ 4. ВИКОРИСТАННЯ ТФКЗ В ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....62
§27. Основні поняття теорії функцій комплексної змінної 62
§28. Функції напружень, виражені через гармонійні комплексні функції.....65
§29. Переміщення, що відповідають заданій функції напружень.....67
§30. Представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали ..68
§31. Результуючих напружень, що діють по деякій кривій. Граничні умови .70

§32. Розв’язки у еліптичних координатах. Еліптичний отвір у пластинці з однорідним напруженим станом 72
§33. Визначення комплексних потенціалів по заданих граничних умовах. Методи М.І.Мусхелішвілі 75
§34. Формули для комплексних потенціалів.....77
РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ 80
§35. Вступ.....80
§36. Поля напруг і зсувів в околі кінчика тріщини 81
§37. Канонічний метод розв’язання задачі для тріщини.....87
§38. Метод Вінера-Хопфа розв’язання задачі механіки руйнування про зрушення крайової мікротріщини 90
ПИТАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ 97
ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ З СУЧАСНИХ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ..105

ПЕРЕДМОВА

Курс «Сучасні методи теорії пружності» належать до пріоритетних напрямів сучасної науки і призначений для ознайомлення студентів ефективними методами розрахунку полів напружень і переміщень в технічних конструкціях.

Для засвоєння курсу сучасних методів теорії пружності студенти повинні мати достатні знання із вищої математики, комплексного аналізу та теоретичної фізики.

Даний посібник призначений для самостійної роботи студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Посібник складений відповідно до діючого державного стандарту спеціальності 7.04020301 Фізика (за напрямами)* і узгоджений з навчальною програмою дисципліни.

Посібник містить загальну інформацію про зміст курсу «Сучасні методи теорії пружності», вимоги до знань і вмінь, які мають набути студенти по завершенню вивчення курсу, відомості про структуру залікового кредиту, теми навчально-дослідних завдань тощо.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета і завдання дисципліни

Метою курсу “Сучасні методи теорії пружності” для студентів напряму підготовки 8.04020301 Фізика (за напрямами*) є їх ознайомлення з ефективними методами розрахунку полів напружень і переміщень в технічних конструкціях. Важлива увага приділяється полям напружень в околі концентраторів напружень, де найімовірніше поява тріщин. Приводяться елементи механіки руйнування матеріалів та деякі методи дослідження процесів зародження і поширення тріщин.

По завершенню вивчення курсу “Сучасні методи теорії пружності” студенти повинні:

знати: методи визначення напружень і переміщень в прямокутних і полярних координатах за допомогою функції Ері; можливості використання теорії функцій комплексної змінної в теорії пружності; основні поняття механіки руйнування матеріалів; особливості використання методу Вінера-Хопфа в механіці руйнування.

вміти: знаходити поля напружень і переміщень за допомогою функції Ері в двовимірних задачах теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану при згині балки, консолі і брусів.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Вступ. Основні рівняння теорії пружності
Модуль 1. Двовимірні задачі теорії пружності в прямокутних координатах
Модуль 2. Двовимірні задачі у полярних координатах
Модуль 3. Використання ТФКЗ в теорії пружності
Модуль 4. Елементи механіки руйнування матеріалів

ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАВЧАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теми ІНД:

1. Критерії руйнування
2. Концентрація напружень в пластині з отвором
3. Траєкторії тріщин у твердому тілі
4. Динамічне поширення тріщин
5. Пластична течія матеріалу в околі вершини тріщини
6. Модель Панасюка-Дагдейла
7. Теорія дислокацій в задачах про тріщини
8. Тріщини у лінійних в’язкопружних тілах
9. Втомне руйнування
10. Метод скінчених елементів у механіці руйнування
11. Власна функція
12. Напруження в круглому диску
13. Дія на балку зосередженою силою
14. Узагальнений розв'язок двохвимірної задачі в полярних координатах
15. Клин навантажений вздовж граней
16. Метод муара

17.Аналітичні функції і рівняння Лапласа
18.Функції напружень виражені через гармонічні і комплексні функції
19.Загальний розвязок для переміщень
20.Принцип суперпозиції
21.Теорема Кастильяно
22.Енергія деформації
23.Застосування принципу мінімальної роботи
24.Принцип віртуальної роботи
25.Визначення головних напружень

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ: поточне оцінювання розв'язування задач на практичному занятті; модульний тестовий контроль; оцінка за ІНД (реферат); оцінка за індивідуальні домашні завдання, підсумковий контроль.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Модульний контроль (МК) здійснюється у вигляді аудиторних письмових робіт з кожного модулю, кожна з яких передбачає відповіді на 10 коротких теоретичних питань. Вірна відповідь на питання оцінюється у 1 бал, неточна або неповна відповідь – 0,5 бала, невірна відповідь – 0 балів. Оцінка за кожну роботу дорівнює сумі набраних балів.

Оцінка за кожну роботу дорівнює сумі набраних балів.

Індивідуальне навчально-дослідне завдання (ІНДЗ) полягає у домашньому розв'язанні задач з сучасних методів теорії пружності по варіантам та виконанні індивідуального навчального дослідження. Кожна задача оцінюється за 2-бальною системою:

2 б. – вірний розв'язок з поясненням, точними ілюстраціями,без похибок;

1,5 б. – вірний розв'язок, у якому допущені несуттєві похибки;

1 б.– вірний в цілому розв'язок, який містить грубі похибки;

0,5 б.– розв'язок невірний, але містить вірні вихідні рівняння до розв'язання.

0 б.- розв'язок невірний або відсутній.

Індивідуальне навчальне дослідження виконується за запропонованими нижче темами і стосується питань сучасних методів теорії пружності, які не ввійшли до лекційного курсу дисципліни. Результати дослідження подаються студентом у формі реферату і оцінюється за 10-бальною шкалою, яка враховує науковість, повноту розкриття теми, наявність посилань на першоджерела, у тому в числі в тексті, логічність і послідовність викладення матеріалу, наявність вступу і висновків, грамотність, якість оформлення.

Оцінка з ІНДЗ складається з суми балів, набраних за кожну задачу та за індивідуальне навчальне дослідження.

Підсумковий контроль полягає у виконанні аудиторної письмової роботи у формі контрольної роботи, яка містить 5 теоретичних питань і 2 задачі. Відповідь на кожне питання оцінюється у 1 бал, якщо вона вірна і повна 0,5 бали – якщо відповідь неповна, містить похибки; 0 балів – якщо відповідь помилкова або відсутня. Розв'язок задач оцінюється аналогічно

оцінюванню задач індивідуальних домашніх завдань. Оцінка з підсумкового контролю складається з суми набраних балів з тесту.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Модульний контроль				ІНДЗ	Підсумк. контроль	Сума балів
Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4			
10	10	10	10	50	10	100

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ: НАЦІОНАЛЬНА ТА ЄКТС

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90-100	відмінно	зараховано
82-89	добре	
75-81		
69-74	задовільно	
60-68		
35-59	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
1-34	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Аменздаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М,: Наука, 1981. – 688 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
7. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: СамГУ, 2001. – 632 с.
8. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. – **М**.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 408 с.
9. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
10. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. литературы, 1985. - 504 с.
11. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

§1. Вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла

Дослідження поведінки деформівних тіл при дії на них зовнішніх сил являє собою настільки складну задачу, що її розв’язання в практично прийнятному вигляді вдається одержати лише при певній схематизації явищ, що відбуваються.

Першим кроком на цьому шляху є відмова від врахування як мікроструктури деформівних тіл, тобто, їх атомної та молекулярної будови, так і макроструктури (кристалічної та аморфної будови, наявності пор і включень і т.д.), а також структурних змін, що відбуваються в процесі деформування.

Деформоване тіло, таким чином, розглядається як обмежене заданою поверхнею суцільне середовище. Іншими словами, припускається, що будь-яка як завгодно мала частина об’єму тіла складається з матеріалу цього тіла. Тому виявляється можливим говорити не тільки про геометричну, але й «матеріальну» точку тіла, і визначати величини, що характеризують стан і поведінку тіла, як неперервні функції від координат названих точок. Отже, ми вважатимемо, що матеріал твердого тіла є однорідним і неперервно розподіленим по всьому об’єму тіла, так що самий найменший елемент, вирізаний з тіла, має ті ж самі фізичні властивості, що й все тіло. Для спрощення міркувань, як правило, будемо припускати, що тіло ізотропне, тобто, що його характеристики по всім напрямкам однакові.

Зовнішні сили, що діють на тіло, розглядаються як результат дотику з іншими тілами або як наслідок наявності у всіх тіл маси. Сили дотику приймаються прикладеними до всієї або до частини поверхні тіла, тому їх називають *поверхневими.* Сили, пов'язані з масою тіла (масові, або об'ємні, сили — тому що вони пропорційні елементарному об’єму тіла), вважаються розподіленими по об’єму тіла (такими є, наприклад, сили тяжіння або інерції).

Приймається, що частинки тіла зв'язані між собою силами зчеплення, які зводяться до сил притягання і відштовхування. Крім того, передбачається, що існує такий стан тіла, у якому сили притягання й відштовхування взаємно зрівноважені. Цей стан називають природним.

Передбачається також, що природний стан тіла відповідає відсутності деформацій і прикладених до цього тіла зовнішніх сил. Будь-яке відхилення від природного стану в такому припущенні пов'язується з порушенням рівноваги сил зчеплення і виникненням із цієї причини деформацій, які продовжують зростати доти, поки не відбудеться руйнування тіла або не буде досягнутий новий рівноважний стан за рахунок виникнення сил взаємодії (зусиль, або внутрішніх сил). Приймається, що ці сили не мають властивості далекодії, так що внутрішні сили, які виникають між двома частинами деформованого тіла, вважаються прикладеними до поверхні, що розмежовує обидві частини. При цьому робиться допущення, що величина і напрямок вказаних сил у будь-якій точці поверхні не залежать від її виду, а лише від напрямку нормалі до неї.

§2. Напруження

На рис. 2.1 показане тіло, що перебуває в стані рівноваги. Під дією зовнішніх сил $P_1, P_2, ..., P_7$ між частинами тіла виникають внутрішні сили взаємодії. Щоб дослідити величину цих сил у довільній точці *O,* уявимо, що тіло розділене на дві частини *A* і *B* поперечним перерізом *mm,* що проходить через цю точку. Розглядаючи одну із цих частин, наприклад частину *A,* можна стверджувати, що вона перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил $P_1, P_2, ..., P_7$ і внутрішніх сил, які розподілені по поперечному перерізу *mm* і являють собою дію матеріалу частини *B* на матеріал частини *A*. Припустимо, що ці сили неперервно розподілені по площі перерізу *mm* подібно до того, як розподіляються по поверхні, на яку вони діють, гідростатичний тиск або тиск вітру. Величини таких сил визначаються їхньою інтенсивністю, тобто величиною сили, віднесеної до одиниці площі, на яку вона діє. Інтенсивність внутрішніх сил називається напруженням.

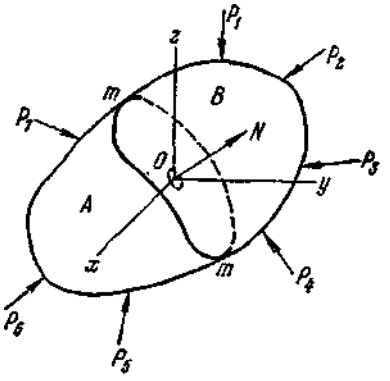


Рис. 2.1

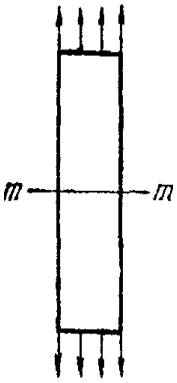


Рис. 2.2

В найпростішому випадку призматичного стержня, що розтягується силами, рівномірно розподіленими по його кінцях (рис. 2.2), внутрішні сили в довільному поперечному перерізі *mm* також розподіляються рівномірно. Отже, інтенсивність цього розподілу, тобто напруження, можна одержати, розділивши повне розтяжне зусилля *P* на площу поперечного перерізу S.

У розглянутому випадку напруження розподілене по поперечному перерізу рівномірно. У загальному випадку (рис. 2.1, розтин *mm*) це не так. Щоб одержати величину напруження, розподіленого по деякій малій площадці δS, вирізаній з поперечного перерізу *mm* у точці *O*, насамперед відзначимо, що сили, які діють на цю елементарну площадку з боку частини тіла *B* на частину тіла *A,* можна звести до результуючої сили δP.

Якщо ми будемо тепер неперервно зменшувати площу елементарної площадки δS, то граничне значення відношення $\delta P / \delta S$ дасть нам величину напруження, що діє в поперечному перерізі *mm* у точці *O*. Граничний напрямок результуючої δP є напрямком напруження в розглянутій точці. У загальному випадку вектор напруження нахилений до площадки δS, на якій воно діє, і його можна розкласти на дві компоненти: на *нормальне напруження,* перпендикулярне площадці, і на *дотичне напруження,* що діє в площині площадки δS.

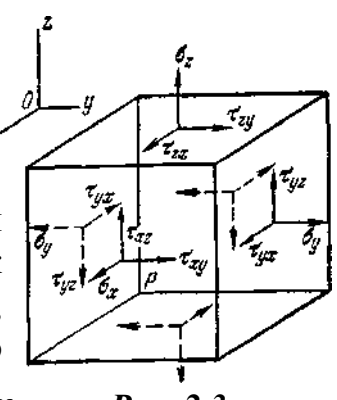


Рис. 2.3

Існує два види зовнішніх сил, які можуть впливати на тіло. Сили, розподілені по поверхні тіла, такі, як тиск одного тіла на інше або гідростатичний тиск, називаються *поверхневими силами.* Сили, розподілені по масі тіла, такі, як сили тяжіння, магнітні сили або (у випадку руху тіла) сили інерції, називаються *масовими*

силами. Поверхневу силу, віднесену до одиниці площі, ми будемо розкладати на три компоненти, паралельні декартовим координатним вісям x, y, z використовуючи для цих компонентів позначення $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Масові сили, віднесені до одиниці об'єму, називані об'ємними силами, також розкладемо на три компоненти, позначивши їх через X, Y, Z.

Буквою σ будемо позначати нормальне напруження, а буквою τ - дотичне. Щоб вказати орієнтацію площини, по якій діє напруження, до цих букв будемо додавати індекси. Розглянемо дуже малий кубічний елемент у точці *P* (рис. 2.3) із гранями, паралельними координатним осям. Позначення для компонентів напружень, що діють по гранях цього елемента, а також напрямку, які вважаються позитивними, показані на рис. 2.3. Наприклад, для граней елемента, перпендикулярних вісі y, нормальні компоненти напружень, що діють на цих гранях, позначаються через σ_y. Індекс y показує, що напруження діють по площадці, перпендикулярній вісі y. Нормальне напруження вважається позитивним, коли воно викликає розтяг елемента, і негативним, коли воно викликає стиск.

Дотичні напруження розкладаються на дві компоненти, паралельні координатним осям. У цьому випадку використовуються вже два індекси, з яких перший показує напрямок нормалі до розглянутої площини, а другий - напрямок компоненти напружень. Наприклад, якщо знову розглянути грані, перпендикулярні осі *y*, то компонента в напрямку *x* позначається через τ_{yx}, а компонента в напрямку *z* - через τ_{yz}. Позитивні напрямки компонентів дотичних напружень на грані кубічного елемента приймаються співпадаючими з позитивними напрямками координатних осей, якщо розтягуючі напруження для тієї ж грані збігаються з позитивним напрямком відповідної осі. Якщо розтягуючі напруження мають напрямок, протилежний позитивному напрямку осі, то позитивні напрямки компонент дотичного напруження міняються на зворотні. Відповідно до цього правила позитивні напрямки всіх компонентів напруги на першій грані кубічного елемента (рис. 2.3) збігаються з позитивними напрямками координатних осей. Якщо ж розглядається ліва грань того ж елемента, то позитивні напрямки міняються на зворотні.

§3. Компоненти напружень

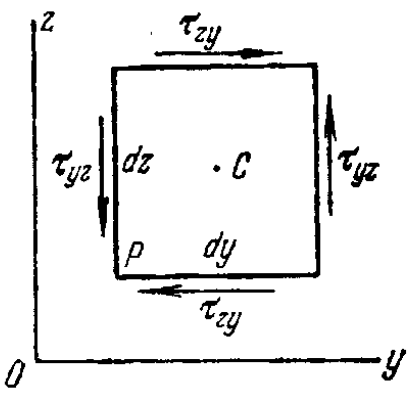


Рис. 3.1

Як видно з попереднього параграфа, для кожної пари паралельних граней кубічного елемента, зображеного на рис. 3.1, потрібно один символ, щоб позначити нормальну компоненту напружень, і ще два символи, щоб позначити компоненти дотичних напружень. Щоб позначити напруження, що діють на шести гранях елемента, потрібно три символи $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ для нормальних напружень і шість $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ для дотичних. За

допомогою простого дослідження рівноваги елемента число символів для дотичних напружень можна скоротити до трьох.

Якщо взяти моменти сил, що діють на елемент, відносно осі, що проходить через центральну точку C паралельно осі x, то виявиться необхідним розглядати лише ті поверхневі сили, які показані на рис. 3.1. Об'ємними силами, такими, як вага елемента, у цьому випадку можна знехтувати, оскільки при зменшенні розмірів елемента діючі на нього об'ємні сили зменшуються пропорційно кубу лінійного розміру, тоді як поверхневі зусилля зменшуються пропорційно квадрату лінійного розміру. Отже, для дуже малого елемента об'ємні сили є величинами більш високого порядку, ніж поверхневі сили, і при визначенні моментів можуть не враховуватися. Точно так само моменти, викликані неоднорідністю розподілу нормальних зусиль, мають більш високий порядок малості, ніж моменти, викликані зсувними зусиллями, і обертаються в нуль при необмеженому зменшенні розмірів елемента.

Таким чином, зусилля, що діють на кожній грані куба, можна вважати рівними добутку площі грані на величину напруження в її центрі. Якщо позначити розміри малого елемента на рис. 3.1 через dx, dy, dz, то з рівняння моментів сил відносно точки C

$$\tau_{zy} dxdydz = \tau_{yz} dxdydz .$$

Аналогічно можна одержати й два інших рівняння. Із цих рівнянь знаходимо

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} . \qquad (3.1)$$

Отже, на двох перпендикулярних одна одній гранях кубічного елемента компоненти дотичного напруження, перпендикулярні лінії перетину цих граней, рівні між собою.

Таким чином, для опису напружень, що діють на координатних площинах, які проходять через будь-яку точку, достатньо шести величин: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Вони будуть називатися *компонентами напружень* у цій точці і утворюють тензор напружень. За допомогою цих шести компонентів можна визначити напруження на будь-якій нахиленій площадці, що проходять через цю ж точку.

§4. Тензор деформацій

При розгляді деформацій пружного тіла будемо припускати, що є достатня кількість в'язів, які перешкоджають руху тіла як твердого цілого, у силу чого переміщення частинок тіла неможливі без його деформації.

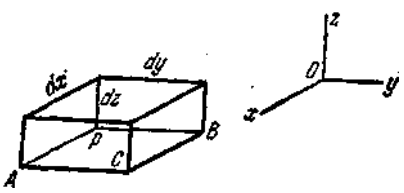


Рис. 4.1

Будемо надалі розглядати тільки звичайно виникаючі в інженерних конструкціях малі деформації. Перш за все розкладемо переміщення частинок деформованого тіла на компоненти u, v, w, паралельні відповідно до координатних осей x, y, z. Будемо вважати, що ці компоненти є досить малими величинами, які міняються неперервно по об'єму тіла. Розглянемо малий елемент пружного

тіла (рис. 4.1). Якщо тіло піддається деформації і u,v,w - компоненти переміщення в точці P, то переміщення в напрямку x сусідньої точки A, розташованої на осі x, з точністю до величин першого порядку по dx має вигляд $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ через зростання функції u на величину $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ зі збільшенням координати x. Збільшення довжини елемента PA, викликане деформацією, дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x}dx$. Таким чином, *відносне видовження* в точці P у напрямку x становить $\frac{\partial u}{\partial x}$. Таким же шляхом можна показати, що відносні подовження в напрямках y і z визначаються похідними $\frac{\partial v}{\partial y}$ і $\frac{\partial w}{\partial z}$.

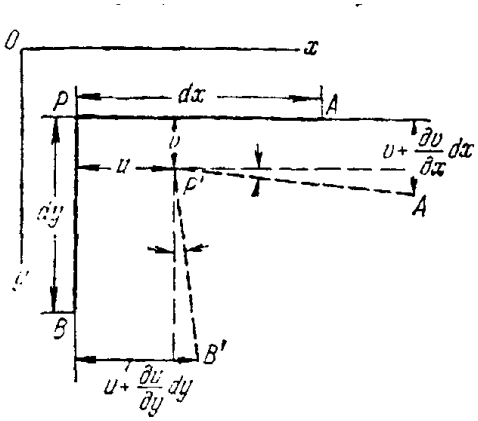


Рис. 4.2

Розглянемо тепер зміну кута між елементами PA і PB (рис. 4.2). Якщо u і v - переміщення точки P у напрямках x і y, то переміщення точки A в напрямку y і точки B у напрямку x дорівнюють відповідно $v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$ і $u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$. У результаті цих переміщень новий напрямок $P'A'$ елемента PA утворить, як показано на кресленні, з початковим напрямком малий кут $\frac{\partial v}{\partial x}$. Точно так само напрямок $P'B'$ повернений відносно PB на малий кут $\frac{\partial u}{\partial y}$. Звідси видно, що початково прямий кут APB між двома елементами PA і PB зменшився на величину $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$. Ця величина являє собою деформацію зсуву між площинами xz і yz. Таким же шляхом можна одержати деформації зсуву між площинами xy і xz, а також між площинами yx і yz.

Через ε будемо позначати відносне видовження, а через γ - відносну деформацію зсуву. Для вказівки напрямків деформації будемо використовувати ті ж індекси, що й для компонентів напружень. Тоді із наведених вище міркувань випливає, що

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\qquad (4.1)$$

Знаючи три відносних видовження в трьох перпендикулярних напрямках і три відносні деформації зсуву, віднесені до тих же напрямків, можна знайти видовження в *будь-якому* напрямку й зміну кута між *будь-*

якими двома напрямками. Шість величин $\varepsilon_x,...,\tau_{yz}$ називаються *компонентами деформації* і утворюють тензор деформацій.

§5. Закон Гука

Лінійні співвідношення між компонентами напружень і компонентами деформацій називають звичайно *законом Гука.* Уявимо собі елементарний прямокутний паралелепіпед із гранями, паралельними координатним осям, підданий дії нормального напруження σ_x, рівномірно розподіленого по двох протилежних гранях, як це має місце в досліді на розтяг. Аж до досягнення межі пропорційності відносне видовження елемента дається формулою

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{5.1}$$

де E - *модуль пружності при розтягу.* Матеріали, використовувані в інженерних конструкціях, мають модулі, дуже великі в порівнянні з допустимими напруженнями, у силу чого відносне подовження, визначене по формулі (5.1), є дуже малою величиною. Наприклад, для конструкційних сталей воно звичайно менше ніж 0,001.

Таке видовження елемента в напрямку осі x супроводжується звуженням у поперечному напрямку (стисненням), обумовленим компонентами деформацій

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \tag{5.2}$$

де ν - константа, названа *коефіцієнтом Пуассона.* Для багатьох матеріалів коефіцієнт Пуассона можна прийняти рівним 0,25. Для конструкційних сталей він звичайно вважається рівним 0,3.

Залежності (5.1-5.2) можна використовувати також у випадку простого стиску. При стиску модуль пружності й коефіцієнт Пуассона зазвичай мають ті ж значення, що й при розтяганні.

Якщо розглядуваний елемент піддається одночасній дії нормальних напружень $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$, рівномірно розподілених по його гранях, то компоненти отримуваних деформацій можна одержати з виразів (5.1-5.2). Здійснюючи накладання компонентів деформацій, викликаних кожним із трьох напружень, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\Big[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\Big],\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\Big[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\Big],\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\Big[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\Big].
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Ці співвідношення підтверджуються численними дослідами.

Надалі ми будемо часто використовувати вище застосований *метод накладення,* або *суперпозицію,* для відшукання повних деформацій і напружень, викликаних декількома силами. Він є законним доти, поки деформації малі, а відповідні їм малі переміщення не впливають істотно на дію зовнішніх сил. У таких випадках ми нехтуємо малими змінами розмірів

деформованого тіла, а також малими переміщеннями точок прикладання зовнішніх сил, і засновуємо наші обчислення на початкових розмірах і початковій формі тіла. Переміщення, що отримуються у результаті, можна знаходити за допомогою суперпозиції у вигляді лінійних функцій зовнішніх зусиль, як це було зроблено при виводі співвідношень (5.3).

Існують, проте, особливі випадки, у яких малими деформаціями не можна зневажати й треба їх ураховувати. Як приклад такого роду можна назвати випадок одночасної дії осьового й поперечного навантаження на тонкий стержень. Самі по собі осьові сили викликають просте розтягання або стиснення, однак якщо вони діють одночасно з поперечним навантаженням, то впливають на згинання стержня. При визначенні деформацій стержня в таких умовах, незважаючи на малість прогинів, потрібно враховувати їхній вплив на момент від зовнішніх сил. Тепер уже повні прогини не є лінійними функціями зусиль і не можуть бути отримані за допомогою простого накладання.

У співвідношеннях (5.3) залежності між видовженнями й напруженнями повністю визначаються двома фізичними константами E і ν. Ті ж константи можна використати й для визначення залежності між деформацією зсуву й дотичним напруженням.

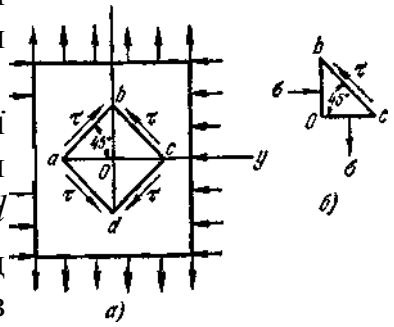


Рис. 5.1

Розглянемо окремий випадок деформації прямокутного паралелепіпеда, коли $\sigma_z = \sigma, \sigma_y = -\sigma, \sigma_x = 0$. Виріжемо елемент *abcd* площинами, паралельними осі x і нахиленими під кутом 45° до осей y і z (рис. 5.1, а). Як випливає з умов рівноваги елемента *Obc* (рис. 5.1, б), нормальні напруження на всіх гранях елемента *abcd* дорівнюють нулю, а дотичні напруження

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma \qquad (5.4)$$

Такий напружений стан називається *чистим зсувом.* Видовження вертикального елемента *Ob* дорівнює скороченню горизонтальних елементів *Oa* і *Oc*, звідки (нехтуючи малими величинами другого порядку) випливає, що довжини відрізків елемента *ab* і *bc* при деформації не змінюються. Кут між гранями *ab* і *bc* змінюється, і відповідну величину деформації зсуву γ можна знайти із трикутника *Obc.* Таким чином, у результаті деформації маємо

$$\frac{Oc}{Ob} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_y}.$$

Підстановка відносних деформацій з рівностей (5.3) дає

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\sigma_y\right] = \frac{(1+\nu)\sigma}{E}, \quad \varepsilon_y = -\frac{(1+\nu)\sigma}{E}.$$

Зауважуючи, що при малих γ

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)-tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1+tg\left(\frac{\pi}{4}\right)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}$$

з урахуванням (5.4) знаходимо

$$\gamma=\frac{2(1+\nu)\sigma}{E}=\frac{2(1+\nu)\tau}{E}. \qquad (5.5)$$

Таким чином, залежність між деформацією зсуву і дотичним напруженням визначається константами E і ν. Часто використовується позначення

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (5.6)$$

З його допомогою рівність (5.5) приймає вид

$$\gamma=\frac{\tau}{G}.$$

Константа G, визначена рівнянням (5.6), називається *модулем пружності при зсуві або модулем зсуву.*

Якщо дотичні напруження діють по всіх гранях елемента, як показано на рис. 3, спотворення кута між двома гранями, що перетинаються, залежить тільки від відповідних компонентів дотичного напруження. Звідси одержуємо

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},\quad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}. \qquad (5.7)$$

Компоненти деформацій, що характеризують видовження (5.3) і деформації (5.7), не залежать друг від друга. Загальний випадок деформації, здійснюваної трьома нормальними й трьома дотичними компонентами напружень, можна одержати за допомогою накладання: на три видовження, обумовлені виразами (5.3), накладаються три деформації зсуву, обумовлені співвідношеннями (5.7).

Рівняння (5.3) і (5.7) визначають компоненти деформацій як функції компонент напружень. Іноді потрібно виразити компоненти напружень як функції компонентів деформацій. Їх можна одержати в такий спосіб. Складаючи рівняння (5.3) і використовуючи позначення

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,\quad \Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z, \qquad (5.8)$$

одержуємо наступну залежність між об'ємним розширенням e і сумою нормальних напружень Θ:

$$e=\frac{1-2\nu}{E}\Theta\ . \qquad (5.9)$$

Для випадку рівномірного гідростатичного тиску з інтенсивністю p маємо

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p$$

Тоді з (5.9) одержуємо

$$e=-\frac{(1-2\nu)p}{E}\ .$$

Ця формула являє собою залежність між відносним об'ємним розширенням e і гідростатичним тиском p. Величина $E/[2(1-2\nu)]$ називається модулем об'ємного розширення.

Використовуючи позначення (5.8) і розв'язуючи рівняння (5.3) відносно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, знайдемо

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x,$$
$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_y, \qquad (5.10)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z.$$

Використовуючи позначення

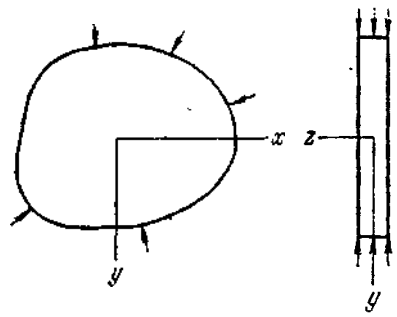
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (5.11)$$

і вираз (5.6), ці формули можна привести до виду

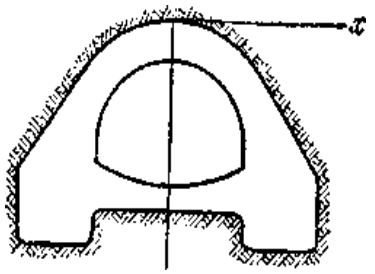
$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z. \qquad (5.12)$$

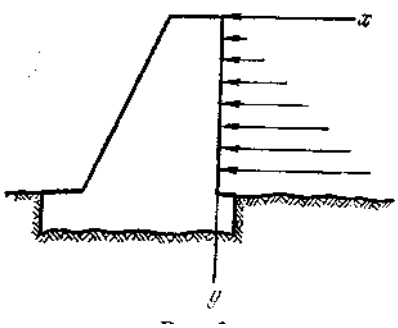
§6. Плоский напружений стан і плоска деформація

Якщо тонка пластинка навантажена зусиллями, прикладеними на її межі паралельно до площини пластинки і рівномірно розподіленими по товщині (рис.), то компоненти напружень $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ на обох поверхнях пластинки дорівнюють нулю, і можна попередньо припустити, що вони дорівнюють нулю й усередині пластинки. Тоді напружений стан буде визначатися тільки компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ і називається *плоским напруженим станом*.



Можна також припустити, що ці три компоненти не залежать від *z*, тобто не міняються по товщині пластинки, а є функціями тільки від *x* і *y*.





Подібні спрощення можливі й в іншому граничному випадку, коли розмір тіла в напрямку осі *z* дуже великий. Якщо довге циліндричне або призматичне тіло навантажується силами, які перпендикулярні до поздовжньої осі тіла й не міняються по його довжині, можна вважати, що всі поперечні перерізи перебувають у однакових умовах. Простіше всього для початку припустити, що кінцеві перерізи обмежені фіксованими гладкими абсолютно твердими площинами, які перешкоджають переміщенням у поздовжньому напрямку. Оскільки немає осьових переміщень на кінцях, а в силу симетрії їх немає й у середньому перерізі, можна

припустити, що те ж саме справедливо й для будь-якого поперечного перерізу.

Існує багато важливих завдань такого роду; наприклад, для підпірної стінки під дією поперечного тиску, трубопроводу або тунелю, циліндричної труби під дією внутрішнього тиску, циліндричного ролика, стиснутого силами в діаметральній площині, як це має місце в роликопідшипнику. У кожному випадку, звичайно, навантаження не повинно змінюватися по довжині тіла. Оскільки в кожному поперечному перерізі умови однакові, досить розглянути тонкий шар між двома перерізуми, відстань між якими дорівнює одиниці. Компоненти переміщень *u* і *v* є функціями *x* і *y,* але не залежать від поздовжньої координати *z.* Оскільки поздовжні переміщення *w* дорівнюють нулю, рівняння (4.1) дають

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{6.1}$$

Повздовжні нормальні напруження σ_z можна виразити через σ_x і σ_y за допомогою закону Гука (5.3). У силу того, що $\varepsilon_z = 0$, одержуємо

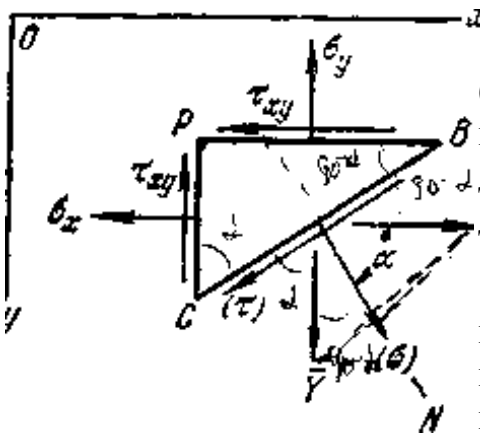
$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{6.2}$$

Ці нормальні напруження діють по всім поперечним перерізум, включаючи кінцеві, де вони являють собою сили, необхідні для підтримки плоскої деформації, і створюються фіксованими гладкими абсолютно твердими площинами.

Відповідно до рівнянь (6.1-2) компоненти напружень τ_{xz} і τ_{yz} дорівнюють нулю, а відповідно до рівняння (б) напруження σ_z можна визначити, знаючи σ_x і σ_y. Отже, задача про плоску деформацію, як і задача про плоский напружений стан, зводиться до визначення компонентів напруг σ_x, σ_y і τ_{xy}, як функцій *x* і *y*.

§7. Напруження в точці

Знаючи компоненти напруг σ_x, σ_y і τ_{xy} у будь-якій точці пластинки в умовах плоского напруженого стану або плоскої деформації, можна знайти з



рівнянь статики напруження на будь-якій похилій відносно осей *x* і *y* площини (площадці), що проходить через цю точку перпендикулярно пластинці. Позначимо через *P* деяку точку у напруженій пластинці й допустимо, що компоненти напруги σ_x, σ_y і τ_{xy} відомі (див. рис.). На малій відстані від *P* проведемо площину BC, паралельну осі *z*, так, щоб ця площина разом з координатними площинами вирізала із пластинки дуже малу трикутну призму *PBC*. Оскільки напруження змінюються по об'єму тіла неперервно, то при зменшенні розмірів вирізаного елемента напруження, що діє на площадці *BC*, буде наближатись до напруження на паралельній площадці, що проходить через точку *P*.

При розгляді умов рівноваги малої трикутної призми об'ємними силами можна знехтувати як величинами вищого порядку малості. Подібним чином, якщо вирізаний елемент дуже малий, можна знехтувати змінами напруг по гранях і припустити, що напруження розподілені рівномірно. Тоді сили, що діють на трикутну призму, можна визначити шляхом множення компонентів напружень на площі граней. Нехай *N* - напрямок нормалі до площини *BC*, кут між нормаллю *N* до площадки *BC* і віссю *x* дорівнює α; тоді косинуси кутів між нормаллю *N* і осями *x* і *y* позначаються в такий спосіб:

$$\cos(N,x)=l=\cos\alpha,\ \cos(N,y)=m=\sin\alpha.$$

Тоді, якщо через S позначити площу грані *BC* елемента, то площі двох інших граней будуть Sl і Sm.

Якщо позначити через $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ компоненти напружень, що діють на грань *BC*, то умови рівноваги призматичного елемента приводять до наступних співвідношень:

$$\bar{X}=l\sigma_x+m\tau_{xy},\ \bar{Y}=m\sigma_y+l\tau_{xy}\ . \qquad (7.1)$$

Таким чином, компоненти напружень на будь-якій площі, обумовленої направляючими косинусами *l* і *m*, можна легко знайти зі співвідношень (7.1), якщо відомі три компоненти напружень σ_x, σ_y і τ_{xy} у точці *P*. Згідно (7.1), нормальна і дотична компонента напружень на площадці *BP* дорівнюють:

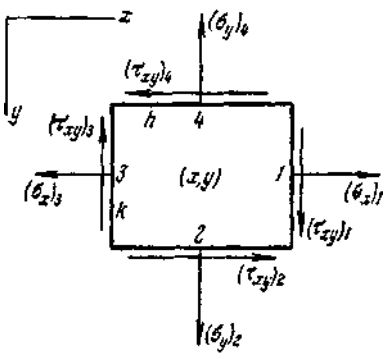
$$\begin{aligned}\sigma&=\bar{X}\cos\alpha+\bar{Y}\sin\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\ ,\\ \tau&=\bar{Y}\cos\alpha-\bar{X}\sin\alpha=\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\sigma_y-\sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned} \qquad (7.2)$$

Очевидно, кут α можна вибрати таким чином, щоб дотичне напруження τ на площадці BC стало рівним нулю. Для цього випадку одержуємо

$$\begin{aligned}&\tau=\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\sigma_y-\sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha=0\\ &\Rightarrow\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y-\sigma_x}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}tg2\alpha\end{aligned}\ . \qquad (7.3)$$

Із цього рівняння можна знайти два взаємно перпендикулярних напрямки, для яких дотичні напруження на відповідних площадках дорівнюють нулю. Ці напрямки називаються головними, а відповідні нормальні напруження - головними нормальними напруженнями. Якщо за головні напрямки прийняти напрямки осей *x* і *y*, то компонента $\tau_{xy}=0$ і формули (7.3) приймають більш простий вид

$$\sigma=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha\ ,\ \tau=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin2\alpha. \qquad (7.4)$$



§8. Диференціальні рівняння рівноваги

Розглянемо рівновагу малого прямокутного паралелепіпеда з розмірами уздовж осей *x* і *y* - *h*, *k* і одиничної товщини (рис.). Напруження, що діють на площадках *1, 2, 3, 4* у позитивних напрямках показані на малюнку. З урахуванням зміни напружень у просторі значення, наприклад σ_x, для граней *1* і *3* не точно дорівнюють один одному. Символи σ_x, σ_y і τ_{xy}

відносяться до точки (x, y) - центру прямокутника на малюнку. Значення напружень посередині граней будуть позначатися через $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_y)_1$ і т.д. Оскільки грані малі, діючі на них зусилля отримаємо множенням напружень на площі граней, по яких вони діють.

Об'ємна сила, якою ми нехтували при розгляді рівноваги трикутної призми у §7 як величиною вищого порядку малості, тепер повинна враховуватися, оскільки вона має той же порядок, що й члени, що описують досліджувані зміни компонентів напружень. Якщо позначити через *X, Y* компоненти об'ємної сили, то рівняння рівноваги сил, що діють у напрямку осі *x*, має вигляд $(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0$, або, після ділення на *hk*,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0.$$

Якщо тепер зменшувати розміри розглянутого елементарного паралелепіпеда, поклавши $h \to 0$, $k \to 0$, то, відповідно до визначення похідної, межі першого і другого виразів будуть дорівнювати $\partial\sigma_x/\partial x$ і $\partial\tau_{xy}/\partial x$ відповідно. Подібним же чином вийде рівняння рівноваги для сил, що діють у напрямку осі *y*. Таким чином, будемо мати

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \tag{8.1}$$

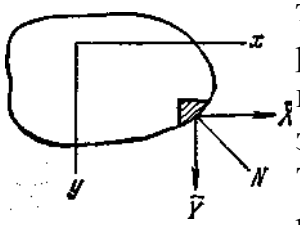
Це два диференціальних рівняння рівноваги для двовимірної задачі.

У багатьох практичних додатках єдиним видом об'ємних сил є вага тіла. Тоді, направляючи вісь *y* вниз і позначаючи через ρ масу, віднесену до одиниці об'єму тіла, одержимо рівняння рівноваги у вигляді

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0. \tag{8.2}$$

§9. Граничні умови

Рівняння (8.1) або (8.2) повинні задовольнятися у всіх точках об'єму тіла. Компоненти напружень міняються по об'єму розглянутої пластинки. При досягненні її границі вони повинні бути такими, щоб перебувати в рівновазі із зовнішніми силами, прикладеними на границі пластинки. Тому зовнішні сили можна розглядати як продовження розподілу внутрішніх напружень. Умови рівноваги на границі можна одержати з рівнянь (7.1). Розглянемо малу трикутну призму PBC (див. рис. **§7**), таку, що її сторона *BC* збігається із границею пластинки, як показано на даному малюнку. Позначаючи через $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ компоненти поверхневих сил, віднесених до одиниці площі в цій точці границі, одержуємо



$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \; \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy} \; . \tag{9.1}$$

де *l* і *m* - направляючі косинуси нормалі *N* до границі.

В окремому випадку розгляду рівноваги прямокутної пластинки координатні осі звичайно приймаються паралельними сторонам пластинки і

граничні умови (9.1) можна спростити. Нехай, наприклад, одна зі сторін пластинки паралельна осі *x*, тоді нормаль *N* на цій частині границі буде паралельна осі *y*; звідси $l=0$ і $m=1$. Рівняння (9.1) тоді приймають вид $\overline{X}=\pm\tau_{xy}$, $\overline{Y}=\pm\sigma_y$, причому позитивний знак у цих формулах береться в тому випадку, коли нормаль *N* спрямована убік позитивних значень *y*; якщо ж нормаль спрямована в протилежну сторону, то береться негативний знак. Із цих формул видно, що компоненти напруги на границі дорівнюють компонентам поверхневих зусиль, віднесених до одиниці площі границі.

§10. Рівняння сумісності

Визначення напруженого стану в тілі, що перебуває під дією заданих зовнішніх сил, є однією з основних завдань теорії пружності. У двовимірному випадку необхідно розв'язати диференціальні рівняння рівноваги (8.1), і цей розв'язок повинен бути таким, щоб задовольнялися граничні умови (9.1). Цих рівнянь, виведених із застосуванням статичних умов рівноваги для трьох компонент напружень σ_x, σ_y і τ_{xy}, недостатньо для визначення зазначених компонентів. Задача є статично невизначеною: щоб одержати її розв'язок, слід розглянути пружну деформацію тіла.

Математичне формулювання умов сумісності розподілу напружень з існуванням неперервних функцій *u*, *v*, *w*, що визначають деформацію, буде отримана з рівнянь (4.1). Для двовимірних задач ми розглянемо три компоненти деформації, а саме

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10.1}$$

Ці три компоненти деформації виражаються через дві функції *u* і *v*. Отже, вони не можуть вибиратися довільно і повинно існувати деяке співвідношення між компонентами деформації; його можна легко одержати з (10.1). Диференціюючи перше з рівнянь (10.1) двічі по *y*, друге двічі по *x*, а третє - один раз по *x* і другий раз по *y*, знаходимо

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}. \tag{10.2}$$

Це диференціальне рівняння, яке називається умовою сумісності, повинно задовольнятися при підстановці компонентів деформації, щоб забезпечити існування функцій *u* і *v*, пов'язаних з компонентами деформації співвідношеннями (10.1). Використовуючи закон Гука (5.3), можна, перетворивши умову (10.2), одержати співвідношення, якому повинні задовольняти компоненти напружень.

У випадку плоского напруженого стану вирази (5.3) і (5.7) приймають вигляд

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\sigma_y\right],\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\sigma_x\right], \tag{10.3}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \tag{10.4}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (10.2), знаходимо

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (10.5)$$

Рівняння (10.5) можна переписати в іншій формі, якщо скористатися рівняннями рівноваги. Для окремого випадку, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла, диференціюючи перше з рівнянь (8.2) по x, а друге по y, і складаючи їх, одержуємо $2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial^2 x}$. Підставляючи цей результат у рівняння (10.5), одержуємо умову сумісності в напруженнях у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \qquad (10.6)$$

У загальному випадку, використовуючи в такий же спосіб рівняння рівноваги (8.1), знаходимо

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \qquad (10.7)$$

У випадку плоскої деформації маємо $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$. Використовуючи це співвідношення, із закону Гука (5.3) знаходимо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\right],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\right], \qquad (10.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \qquad (10.9)$$

Підставляючи знайдені вирази в рівняння (10.2) і використовуючи, як і раніше, рівняння рівноваги (8.2), ми бачимо, що рівняння сумісності (10.6) зберігає свій вид і для плоскої деформації. Для загального випадку об'ємних сил з рівнянь (10.2) і (8.1) одержуємо умову сумісності в наступній формі:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (10.10)$$

Рівняння рівноваги (8.1) або (8.2) разом із граничними умовами (9.1) і рівнянням сумісності (в одній з наведених вище форм) дають нам систему рівнянь, що звичайно достатня для повного визначення розподілу напружень у двовимірній задачі. Цікаво відзначити, що у випадку постійних об'ємних сил рівняння, що визначають розподіл напружень, не містять пружних констант матеріалу. Отже, розподіл напруг у цьому випадку буде тим самим для всіх ізотропних матеріалів, якщо ці рівняння достатні для повного визначення напруг. Даний висновок має практичне значення: для прозорих матеріалів, таких, як скло або целулоїд, можна визначати напруги оптичним методом, використовуючи поляризоване світло. З вищенаведених міркувань ясно, що експериментальні результати, отримані для якого-небудь прозорого матеріалу, у більшості випадків можна безпосередньо застосовувати й до будь-яких інших матеріалів, наприклад до сталі.

Слід також зазначити, що у випадку постійних об'ємних сил рівняння сумісності (10.6) справедливе як для плоского напруженого стану, так і для плоскої деформації. Отже, в обох випадках розподіл напружень буде однаковим, якщо форми границь і прикладені до них зовнішні зусилля збігаються.

§11. Принцип Сен-Венана

Розв’язування задач теорії пружності зводиться до деяких типових крайових задач для систем рівнянь із частинними похідними. Фактична побудова розв’язків цих рівнянь із заданими початковими і граничними умовами навіть при сучасному рівні розвитку математичних методів і обчислювальної техніки не завжди виявляється здійсненною. Тому представляється доцільним розглянути питання про можливості такої зміни крайових умов, щоб модифікована задача виявилася більш доступною для розв’язання, ніж вихідна, а розходженням в результатах можна було б знехтувати (принаймні в значній частині області, розміри якої бажано оцінити). Необхідність такого підходу диктується ще й тим, що в ряді задач відсутня докладна інформація про граничні умови (наприклад, на бічних поверхнях тонких пластинок), а задані лише інтегральні характеристики.

Первісне формулювання теореми, що дозволяє видозмінювати крайові умови, було запропоновано у вигляді принципу Сен-Венаном і полягало в наступному: «Спосіб прикладання і розподіли сил по кінцях призм байдужий для ефектів, викликаних на решті довжини, так що завжди можливо з достатнім ступенем наближення замінити прикладені сили статично еквівалентними силами, тобто силами, що мають такий же повний момент і таку ж рівнодійну, але з розподілом точно таким, який вимагають формули розтягу, згину і кручення для того, щоб стати зовсім точними».

Наприклад, у задачах кручення і згинання стержнів самі граничні умови на торцях заздалегідь невідомі й визначаються лише в ході розв’язання відповідних двовимірних задач, однак зроблене на основі принципу Сен-Венана припущення дає можливість перейти від тривимірної (часом змішаної) до двовимірної задачі. Таким чином, при розв’язуванні задач кручення і згинання стержнів потрібне знання лише глобальних характеристик граничних умов на торцях (головний вектор зусиль і головний вектор момент).

Сен-Венан стверджував, що отриманий на основі двовимірної теорії розв’язок виявляється близьким до точного у всій області, крім малих ділянок, що примикають до торців. Тому такий розв’язок, будучи строгим розв’язком для стержнів довільної довжини, виявляється практично корисним для різних стержнів уже при відсутності яких-небудь обмежень на крайові умови, причому з розгляду випадають ділянки, що примикають до торців довжиною порядку двох-трьох діаметрів. Тому має сенс говорити лише про довгі стержні, тому що для коротких стержнів зона вірогідності розв’язків може бути відсутньою. На підтвердження своєї гіпотези Сен-Венан посилався лише на експеримент, однак в окремих випадках можливо теоретичне обґрунтування цього принципу.

Принцип Сен-Венана, крім задач кручення і згинання, використовується також при побудові теорії для плоского напруженого стану, коли для пластинки розподіл навантаження по бічній поверхні не враховується, а зводиться до результуючих характеристик. Інший підхід має місце в задачах згинання пластинок (і, більше того, у теорії оболонок). Тут ігнорування розподілу напружень є наслідком гіпотез, покладених в основу тієї або іншої теорії. У цьому випадку крайові умови в напруженнях зводяться до згинальних моментів, крутячого моменту й перерізуючи сил.

РОЗДІЛ 2. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ

§12. Функція напружень Ері

Ми вже показали, що розв'язання двовимірних задач зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги разом з умовою сумісності і граничними умовами. Почнемо з випадку, коли єдиним видом об'ємних сил є сила тяжіння. Тоді повинні задовольнятися наступні рівняння (див. рівняння (8.2) і (10.6)):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\rho g=0, \tag{12.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0. \tag{12.2}$$

До даних рівнянь слід додати граничні умови (9.1). Звичайний метод розв'язання цих рівнянь полягає у введенні деякої нової функції, так званої функції напружень. Як легко перевірити, рівняння (12.1) задовольняються, якщо ввести деяку функцію φ від x і y, яка зв'язана з компонентами напружень наступними залежностями:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\rho g y,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\rho g y,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \tag{12.3}$$

У такий спосіб можна одержати безліч розв'язків рівнянь рівноваги (12.1). Дійсним розв'язком задачі буде той з них, який задовольняє також рівнянню сумісності (12.2). Підставляючи вирази (12.3) для компонентів напружень в рівняння (12.2), знаходимо, що функція напружень φ повинна задовольняти рівнянню:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0. \tag{12.4}$$

Таким чином, розв'язок двовимірної задачі, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла, зводиться до відшукання розв'язку рівняння (12.4), що задовольняє граничним умовам (9.1).

В двовимірній декартовій системі координат сума других похідних $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta$ позначає оператор Лапласа, а функції, що задовольняють двовимірному рівнянню Лапласа $\Delta f=0$, називають гармонічними. Відповідно, рівняння (12.4) називається бігармонічним, а функція напружень φ – бігармонічною:

$$\Delta\Delta\varphi=0,\ \text{або}\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0. \tag{12.5}$$

Для розв'язування бігармонічних рівнянь типу (12.5) використовуються різноманітні математичні методи, такі як розділення змінних, теорія функцій комплексних змінних та інші.

§13. Розв'язки у поліномах

В §12 було показано, що розв'язування двовимірних задач теорії пружності, коли об'ємні сили відсутні або постійні, зводиться до інтегрування диференціального рівняння

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \qquad (13.1)$$

при граничних умовах (9.1). Для випадку довгої прямокутної смуги становлять інтерес розв'язки рівняння (13.1) у формі поліномів. Вибираючи поліноми різних ступенів і підбираючи для них відповідні коефіцієнти, можна вирішити багато практично важливих задач.

Почнемо з полінома другого ступеня

$$\varphi_2=\frac{a_2}{2}x^2+b_2xy+\frac{c_2}{2}y^2, \qquad (13.2)$$

який, очевидно, задовольняє рівнянню (13.1). З рівнянь (12.3), покладаючи $\rho g=0$, знаходимо

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=c_2,\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}=a_2,\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}=-b_2. \qquad (13.3)$$

Всі три компоненти напруження постійні по всьому об'єму тіла; таким чином, функції напружень (13.2) відповідає випадок комбінованого однорідного розтягання або стискання у двох взаємно перпендикулярних напрямках і однорідному зсуві. Як ми вже відзначали у §9, на границі тіла зусилля повинні дорівнювати внутрішнім напруженням; у випадку прямокутної пластинки зі сторонами, паралельними координатним осям, ці зусилля показані на рис. 13.1.

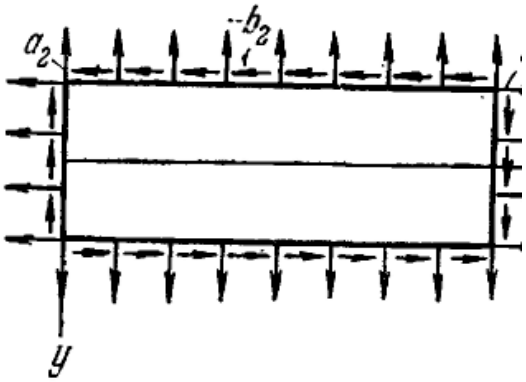


Рис. 13.1

Розглянемо тепер функцію напружень у вигляді полінома третього ступеня:

$$\varphi_3=\frac{a_3}{3\cdot 2}x^3+\frac{b_2}{2}x^2y+\frac{c_3}{2}xy^2+\frac{d_3}{3\cdot 2}y^3. \qquad (13.4)$$

Ця функція також задовольняє рівнянню (13.1). Використовуючи вираз (12.3) і покладаючи $\rho g=0$, знаходимо

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}=c_3x+d_3y,\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}=a_3x+b_3y,\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}=-b_3x-c_3y.$$

Для прямокутної пластинки, показаної на рис. 13.2, поклавши всі коефіцієнти, крім d_3, рівними нулю, одержуємо напружений стан чистого

згину. Якщо лише один коефіцієнт a_3 відмінний від нуля, одержуємо випадок чистого згину під дією нормальних напружень, прикладених до сторін пластинки $y = \pm c$. Якщо вважати відмінними від нуля коефіцієнти b_3 або c_3, то знаходимо, що по краях пластинки діють не тільки нормальні, але також і дотичні напруження. Рис. 13.3 показує, наприклад, випадок, у якому у функції (13.4) дорівнюють нулю всі коефіцієнти, крім b_3. Уздовж країв $y = \pm c$ маємо рівномірно розподілені розтягувальні і стискувальні напруження, а також дотичні напруження, пропорційні координаті *x*. На краю $x = l$ діє тільки одне постійне дотичне напруження $-b_3 l$, а на краю $x = 0$ напруження відсутні. Аналогічний розподіл напруг виходить у тому випадку, якщо прийняти відмінним від нуля коефіцієнт c_3.

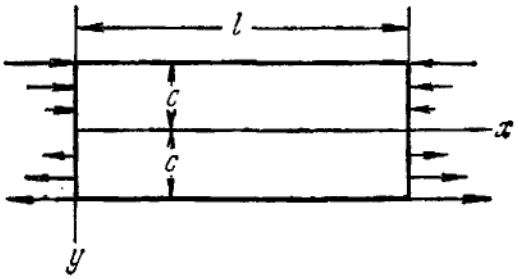


Рис. 13.2.

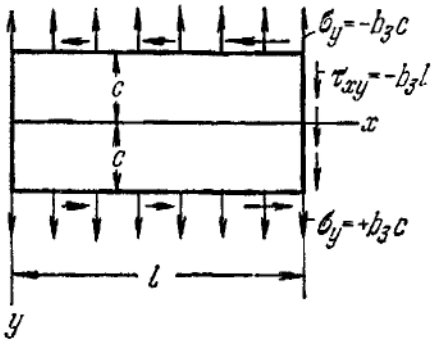


Рис. 13.3.

Взявши функцію напружень у вигляді поліномів другого або третього ступеня, ми не накладаємо ніяких обмежень на вибір величин коефіцієнтів, оскільки рівняння (13.1) задовольняється при будь-яких їхніх значеннях. У випадку поліномів більш високих ступенів рівняння (13.1) задовольняється тільки в тому випадку, якщо між коефіцієнтами виконуються відповідні умови зв'язку. Візьмемо, наприклад, функцію напруг у вигляді полінома четвертого ступеня

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4\cdot 3}x^4 + \frac{b_4}{3\cdot 2}x^3 y + \frac{c_4}{2}x^2 y^2 + \frac{d_4}{3\cdot 2}xy^3 + \frac{e_4}{4\cdot 3}y^4. \qquad (13.5)$$

Підставляючи вираз (13.5) у рівняння (13.1), знаходимо, що воно задовольняється лише в тому випадку, коли $e_4 = -(2c_4 + a_4)$.

Компоненти напружень в цьому випадку виражаються формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4)y^2,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2}x^2 - 2c_4 xy - \frac{d_4}{2}y^2.$$

Коефіцієнти $a_4, ..., d_4$ у цих виразах довільні; підбираючи їх відповідним чином, можна одержати різні умови навантаження прямокутної пластинки. Наприклад, приймаючи всі коефіцієнти, за винятком d_4, рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_4 xy,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2 \qquad (13.6)$$

Якщо вважати коефіцієнт d_4 позитивним, то сили, що діють на прямокутну пластинку й викликані напруження (13.6), мають вигляд, представлений на рис. 13.4. По поздовжніх сторонах пластинки $y = \pm c$ діють рівномірно розподілені дотичні зусилля, по кінцях - дотичні зусилля, розподілені за параболічним законом. Дотичні зусилля, що діють по контуру пластинки, приводяться до пари сил з моментом (товщина пластинки приймається рівною одиниці)

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} 2c - \frac{1}{3}\frac{d_4 c^2}{2} 2cl = \frac{2}{3} d_4 c^3 l.$$

Ця пара зрівноважується іншою парою, утвореною нормальними зусиллями, що діють на краю пластинки $x = l$.

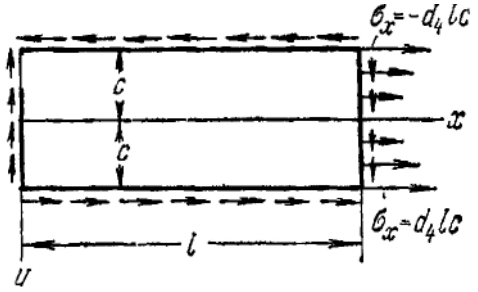


Рис. 13.4.

Розглянемо функцію напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5\cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4\cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3\cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3\cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4\cdot 3} x y^4 + \frac{f_5}{5\cdot 4} y^5. \qquad (13.7)$$

Підстановка виразу (13.7) у рівняння (13.1) показує, що це рівняння задовольняється, якщо

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5),\ \ f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5).$$

Відповідні компоненти напружень дорівнюють

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) x y^2 - \frac{1}{3}(b_5 + 2d_5) y^3,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 x y^2 + \frac{d_5}{3} y^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 x y^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5) y^3.$$

Коефіцієнти $a_5, ..., d_5$ знову довільні, і, вибираючи їх, можна одержати розв'язки для різних умов навантаження пластинки. Приймаючи, наприклад, всі коефіцієнти, крім d_5, рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3),\ \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3,\ \tau_{xy} = -d_5 x y^2. \qquad (13.8)$$

При цьому нормальні зусилля рівномірно розподіляються уздовж поздовжнього краю пластинки (рис. 13.5, *а*). Уздовж краю $x = l$ нормальні зусилля складаються із зусиль, розподілених по лінійному закону, і зусиль,

розподілених за законом кубічної параболи. Дотичні напруження на поздовжніх краях пластинки пропорційні *x,* а уздовж краю $x = l$ розподілені за параболічним законом. Розподіл цих напруг по контурі пластинки показаний на рис. 13.5, *б.*

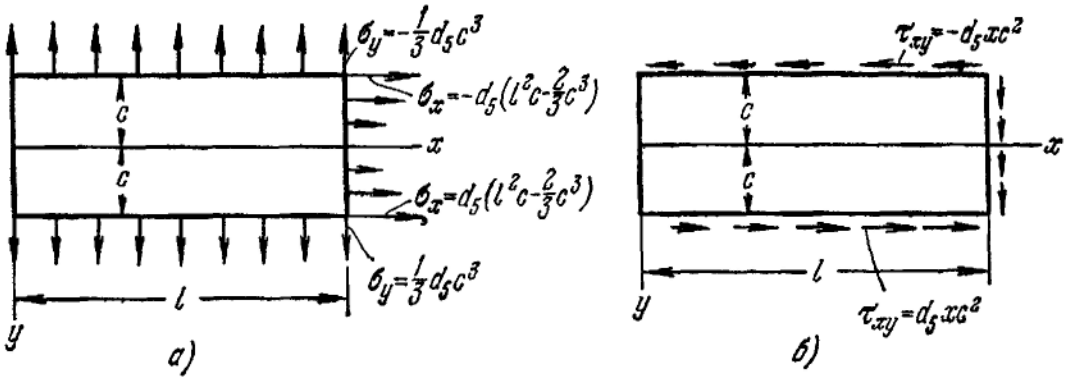


Рис. 13.5

Оскільки рівняння (13.1) являє собою лінійне диференціальне рівняння, то сума декількох розв'язків цього рівняння також буде його розв'язком. Тому можна робити накладання елементарних розв'язків, отриманих у цьому параграфі, і знаходити нові розв'язки, що представляють практичний інтерес. Нижче буде розглянуто кілька прикладів використання методу накладання.

§14. Визначення переміщень

Якщо з попередніх рівнянь §13 знайдені компоненти напружень, то компоненти деформації можна визначити, використовуючи закон Гука, виражений рівняннями (5.3) і (5.7). Тоді переміщення *u* і *v* можна одержати з рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}. \qquad (14.1)$$

Інтегрування цих рівнянь у кожному окремому випадку не представляє ніяких труднощів, і ми розглянемо кілька прикладів їхнього застосування. Відразу ж можна бачити, що компоненти деформації, виражені формулами (14.1), не міняються, якщо додати до *u* і *v* лінійні функції

$$u_1 = a + by, \ v_1 = c - bx \qquad (14.2)$$

у яких *a, b* і *c* - сталі. Це означає, що переміщення не визначаються повністю напруженнями й деформаціями. На переміщення, викликані внутрішніми деформаціями тіла, можна накласти його переміщення як абсолютно твердого тіла. Сталі *a* і *c* у рівняннях (14.2) визначають поступальний рух тіла, а стала *b* - малий кут обертання абсолютно твердого тіла щодо осі *z.*

Раніше було показано (див. §10), що у випадку постійних об'ємних сил розподіли напружень як для плоского напруженого стану, так і для плоскої деформації є однаковими. Однак переміщення для цих двох задач різні, тому що у випадку плоского напруженого стану компоненти деформації, що входять у рівняння (14.1), визначаються формулами

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \ \ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \ \ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

тоді як для випадку плоскої деформації для компонентів деформації маємо формули

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

Легко перевірити, що ці рівняння можна одержати з попередньої системи рівнянь для плоского напруженого стану, якщо в останніх замінити E на $E/(1-\nu^2)$ і ν на $\nu/(1-\nu)$. Така заміна не міняє виразу для G, що зберігає вид $E/[2(1+\nu)]$. Метод інтегрування рівнянь (14.1) буде даний нижче при розгляді конкретних задач.

§15. Згин консолі, навантаженої на кінці

Розглянемо консоль, що має вузький прямокутний поперечний переріз одиничної товщини й згинається силою P, прикладеною на кінці (рис. 15.1).

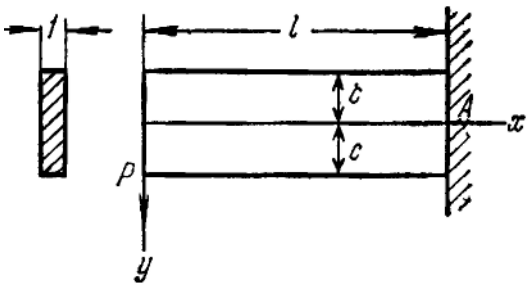


Рис. 15.1

Верхня й нижня грані консолі вільні від навантаження, на торці $x = 0$ розподілені дотичні зусилля, що мають результуючу P. Цим умовам навантаження можна задовольнити, вибравши належну комбінацію напруг чистого зсуву з напруженнями, що даються формулами (13.6), показаними на рис. 13.4.

Накладаючи стан чистого зсуву $\tau_{xy} = -b_2$ на напружений стан, обумовлений формулами (13.6), одержуємо

$$\sigma_x = d_4 xy,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2}y^2. \qquad (15.1)$$

Щоб поздовжні краї $y = \pm c$ консолі були вільні від зусиль, необхідно прийняти $(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2}c^2 = 0$, звідки $d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}$

Для задоволення умови на навантаженому кінці консолі, сума дотичних зусиль, розподілених по торцю, повинна дорівнювати P. Звідси

$$-\int_{-c}^{c} \tau_{xy}dy = \int_{-c}^{c} (b_2 - \frac{b_2}{c^2}y^2)dy = P.$$

(Знак мінус перед інтегралом стоїть відповідно до правила знаків для дотичних напружень. Напруження τ_{xy} на кінці $x = 0$ позитивне, якщо воно спрямовано вгору.) Із цієї залежності отримуємо

$$b_2 = \frac{3}{4}\frac{P}{c}.$$

Підставляючи знайдені вирази для коефіцієнтів d_4 і b_2 у рівняння (15.1), одержимо

$$\sigma_x = -\frac{3}{2}\frac{P}{c^3}xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3}{4}\frac{P}{c}(1-\frac{y^2}{c^2}).$$

Зауважуючи, що $2c^3/3$ - це момент інерції I поперечного перерізу консолі, одержуємо

$$\sigma_x = -\frac{P}{I}xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2). \qquad (15.2)$$

Цей розв'язок повністю збігається з елементарним розв'язком, що дається в курсах опору матеріалів. Варто відмітити, що цей розв'язок є точним лише в тому випадку, коли дотичні зусилля на кінці розподіляються по тому ж параболічному закону, що й дотичні напруження τ_{xy} та інтенсивність нормальної сили пропорційна y. Якщо зусилля на кінці розподіляються іншим способом, розподіл напруг (15.2) не є точним розв'язком для області поблизу кінця консолі, однак у силу принципу Сен-Венана воно може вважатися задовільним для поперечних перерізів, досить віддалених від цього кінця.

Розглянемо тепер переміщення, що відповідають напругам (15.2). Застосовуючи закон Гука, знаходимо

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI}xy, \qquad (15.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2JG}(c^2 - y^2). \qquad (15.4)$$

Процедура визначення компонент переміщення u і v полягає в інтегруванні рівнянь (15.3) і (15.4). Інтегруючи рівняння (3), знаходимо

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x),$$

де $f(y)$ і $f_1(x)$ - невідомі функції, з яких одна залежить тільки від y, інша - тільки від x. Підставляючи ці значення u і v у рівняння (15.4), одержуємо

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2).$$

У цьому рівнянні деякі члени є функціями тільки від x, а тільки від y, один з членів не залежить ні від x, ні від y. Позначимо ці групи членів відповідно через $F(x)$, $G(y)$, K, так що

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \; G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{\nu Py^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG}, \; K = -\frac{Pc^2}{2IG}.$$

Тепер розглянуте рівняння можна переписати у вигляді

$$F(x) + G(y) = K.$$

Із цього співвідношення випливає, що функція $F(x)$ тотожно дорівнює деякій сталій d, а функція $G(y)$ – деякій сталій e. У протилежному випадку функції $F(x)$ і $G(y)$ змінювалися б залежно від x і y, і при зміні однієї тільки

змінної x або однієї тільки змінної y рівність обов'язково б порушувалася. Таким чином,

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG} \tag{15.5}$$

і

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d\,,\ G(y) = \frac{df(y)}{dy} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e\,.$$

Отже, функції $f(y)$ і $f_1(x)$ мають вигляд

$$f(y) = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g\,,\ f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h\,. \tag{15.6}$$

Підставляючи їх у вираження для u і v, знаходимо

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g,\ v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h, \tag{15.7}$$

Тепер сталі d, e, g, h можна визначити з рівняння (15.5) і із трьох умов закріплення, які необхідні, щоб перешкодити руху балки в площині xOy як абсолютно твердого тіла. Допустимо, що точка A, що є центром ваги кінцевого поперечного перерізу, фіксована. Тоді при $x = l$, $y = 0$ компоненти переміщень u і v дорівнюють нулю і з рівнянь (15.7) випливає, що

$$g = 0,\ h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl.$$

Рівняння вигнутої осі консолі отримується при підстановці $y = 0$ у друге рівняння (15.7). Звідси

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l - x). \tag{15.8}$$

Для визначення сталої d в цьому рівнянні нам потрібно скористатися третьою умовою закріплення, яка виключає можливість обертання балки в площині x відносно фіксованої точки A. Цю умову можна реалізувати декількома способами. Розглянемо два випадки.

1) Елемент осі балки на кінці A зафіксований. Тоді умова закріплення має вигляд

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \tag{15.9}$$

2) Вертикальний елемент поперечного перерізу в точці A зафіксований. Тоді умова закріплення приймає вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \tag{15.10}$$

У першому випадку з рівняння (15.8) одержуємо

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI},$$

а з рівняння (15.5) треба $e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$.

Підставляючи знайдені сталі в рівняння (15.7), знаходимо

$$u = -\frac{Px^2 y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^2}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}\right) y,$$
$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2 x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \qquad (15.11)$$

Рівняння вигнутої осі балки має вигляд

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2 x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \qquad (15.12)$$

Воно дає значення прогину для навантаженого кінця ($x = 0$), рівне $\frac{Pl^3}{3EI}$. Це значення збігається зі значенням, що звичайно отримується в елементарних курсах опору матеріалів.

Щоб проілюструвати викривлення поперечного перерізу, здійснюване дотичними напруженнями, розглянемо переміщення u на закріпленому кінці ($x = l$). Для цього кінця з рівнянь (15.11) маємо

$$(u)_{x=l} = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} - \frac{Pc^2 y}{2IG},$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} = -\frac{\nu Py^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} - \frac{Pc^2}{2IG}, \qquad (15.13)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3}{4}\frac{P}{cG}.$$

Форма поперечного перерізу після його перекручування показана на рис. 15.2, *а*. Під дією дотичного напруження $\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c}$ у точці A елемент поперечного перерізу повертається навколо точки A в площині xOy на кут $\frac{3}{4}\frac{P}{cG}$ за годинниковою стрілкою.

Якщо замість того, щоб фіксувати горизонтальний елемент осі, зафіксувати вертикальний елемент поперечного перерізу в точці A (рис. 15.2,б), то з умови (15.10) і першого з рівнянь (15.7) одержуємо $e = \frac{Pl^2}{2EI}$, а з рівняння (15.5) знаходимо

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}. \qquad (15.14)$$

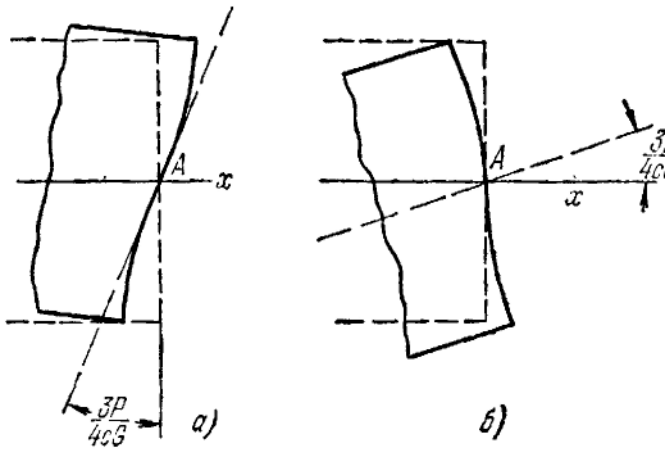


Рис. 15.2.

Підставляючи вираз (15.14) у друге з рівнянь (15.7), маємо

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x). \qquad (15.15)$$

Порівнюючи цю залежність із рівнянням (15.12), можна зробити висновок, що через поворот осі в точці A (рис. 15.2, б) вертикальні переміщення осі консолі збільшуються на величину

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x).$$

Це одна з можливих кількісних оцінок так званого *впливу поперечної сили* на прогини балки. На практиці на закріпленому кінці ми маємо умови, відмінні від показаних на рис. 15.2. Фіксований перетин звичайно не може спотворюватися, і розподіл зусиль на закріпленому кінці консолі відрізняється від того, яке дається рівняннями (15.2). Однак розв'язок (15.2) дає задовільні результати для порівняно довгих консолей на значній віддалі від кінців.

§16. Вигин балки рівномірним навантаженням

Нехай балка вузького прямокутного поперечного перерізу одиничної ширини, сперта на кінцях, згинається рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q, як показано на рис. 16.1. Умови на верхній і нижній гранях балки мають вигляд

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0,\ (\sigma_y)_{y=+c} = 0,\ (\sigma_y)_{y=-c} = -q. \qquad (16.1)$$

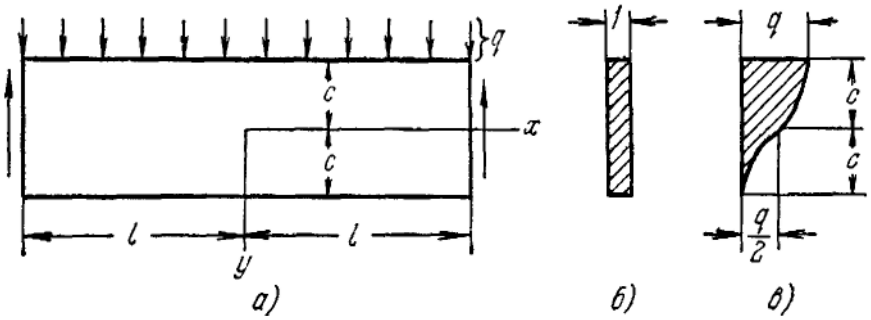


Рис. 16.1

Умови на кінцях $x = \pm l$ представляються у формі

$$\int_{-c}^{c} \tau_{xy}dy = \mp ql,\ \int_{-c}^{c} \sigma_x dy = 0,\ \int_{-c}^{c} \sigma_x y dy = 0. \qquad (16.2)$$

Останні два з рівнянь (16.2) виражають той факт, що на кінцях балки відсутні поздовжні зусилля й згинальні моменти.

Всі умови (16.1) і (16.2) можна задовольнити, комбінуючи деякі розв'язки у формі поліномів, отримані в §13. Почнемо з розв'язку (13.8), який ілюструється рис. 13.5. Щоб зняти розтягувальні напруження вздовж краю $y=c$ і дотичні напруження уздовж країв $y=\pm c$, накладемо на тіло просте стискання $\sigma_y=a_2$ з розв'язку (13.2), і напруження $\sigma_y=b_3y$ і $\tau_{xy}=-b_3x$, показані на рис. 13.3. Таким шляхом знаходимо

$$\sigma_x=d_5(x^2y-\frac{2}{3}y^3),\ \sigma_y=\frac{1}{3}d_5y^3+b_3y+a_2,\ \tau_{xy}=-d_5xy^2-b_3x. \qquad (16.3)$$

З умов (16.1) одержуємо

$$-d_5c^2-b_3=0,\ \frac{1}{3}d_5c^3+b_3c+a_2=0,\ -\frac{1}{3}d_5c^3-b_3c+a_2=-q,$$

Звідки

$$a_2=-\frac{q}{2},\ b_3=\frac{3}{4}\frac{q}{c},\ d_5=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (16.3) і зауважуючи, що вираз $2c^3/3$ дорівнює моменту інерції I прямокутного поперечного перерізу одиничної товщини, знаходимо

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2y-\frac{2}{3}y^3)=-\frac{q}{2I}(x^2y-\frac{2}{3}y^3),\\
\sigma_y&=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(\frac{1}{3}y^3-c^2y+\frac{2}{3}c^3\right)=-\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3-c^2y+\frac{2}{3}c^3\right), \qquad (16.4)\\
\tau_{xy}&=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(c^2-y^2\right)x=-\frac{q}{2I}\left(c^2-y^2\right)x.
\end{aligned}$$

Легко перевірити, що ці компоненти напружень задовольняють не тільки умовам (16.1) на поздовжніх краях, але також і двом першим умовам (16.2) на кінцях. Для того щоб оберталися в нуль згинальні моменти на кінцях балки, накладемо на розв'язок (16.4) стан чистого згину з напруженнями $\sigma_x=d_3y$, $\sigma_y=\tau_{xy}=0$, показаними на рис. 15.2, і визначимо сталу d_3 з умови, що при $x=\pm l$

$$\int_{-c}^{c}\sigma_x y\,dy=\int_{-c}^{c}\left[-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(l^2y-\frac{2}{3}y^3)+d_3y\right]y\,dy=0.$$

Звідси

$$d_3=\frac{3}{4}\frac{q}{c}(\frac{l^2}{c^2}-\frac{2}{5}).$$

Остаточно одержуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(x^2y-\frac{2}{3}y^3)+\frac{3}{4}\frac{q}{c}(\frac{l^2}{c^2}-\frac{2}{5})y=\\
&=\frac{q}{2I}(l^2-x^2)y+\frac{q}{2I}(\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}c^2y)
\end{aligned} \qquad (16.5)$$

Перший член у цьому виразі представляє напруження, що дає елементарна теорія згинання, а другий член - необхідну поправку. Поправочний член не залежить від x і малий у порівнянні з максимальним напруженням згинання, якщо проліт балки великий у порівнянні з її висотою. Для таких балок елементарна теорія згинання дає досить точні значення напруження σ_x. Слід зазначити, що вираз (16.5) є точним розв'язком тільки в тому випадку, якщо нормальні умови на кінцях $x = \pm l$ розподілені за законом

$$\bar{X} = \pm \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2 y\right)$$

тобто якщо нормальні зусилля на кінцях дорівнюють напруженням σ_x при $x = \pm l$, отриманим по формулі (16.5). Головний момент і головний вектор цих зусиль дорівнюють нулю. Отже, виходячи із принципу Сен-Венана, ми робимо висновок, що їхній вплив на напруження на значній віддалі від кінців, скажемо, на відстані, більшій висоти балки, нескінченно малий. Таким чином, розв'язок (16.5) на цих відстанях від кінців точок є досить точним, якщо не прикладені сили *X*.

Розбіжність між точним розв'язком (16.5) і наближеним розв'язком, представленою першим членом (16.5), виникає тому, що при виведенні наближеного розв'язку передбачалося, що поздовжні волокна балки перебувають в умовах чистого розтягу. Тим часом з розв'язку (16.4) можна бачити, що між цими волокнами діють стискаючі напруження σ_y. Ці напруження й дають поправку, представлену другим членом виразу (16.5). Розподіл стискаючих напруг σ_y по висоті балки показане на рис. 16.1, *в*. Розподіл дотичних напружень τ_{xy}, обумовлених третім рівнянням (16.4), по поперечному перерізу балки збігається з тим, яке дає звичайна елементарна теорія згинання.

Якщо замість розподіленого навантаження q балка навантажена силами власної ваги, розв'язок повинен бути модифікований шляхом підстановки $q = 2\rho g c$ в (16.5) і в останні два рівняння (16.4) і додавання напружень

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \rho g(c - y), \quad \tau_{xy} = 0. \tag{16.6}$$

Для цього випадку розподіл напружень можна одержати з виразу (12.3), покладаючи

$$\varphi = \frac{1}{6}\rho g(y^3 + 3cx^2).$$

Отже, воно являє собою можливий напружений стан, що виникає під дією власної ваги й зусиль на границі. На верхньому краї $y = -c$ маємо $\sigma_y = 2\rho g c$, а на нижньому $y = c$ відповідно $\sigma_y = 0$. Таким чином, якщо до отриманого раніше розв'язку додати напруження, обумовлені формулами (16.6), при $q = 2\rho g c$, то напруження на обох горизонтальних краях стають рівними нулю й навантаження на балку буде складатися тільки з однієї сили ваги.

Переміщення *u* і *v* можна знайти методом, описаним у попередньому параграфі. Припускаючи, що в центрі ваги середнього поперечного перерізу

($x=0,\ y=0$) горизонтальне переміщення дорівнює нулю, а вертикальне переміщення дорівнює прогину δ, використовуючи розв'язки (16.4) і (16.5), знаходимо

$$u=\frac{q}{2EI}\left[(l^2x-\frac{x^3}{3})y+x(\frac{2}{3}y^3-\frac{2}{5}c^2y)+\nu x(\frac{1}{3}y^3-c^2y+\frac{2}{3}c^3)\right],$$

$$v=-\frac{q}{2EI}\left\{\frac{y^4}{12}-\frac{c^2y^2}{2}+\frac{2}{3}c^3y+\nu\left[(l^2-x^2)\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{6}-\frac{1}{5}c^2y^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{q}{2EI}\left[\frac{l^2x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{1}{5}c^2x^2+(1+\frac{1}{2}\nu)c^2x^2\right]+\delta.$$

З виразу для u можна бачити, що нейтральна вісь балки не проходить по серединній лінії. Завдяки стискаючій напрузі

$$(\sigma_y)_{y=0}=-\frac{q}{2}.$$

серединна лінія має деформацію розтягу $\nu q/(2E)$, звідки

$$(u)_{y=0}=\frac{\nu qx}{2E}.$$

З виразу для v знаходимо рівняння кривої прогинів

$$(v)_{y=0}=\delta-\frac{q}{2EI}\left[\frac{l^2x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{1}{5}c^2x^2+(1+\frac{1}{2}\nu)c^2x^2\right]. \qquad (16.7)$$

Припускаючи, що на кінцях балки прогин дорівнює нулю, знаходимо

$$\delta=\frac{5}{24}\frac{ql^4}{EI}\left[1+\frac{12}{5}\frac{c^2}{l^2}\left(\frac{4}{5}+\frac{\nu}{2}\right)\right]. \qquad (16.8)$$

Множник перед дужкою дорівнює прогину, що випливає із елементарної теорії в припущенні, що поперечний переріз балки в процесі деформації залишається плоским. Другий член у квадратних дужках являє собою поправку, пов'язану із впливом поперечної сили.

Диференціюючи рівняння (16.7) для кривої прогинів двічі по x, знаходимо наступний вираз для кривизни:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{y=0}=\frac{q}{EI}\left[\frac{l^2-x^2}{2}+c^2(\frac{4}{5}+\frac{\nu}{2})\right]. \qquad (16.9)$$

Можна бачити, що кривизна не пропорційна в точності згинальному моменту $q(l^2-x^2)/2$. Додатковий член у дужках являє собою необхідну поправку до звичайної елементарної формули. Більш загальне дослідження кривизни балки показує, що поправочний член, який міститься у виразі (16.9), може також використовуватися для будь-якого випадку неперервно змінної інтенсивності навантаження.

РОЗДІЛ 3. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

§17. Загальні рівняння в полярних координатах

При дослідженні напружень у круглих кільцях і дисках, криволінійних стержнях вузького прямокутного поперечного перерізу із круговою віссю і т.д. зручно використовувати полярні координати. У цьому випадку положення точки на серединній площині пластинки визначається відстанню від початку координат *O* (рис. 17.1) і кут θ між радіусом-вектором *r* і деякою віссю *Ox,* фіксованою в розглянутій площині.

Розглянемо рівновагу малого елемента *1234,* вирізаного із пластинки радіальними перетинами *04, 02,* нормальними до пластинки, і двома циліндричними поверхнями *3, 1,* також нормальними до площини пластинки. Нормальну компоненту напружень в радіальному напрямку позначимо через σ_r, нормальну компоненту в окружному напрямку - через σ_θ, а дотичну компоненту через $\tau_{r\theta}$, вважаючи, що кожний символ представляє напругу в центрі елемента в точці *P* з координатами *r,θ.* З урахуванням зміни напруження його значення посередині сторін *1, 2, 3, 4* не будуть у точності рівні σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, і ми позначимо їх через $(\sigma_r)_1$ і т.д., як показано на рис. 17.1. Радіуси сторін *3, 1* позначимо через r_3, r_1. Зусилля, що діє в радіальному напрямку по стороні *1*, дорівнює $(\sigma_r)_1 r_1 d\theta$, що можна записати також у вигляді $(\sigma_r r)_1 d\theta$. Зусилля ж, що діє в радіальному напрямку по стороні *3,* дорівнює $(\sigma_r r)_3 d\theta$. Компонента нормального зусилля, що діє по стороні *2,* уздовж радіуса, що проходить через точку *P,* дорівнює $-(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_2)\sin\frac{d\theta}{2}$ або $-(\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2}$. Відповідна компонента діючого по стороні *4* зусилля дорівнює $-(\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2}$. Дотичні зусилля на сторонах *2* і *4* дають внесок $\left[(\tau_{r\theta})_3 - (\tau_{r\theta})_4\right] dr$. Припустимо, крім того, що об'ємна сила має в радіальному напрямку компоненту *R.* Проектуючи всі сили на радіальний напрямок, одержуємо рівняння рівноваги

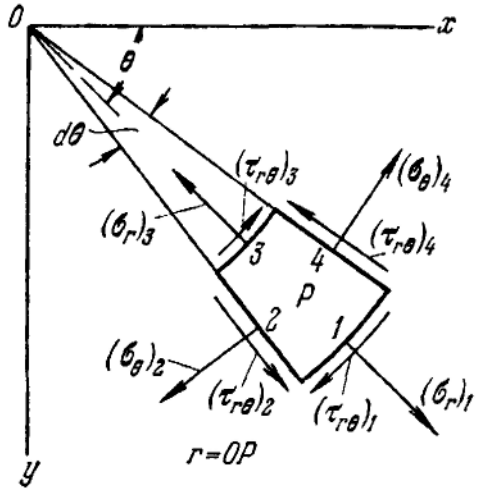


Рис. 17.1.

$$(\sigma_r r)_1 d\theta - (\sigma_r r)_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} +$$

$$+\left[(\tau_{r\theta})_3 - (\tau_{r\theta})_4\right] dr + R r d\theta dr = 0.$$

Після ділення на $dr d\theta$ це рівняння приймає вигляд

$$\frac{(\sigma_r r)_1 - (\sigma_r r)_3}{dr} - \frac{1}{2}\left[(\sigma_\theta)_2 - (\sigma_\theta)_4\right] + \frac{\left[(\tau_{r\theta})_3 - (\tau_{r\theta})_4\right]}{d\theta} + Rr = 0.$$

Якщо розміри елемента зменшуються, наближаючись до нуля, перший член рівняння обертається в $\frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r}$. Другий стає рівним σ_θ, а третій – $\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}$. Проектуючи всі сили на окружний напрямок, одержимо друге рівняння рівноваги. Остаточно ці два рівняння рівноваги приймають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+S=0, \qquad (17.1)$$

де S - компонента об'ємної сили в кільцевому напрямку (у бік збільшення θ).

При розв'язуванні двовимірних задач у полярних координатах ці рівняння заміняють рівняння (8.1). Якщо об'ємні сили дорівнюють нулю, то рівняння (17.1) можна задовольнити, покладаючи

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2},\ \sigma_\theta=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\partial \theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \qquad (17.2)$$

де φ - функція напружень Ері, що залежить від r і θ. Це, зрозуміло, можна перевірити за допомогою прямої підстановки.

Щоб записати диференціальне рівняння сумісності (12.4) у полярних координатах, спочатку запишемо оператор Лапласа у полярних координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)f\ . \qquad (17.3)$$

Тоді бігармонічне рівняння, якому задовольняє функція напружень Ері у полярних координатах, набуде вигляду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right)=0. \qquad (17.4)$$

З різних розв'язків цього диференціального рівняння в частинних похідних ми можемо одержати розв'язки двовимірних задач у полярних координатах при різних граничних умовах. Кілька прикладів таких завдань будуть розглянуті в даному розділі.

§18. Полярно-симетричний розподіл напружень

Якщо функція напружень залежить тільки від r, рівняння сумісності (17.4) приймає вигляд

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)=\frac{d^4\varphi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\varphi}{dr}=0\,. \qquad (18.1)$$

Це звичайне диференціальне рівняння, яке можна привести до лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами, якщо ввести нову змінну t за допомогою залежності $r=e^t$. Таким шляхом легко одержати загальний розв'язок рівняння (18.1). Цей розв'язок містить чотири сталих інтегрування, які повинні бути визначені із граничних умов. За допомогою підстановки можна перевірити, що загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi = A\ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D. \qquad (18.2)$$

Із цього загального розв'язку можна одержати розв'язки ряду задач про полярно-симетричний розподіл напружень без врахування об'ємних сил. Відповідні компоненти напружень, відповідно до рівнянь (17.2), мають вигляд

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C, \qquad (18.3)$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Якщо в початку координат немає отвору, постійні A і B обертаються в нуль, оскільки інакше компоненти напружень (18.3) при $r = 0$ стають необмежено великими. Отже, для пластинки без отвору у початку координат і при відсутності об'ємних сил може існувати тільки один полярно-симетричний розподіл напружень, при якому $\sigma_r = \sigma_\theta = const$ і пластинка перебуває в умовах однорідного стиску або розтягання у всіх напрямках у своїй площині.

Якщо у початку координат є отвір, то з рівнянь (18.3) можна вивести й інші розв'язки, відмінні від однорідного розтягання або стиску. Приймаючи, наприклад, B рівним нулю, що випливає з розгляду переміщень, можна привести рівняння (18.3) до вигляду

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \qquad (18.3)$$

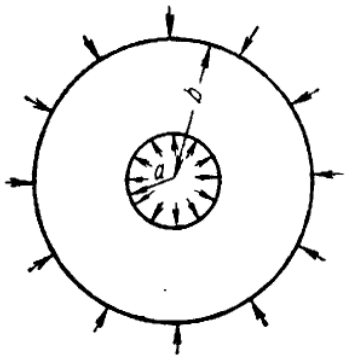


Рис. 18.1.

Цей розв'язок можна використати для опису поля напружень у порожньому циліндрі, підданому дії рівномірного тиску на внутрішній і зовнішній поверхнях (Рис. 18.1). Позначимо через a і b внутрішній і зовнішній радіуси циліндра, а через p_1 і p_0 - внутрішній і зовнішній тиски. Тоді граничні умови задачі приймуть вигляд

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_0, \qquad (18.4)$$

Підставляючи (18.4) у перше з рівнянь (18.3), одержуємо наступні рівняння для визначення A і C:

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i, \quad \frac{A}{b^2} + 2C = -p_0.$$

звідки випливає, що

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (18.3), одержуємо наступні вираження для компонентів напружень:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2},$$
$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}. \qquad (18.5)$$

Радіальне переміщення u легко знайти, тому що в цьому випадку $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ і для плоского напруженого стану $E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r$.

Цікаво відзначити, що по всій товщині циліндра сума $\sigma_\theta + \sigma_r$ стала. Отже, напруження σ_r і σ_θ викликають однорідне розтягання або стиск у напрямку осі циліндра, і поперечні перерізи, перпендикулярні осі циліндра, будуть залишатися плоскими. Таким чином, деформація, викликана напруженнями (18.5) в елементі циліндра, вирізаному двома суміжними поперечними перерізами, не впливає на деформацію сусідніх елементів. Це виправдує прийняття для цього елемента умов плоского напруженого стану, як і було зроблено вище.

В окремому випадку, коли $p_0 = 0$ і циліндр піддається одному тільки внутрішньому тиску, вирази (18.5) приймають вигляд

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \qquad (18.6)$$

Ці вирази показують, що в цьому окремому випадку напруження σ_r завжди є стискаючим, а напруження σ_θ - розтягуючим. Останнє приймає найбільше значення на внутрішній поверхні циліндра, де

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{p_i\left(a^2 + b^2\right)}{b^2 - a^2}. \qquad (18.7)$$

Напруження $(\sigma_\theta)_{\max}$ завжди чисельно перевищує внутрішній тиск і наближається до нього по величині з ростом *b*. Отже, його не можна зробити нижче p_i, скільки б матеріалу не додавалося до зовнішньої частини циліндра.

§19. Чистий згин кривих брусів

Розглянемо кривий брус із постійним перетином у вигляді вузького прямокутника і круговою віссю. Нехай брус згинається у площині кривизни моментами *M*, прикладеними по кінцях (Рис. 19.1). У цьому випадку згинальний момент залишається постійним по довжині стержня й природно очікувати, що розподіл напружень у всіх радіальних перетинах буде однаковим, і тому розв'язок задачі можна одержати, використовуючи вираз (18.2).

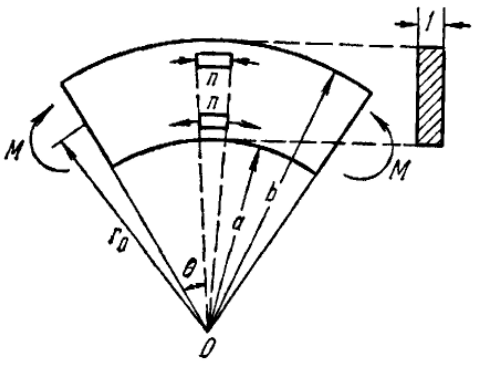


Рис. 19.1.

Позначаючи через *a* і *b* внутрішній і зовнішній радіуси поверхні бруса та приймаючи ширину прямокутного поперечного перерізу рівним одиниці, одержуємо наступні граничні умови:

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r = a \text{ і } b = r, \tag{19.1}$$

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M, \tag{19.2}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \text{ усюди на поверхнях.} \tag{19.3}$$

Умова (19.1) означає, що як опукла, так і ввігнута поверхні бруса вільні від нормальних зусиль. Умова (19.2) вказує на те, що нормальні напруження на кінцях викликані тільки дією моменту *M,* тоді як умова (19.3) вказує, що до зовнішньої й внутрішньої поверхонь не прикладені дотичні зовнішні зусилля. Використовуючи перше з рівнянь (18.3) разом із граничною умовою (19.1), одержуємо

$$\frac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C = 0, \quad \frac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C = 0. \tag{19.4}$$

Тепер потрібно задовольнити граничну умову (19.2). Використання функції напружень гарантує рівновагу системи. Ненульове результуюче зусилля на кожному з кінців стержня приводить до порушення умов рівноваги. Для того щоб згинальний момент дорівнював *M,* повинна виконуватися умова

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r dr = -M. \tag{19.5}$$

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r dr = \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \frac{\partial \varphi}{\partial r} r \Big|_a^b - \varphi \Big|_a^b$$

Звідси одержуємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} r \Big|_a^b = 0,$$

і, беручи до уваги, що з урахуванням (19.4) з (19.5) знаходимо $\varphi\big|_a^b = M$.

Після підстановки сюди виразу (18.2) для φ одержуємо

$$A\ln\frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M. \tag{19.6}$$

Це рівняння, разом із двома рівняннями (19.4), повністю визначає сталі *A*, *B, C.* Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln\frac{b}{a}, \quad B = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2), \\ C &= \frac{M}{N}\left[b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right], \end{aligned} \tag{19.7}$$

де для спрощення введене позначення

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln\frac{b}{a} \right)^2. \tag{19.8}$$

Підставляючи значення сталих, визначених виразами (19.7), у формули для компонентів напружень (18.3), одержуємо

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r}\right), \tag{19.9}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right),$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Ці формули визначають розподіл напружень, що задовольняє всім граничним умовам (19.1-3) для чистого згину і являють собою точний розв'язок задачі, якщо розподіл нормальних зусиль на кінцях дається другим з рівнянь (19.9). Якщо сили, що створюють згинальний момент *M*, розподілені по торцях стержня деяким іншим чином, розподіл напружень на кінцях буде відрізнятися від того, що визначається розв'язком (19.9). Однак, відповідно до принципу Сен-Венана, на деякому видаленні від кінців, скажімо, на відстанях від кінців, що перевищують висоту перерізу бруса, цими відхиленнями від розв'язку (19.9) можна знехтувати.

З першого рівняння (19.9) можна бачити, що для напрямку згину, показаного на рис.19.1, напруження σ_r завжди позитивне. Такий же висновок можна зробити відразу ж, виходячи з напрямку напружень σ_θ, що діють на елементи *n-n* (рис. 19.1). Відповідні зусилля дають результуючі в радіальному напрямку, що намагаються відокремити один від одного поздовжні волокна й викликають розтягувальні напруження у радіальному напрямку. Це напруження збільшується в напрямку до нейтральної поверхні й стає максимальним поблизу неї. Його максимальне значення завжди набагато менше $(\sigma_\theta)_{\max}$. Наприклад, при *b/a*=1,3, $(\sigma_r)_{\max} = 0{,}060(\sigma_\theta)_{\max}$; при *b/a*=2 $(\sigma_r)_{\max} = 0{,}138(\sigma_\theta)_{\max}$; при *b/a*=3 $(\sigma_r)_{\max} = 0{,}193(\sigma_\theta)_{\max}$.

§20. Компоненти деформацій у полярних координатах

При дослідженні переміщень у полярних координатах позначимо компоненти переміщення в радіальному й окружному напрямках через *u* й *v*.

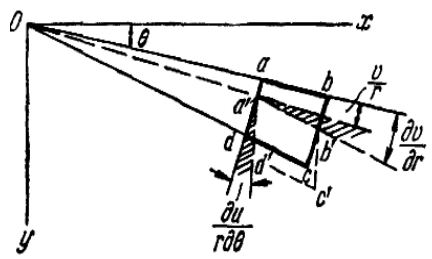


Рис. 20.1

Якщо *u* — радіальне переміщення сторони *ad* елемента *abcd* (рис. 20.1), то радіальне переміщення сторони *be* дорівнює $u + \frac{\partial u}{\partial r}dr$. Відносне подовження елемента *abcd* у радіальному напрямку визначиться тоді формулою

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{20.1}$$

Деформації в окружному напрямку залежать не тільки від переміщення *v*, але також і від радіального переміщення *u*. Вважаючи, наприклад, що точки *a* і *d* елемента *abcd* мають тільки радіальне переміщення *u*, одержуємо, що нова довжина дуги *ad* дорівнює $(r+u)d\theta$, а звідси окружна деформація визначається виразом

$$\frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}.$$

Різниця окружних переміщень сторін *ab* і *cd* елемента *abcd* дорівнює $(\partial u/\partial v)d\theta$, а окружна деформація, викликана переміщенням *v*, відповідно дорівнює $\partial v(rd\theta)$. Звідси загальна окружна деформація визначається формулою

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{rd\theta}. \qquad (20.2)$$

Розглянемо тепер деформацію зсуву, вважаючи, що елемент *abcd* після деформації займає положення *a'b'c'd'* (рис. 20.1). Кут між напрямками *ad* і *a'd'*, пов'язаний з радіальним переміщенням *u*, дорівнює $\partial u/(rd\theta)$. Точно так само кут між *a'b'* і *ab* дорівнює $\partial v/\partial r$. Слід зазначити, що внесок у деформацію зсуву вносить тільки частина цього кута (заштрихована на малюнку), тоді як інша його частина, рівна v/r, представляє кутове переміщення, пов'язане з обертанням елемента *abcd* як абсолютно твердого тіла відносно осі, що проходить через точку О. Отже, загальна зміна кута *dab,* що представляє собою деформацію зсуву, визначається формулою

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \qquad (20.3)$$

Підставляючи тепер вирази для компонентів деформації (20.1-3) у рівняння, що виражають закон Гука для плоского напруженого стану

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}, \qquad (20.4)$$

можна одержати рівняння, достатні для визначення *u* і *v*.

§21. Переміщення при симетричних полях напружень

Підставляючи в перше рівняння (20.4) компоненти напружень з рівнянь (18.3), знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}\left[\frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B\ln r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C\right].$$

Після інтегрування одержуємо

$$u = \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br\ln r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r\right] + f(\theta), \qquad (21.1)$$

де $f(\theta)$ - функція лише однієї змінної θ. Із другого рівняння (20.4), використовуючи (20.2), знаходимо

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta).$$

Звідси після інтегрування одержуємо

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + f_1(r), \qquad (21.2)$$

де $f_1(r)$ - функція лише один змінної *r*. Підставляючи вирази (21.1-2) в (20.3) і зауважуючи, що $\gamma_{r\theta}$ дорівнює нулю, оскільки дорівнює нулю $\tau_{r\theta}$, знаходимо

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial f_1(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta-\frac{1}{r}f_1(r)=0, \qquad (21.3)$$

Звідки

$$f_1(r)=Fr,\ \ f(\theta)=H\sin\theta+K\cos\theta, \qquad (21.4)$$

де F, H і K - сталі, які повинні визначатися з умов закріплення криволінійного стержня або кільця. Підставляючи вирази (21.4) в (21.1-2), одержуємо наступні формули для переміщень (рівняння (21.3) задовольняється тільки в тому випадку, коли $\int f(\theta)d\theta$ з $f(\theta)$ із (21.4) береться без додавання сталої):

$$u=\frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)A}{r}+2(1-\nu)Br\ln r-B(1+\nu)r+2C(1-\nu)r\right]+H\sin\theta+K\cos\theta,$$

$$v=\frac{4Br\theta}{E}+Fr+H\cos\theta-K\sin\theta, \qquad (21.5)$$

де для кожного окремого випадку слід підставляти свої значення постійних A, B і C. Розглянемо, наприклад, чистий згин. Вважаючи центр ваги поперечного перерізу, від якого відраховується кут θ (рис. 19.1), а також елемент радіуса в цій точці жорстко фіксованими, можна представити умови закріплення бруса у вигляді

$$u=0,\ \ v=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial r}=0 \text{ при } \theta=0 \text{ і } r=r_0=\frac{a+b}{2}$$

Підставляючи сюди вирази для переміщень (21.5), одержуємо наступні рівняння для визначення сталих інтегрування F, H і K

$$\frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)A}{r_0}+2(1-\nu)Br_0\ln r_0-B(1+\nu)r_0+2C(1-\nu)r_0+K\right]=0,$$

$$Fr_0+H=0,\ \ F=0.$$

Звідси випливає, що $F=H=0$, і для переміщення v одержуємо

$$v=\frac{4Br\theta}{E}-K\sin\theta. \qquad (21.6)$$

Це означає, що переміщення будь-якого поперечного перерізу складається з поступального переміщення $-K\sin\theta$, однакового для всіх точок перетину, і повороту поперечного перерізу на кут $\frac{4B\theta}{E}$ відносно центра кривизни O (рис. 19.1). Ми бачимо, що при чистому згині поперечні перерізи залишаються плоскими.

При дослідженні симетричного розподілу напружень у суцільному кільці (§18) стала B у загальному розв'язку (18.3) приймалася рівною нулю. Тепер же, після одержання виразів (21.5) для переміщень, стає зрозумілим, який зміст має припущення про те, що стала B дорівнює нулю. Стала B є співмножником у члені $\frac{4Br\theta}{E}$, що входить у вираз для переміщення v. Цей член *неоднозначний;* він змінюється при збільшенні θ на 2π, тобто при поверненні до даної точки після повного оберту по кільцю. Таке *багатозначний* вираз для переміщення фізично неможливий в суцільному

кільці, тому для даного випадку нам варто покласти $B=0$ у загальному розв'язку (18.3).

Кільце є прикладом багатозв'язного тіла, тобто такого тіла, у якому деякі перерізи можна виконати без поділу тіла на дві частини. Для повного визначення поля напружень у таких тілах недостатньо задання граничних умов у напруженнях, і повинні розглядатися додаткові рівняння, що представляють собою умови однозначності переміщень.

Фізичний зміст багатозначних розв'язків можна пояснити, розглядаючи *початкові напруження* в багатозв'язному тілі. Якщо вирізати частину кільця двома суміжними поперечними перерізуми (рис. 21.1) і з'єднати кінці кільця за допомогою зварювання або яким-небудь іншим методом, то вийде кільце з початковими напруженнями, тобто в кільці виникнуть напруження, незважаючи на відсутність зовнішнього навантаження. Якщо α - малий кут, що визначає вирізану частину кільця, то кільцеве переміщення, необхідне для того, щоб з'єднати разом кінці кільця, дорівнює

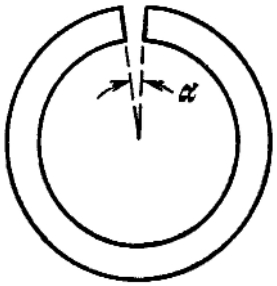


Рис. 21.1

$$v=\alpha r. \tag{21.6}$$

Те ж переміщення, одержуване з рівняння (21.6), якщо покласти $\theta=2\pi$, становить

$$v=2\pi\frac{4Br}{E}. \tag{21.7}$$

З (21.6-7) одержуємо

$$B=\frac{\alpha E}{8\pi}. \tag{21.8}$$

Стала *B,* що входить у багатозначний член виразу для переміщення (21.6), має тепер певне значення залежно від способу, за допомогою якого в кільці утворяться початкові напруги. Підставляючи (21.8) у рівняння (19.7-8) з § 29, знаходимо, що згинальний момент, необхідний для того, щоб звести разом кінці кільця (рис. 21.1), дорівнює

$$M=-\frac{\alpha E}{8\pi}\frac{(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}{2(b^2-a^2)}. \tag{21.8}$$

Звідси, використовуючи розв'язок (19.9) для випадку чистого згину, легко обчислити початкові напруження в кільці.

§22. Обертання диска

Розподіл напружень у круглому диску, що обертається, має велике практичне значення. Якщо товщина диска мала в порівнянні з його радіусом, то зміною радіального і окружного напружень по товщині диска можна знехтувати і задача легко розв'язується. Якщо товщина диска стала, можна застосувати рівняння (17.1), у якому об'ємною силою буде сила інерції. Тоді

$$R=\rho\omega^2 r,\ \ S=0, \tag{22.1}$$

де ρ - маса одиниці об'єму матеріалу диска, а ω - кутова швидкість обертання. У силу симетрії напруження $\tau_{r\theta}$ обертається в нуль, а напруження

σ_r і σ_θ не залежать від θ. Друге рівняння (17.1) задовольняється тотожно, а перше можна записати у формі

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \qquad (22.2)$$

Відповідно до формул (20.1-2) компоненти деформації в симетричному випадку мають вигляд

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \qquad (22.3)$$

Виражаючи із двох перших співвідношень між напруженнями й деформаціями (20.4) компоненти напружень, будемо мати

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r).$$

Далі, використовуючи (22.3), знаходимо

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right). \qquad (22.4)$$

Підставляючи ці вирази в (22.2), одержимо, що переміщення u повинно задовольняти рівнянню

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r^3. \qquad (22.5)$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)Cr - (1+\nu)C_1\frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 r^3\right], \qquad (22.6)$$

де C і C_1 - довільні сталі. Відповідні компоненти напружень знаходяться з (22.4) у вигляді

$$\sigma_r = C + C_1\frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2, \quad \sigma_\theta = C - C_1\frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2. \qquad (22.7)$$

Сталі інтегрування C і C_1 визначаються із граничних умов.

Для випадку *суцільного* диска, щоб одержати $u = 0$ у центрі, ми повинні покласти $C_1 = 0$. Стала C визначається з умови на контурі $r = b$ диска. Якщо там не прикладені сили, то одержуємо

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 = 0,$$

звідки

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2.$$

Компоненти напруг, згідно (22.7), тепер визначаються формулами

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2), \quad \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2. \qquad (22.7')$$

Ці напруження приймають максимальне значення в центрі диска (можна показати, що коли σ_r і σ_θ не залежать від θ, вони згідно їхнього визначенню повинні бути рівні один одному в центрі), де

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2. \qquad (22.8)$$

У випадку диска із *круглим отвором* радіуса a в центрі сталі інтегрування в рівняннях (22.7') можуть бути знайдені із граничних умов на внутрішній і зовнішній границях. Якщо на цих границях немає зусиль, то граничні умови мають вигляд

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0, \qquad (22.9)$$

із цих умов випливає, що

$$C = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 + a^2), \quad C_1 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 b^2.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (22.7), одержуємо

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right),$$
$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right). \qquad (22.10)$$

Максимальне радіальне напруження виникає в точці $r = \sqrt{ab}$, де

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 - a^2). \qquad (22.11)$$

Максимальне окружне напруження діє на внутрішній границі, де воно дорівнює

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu}a^2\right). \qquad (22.12)$$

Можна показати, що це напруження більше ніж $(\sigma_r)_{\max}$.

Коли радіус отвору a наближається до нуля, максимальна окружна напруга наближається до значення, удвічі більшого за те, що діє в центрі суцільного диска і визначається формулою (22.8). Таким чином, введення малого кругового отвору в центрі суцільного диска, що обертається, подвоює максимальне напруження. Це явище називають *концентрацією напружень* навколо отворів.

§23. Вигин кривого бруса силою, прикладеної на кінці

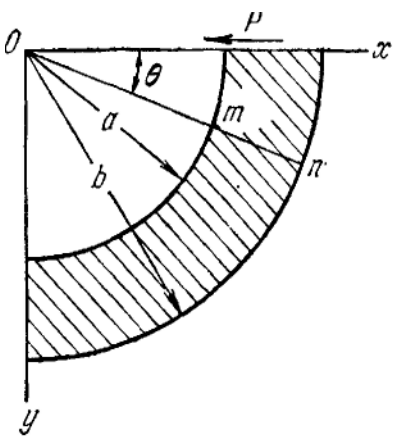


Рис. 23.1.

Почнемо із простого випадку, зображеного на рис. 23.1. Стержень вузького прямокутного поперечного перерізу з віссю у формі дуги кола закріплений на нижньому кінці й згинається силою P, прикладеною в радіальному напрямку до верхнього кінця. Згинальний момент у будь-якому поперечному перерізі m пропорційний $\sin\theta$, а нормальне напруження σ_θ пропорційне згинальному моменту. Тоді функція напружень φ, що задовольняє рівнянню

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)=0. \qquad (23.1)$$

повинна бути пропорційна $\sin\theta$. Приймаючи

$$\varphi = f(r)\sin\theta \qquad (23.2)$$

і підставляючи (23.2) у рівняння (23.1), знаходимо, що функція $f(r)$ повинна задовольняти наступному звичайному диференціальному рівнянню

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)=0. \qquad (23.3)$$

Це рівняння можна перетворити в лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами (див. §18), і його загальний розв'язок має вигляд

$$f(r)=Ar^3+B\frac{1}{r}+Cr+Dr\ln r, \qquad (23.4)$$

де *A, B, C* і *D* - сталі інтегрування, які визначаються із граничних умов. Підставляючи розв'язок (23.4) у вираз (23.2) для функції напружень і використовуючи загальні формули (17.2), знаходимо наступні вирази для компонентів напружень:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=\left(2Ar-\frac{2B}{r^3}+\frac{D}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\left(6Ar+\frac{2B}{r^3}+\frac{D}{r}\right)\sin\theta, \qquad (23.5)$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=-\left(2Ar-\frac{2B}{r^3}+\frac{D}{r}\right)\cos\theta.$$

Умови, що зовнішня й внутрішня границі кривого стержня (рис. 23.1) вільні від зовнішніх навантажень, мають вигляд

$$\sigma_r=\tau_{r\theta}=0 \text{ при } r=a \text{ і } r=b,$$

або, відповідно до рівності (23.5),

$$2Aa-\frac{2B}{a^3}+\frac{D}{a}=0,\quad 2Ab-\frac{2B}{b^3}+\frac{D}{b}=0. \qquad (23.6)$$

Нарешті, остання умова полягає в тому, що сума дотичних зусиль, розподілених по верхньому кінцю стержня, повинна дорівнювати *P*. Приймаючи ширину поперечного перерізу рівній одиниці, або вважаючи *P* навантаженням на одиницю товщини пластинки, для верхнього кінця θ=0, одержуємо

$$\int_a^b\tau_{r\theta}dr=-\int_a^b\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)dr=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_b^a=$$

$$=(Ar^2+\frac{B}{r^2}+C+D\ln r)\Big|_b^a=P,$$

або

$$-A(b^2-a^2)+B\frac{(b^2-a^2)}{a^2b^2}-D\ln\frac{b}{a}=P. \qquad (23.7)$$

З рівнянь (23.6-7) знаходимо

$$A=\frac{P}{2N},\ \ B=-\frac{Pa^2b^2}{2N},\ \ D=-\frac{P}{N}(a^2+b^2), \tag{23.8}$$

де

$$N=a^2-b^2+(a^2+b^2)\ln\frac{b}{a}.$$

Підставляючи значення (23.8) сталих інтегрування в рівняння (23.5), одержуємо вирази для компонентів напружень. Для верхнього кінця стержня при $\theta=0$ одержуємо

$$\sigma_\theta=0,\ \ \tau_{r\theta}=-\frac{P}{N}\left(r+\frac{a^2b^2}{r^3}-\frac{1}{r}(a^2+b^2)\right). \tag{23.9}$$

Для нижнього кінця $\theta=\frac{\pi}{2}$ знаходимо

$$\tau_{r\theta}=0,\ \ \sigma_\theta=\frac{P}{N}\left(3r-\frac{a^2b^2}{r^3}-\frac{1}{r}(a^2+b^2)\right). \tag{23.10}$$

Формули (23.5) визначають точний розв’язок задачі тільки тоді, коли зусилля на кінцях криволінійного стержня розподілені так, як цього вимагають рівняння (23.9-10). Для всякого іншого розподілу зусиль розподіл напружень на кінцях стержня буде відрізнятися від того, який дає розв’язок (23.5), однак у силу принципу Сен-Венана на великій відстані від кінців розв’язок залишається справедливим.

Розглянемо тепер переміщення, викликувані силою P (рис. 23.1). Використовуючи рівняння (20.1)-(20.4) і підставляючи в них вирази (23.5) для компонентів напружень, одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\sin\theta}{E}\left[2Ar(1-3\nu)-\frac{2B}{r^3}(1+\nu)+\frac{D}{r}(1-\nu)\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=r\varepsilon_\theta-u,\ \ \gamma_{r\theta}=\frac{\partial u}{r\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}. \tag{23.11}$$

Після інтегрування першого із цих рівнянь маємо

$$u=\frac{\sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu)+\frac{B}{r^2}(1+\nu)+D(1-\nu)\ln r\right]+f(\theta), \tag{23.12}$$

де функція $f(\theta)$ залежить тільки від θ. Підставляючи вираз (23.12) у друге рівняння (23.11) разом з виразом для ε_θ і інтегруючи, знаходимо

$$v=-\frac{\cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu)+\frac{B}{r^2}(1+\nu)-D\ln r(1-\nu)+D(1-\nu)\right]- \tag{23.13}$$

$$-\int f(\theta)d\theta+F(r),$$

де функція $F(r)$ залежить тільки від r. Підставляючи тепер вирази (23.12-13) у третю рівність (23.11), приходимо до рівняння

$$\int f(\theta)d\theta+f'(\theta)+rF'(r)-F(r)=-\frac{4D\cos\theta}{E}.$$

Це рівняння задовольняється, якщо покласти

$$F(r)=Hr,\ \ f(\theta)=-\frac{2D\theta\cos\theta}{E}+K\sin\theta+L\cos\theta, \tag{23.14}$$

де *H, K* і *L* - довільні сталі, які визначаються з умов закріплення.

Компоненти переміщень *u* і *v,* відповідно до формул (23.12-13), мають тепер наступний вигляд:

$$u=-\frac{2D\theta\cos\theta}{E}+\frac{\sin\theta}{E}\left[Ar^2(1-3\nu)+\frac{B}{r^2}(1+\nu)+D(1-\nu)\ln r\right]+$$
$$+K\sin\theta+L\cos\theta,$$
$$v=\frac{2D\theta\sin\theta}{E}-\frac{\cos\theta}{E}\left[Ar^2(5+\nu)+\frac{B}{r^2}(1+\nu)-D(1-\nu)\ln r+\frac{D(1+\nu)}{E}\cos\theta\right]-$$
$$+K\cos\theta-L\sin\theta+Hr. \tag{23.15}$$

Радіальне переміщення верхнього кінця стержня можна одержати, поклавши $\theta=0$ у вираженні для *u*, звідки

$$(v)_{\theta=0}=L. \tag{23.16}$$

Стала *L* визначається з умови на закріпленому кінці (рис. 23.1). При $\theta=\frac{\pi}{2}$ маємо $u=0$ і $\frac{\partial v}{\partial r}=0,$ таким чином, із другого рівняння (23.15) одержуємо

$$H=0,\ \ L=\frac{D\pi}{E}. \tag{23.17}$$

Отже, прогин верхнього кінця стержня з урахуванням (23.8) дається формулою

$$(u)_{\theta=0}=\frac{D\pi}{E}=-\frac{P\pi(a^2+b^2)}{E\left[(a^2-b^2)+(a^2+b^2)\ln\frac{b}{a}\right]}. \tag{23.18}$$

Коли *b* наближається до *a*, а висота перерізу криволінійного стержня $h=b-a$ мала в порівнянні з *a,* можна використати розкладання в ряд

$$\ln\frac{b}{a}=\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)=\frac{h}{a}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{a^3}+\ldots$$

Підставляючи його в (23.18) і нехтуючи членами вищих порядків, одержимо

$$(u)_{\theta=0}=-\frac{3\pi a^3P}{Eh^3}.$$

Взявши функцію напружень у вигляді

$$\varphi=f(r)\cos\theta$$

і діючи описаним вище способом, знаходимо розв’язок для випадку, коли до верхнього кінця стержня прикладені вертикальна сила й згинальний момент (рис.23.1). Віднімаючи із цього рішення напруження, викликані згинальним моментом (див. §19), можна одержати напруження, викликувані вертикальною силою, прикладеною до кінця стрижня. Маючи розв’язок для випадків дії горизонтальної й вертикальної сил, можна за допомогою накладення одержати розв’язок для будь-якої нахиленої сили.

У наведених міркуваннях усюди передбачалося, що рівняння (23.6) задовольняються і що кругові границі стрижня вільні від навантажень. Вважаючи, що в (23.6) праві частини відмінні від нуля, одержуємо випадок, коли по границях стержня розподілені нормальні й дотичні зусилля, пропорційні $\sin\theta$ і $\cos\theta$ θ. Комбінуючи ці розв'язки з отриманими раніше для випадків чистого згину і для згину силою, прикладеною на кінці, можна приблизно представити умови навантаження склепіння піском або ґрунтом.

§24. Крайові дислокації

В §23 компоненти переміщень (23.15) були отримані, виходячи з компонентів напружень (23.5). Постійні *A, B, D* для задачі, представленої на рис. 23.1, визначалися формулами (23.8).

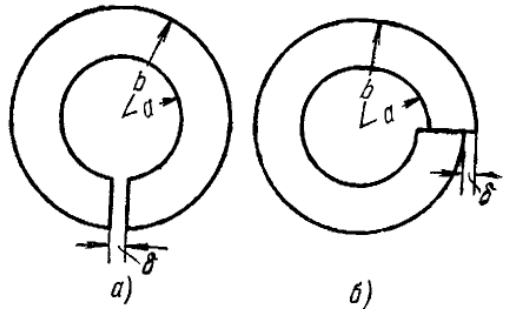


Рис. 24.1.

Застосування цього розв'язку можливе не лише до задачі про чверть кільця. З рівним успіхом цей розв'язок можна застосувати й до майже повного кільця (рис. 24.1). Його можна також інтерпретувати для випадку, коли задані не сили, а *переміщення.*

Розглянемо переміщення (23.15). Звернемо увагу на те, що перший член у виразі для *u* може привести до *розриву* переміщень. Розглянемо рис. 24.1,б. На цьому малюнку зображене спочатку повне кільце з радіальним розрізом при $\theta = 0$. На нижній поверхні розрізу $\theta = 0$, а на верхній $\theta = 2\pi - \varepsilon$, де ε - нескінченно мала величина. Якщо обчислити u по формулі (23.15) для цих двох значень θ, то результати будуть розрізнятися на величину δ. Таким чином,

$$\delta = (u)_{\theta=2\pi-\varepsilon} - (u)_{\theta=0}. \qquad (24.1)$$

З формули (23.15) тоді одержуємо

$$\delta = -\frac{2D}{E}2\pi. \qquad (24.2)$$

Це відносний зсув двох поверхонь розрізу показано на рис. 24.1,б символом δ. Зусилля *P*, необхідне для того, щоб зробити цей зсув, знаходиться з останнього рівняння (23.8), куди потрібно підставити *D* з формули (24.1). Якщо дві поверхні приварені друг до друга після того, як накладене переміщення δ, кожна з них у вигляді дії й протидії передає на іншу зазначене зусилля *P*. Кільце при цьому перебуває в стані самонапруження, яке називають «крайовою дислокацією». Відповідний плоский деформований стан є основою для пояснення пластичної деформації в кристалах металів.

Рис. 24.1, *а* показує кільце із зазором шириною δ з паралельними берегами. Якщо спочатку зробити тонкий розріз, а потім накласти відносні переміщення, для того щоб розкрити розріз, те розривши переміщень виникне вже не для *u,* а для *v*. Його можна одержати з розв'язку §23, якщо прийняти, що права поверхня розрізу займає положення $\theta = -\frac{\pi}{2}$, а ліва -

$\theta = \frac{3\pi}{2}$. Тоді, оскільки позитивний напрямок v збігається з напрямком зростання θ, одержуємо

$$\delta = (v)_{\theta=-\pi/2} - (v)_{\theta=3\pi/2}. \qquad (24.3)$$

Використовуючи другу з формул (23.15), знаходимо

$$\delta = \frac{2D}{E}(-\frac{\pi}{2})\sin(-\frac{\pi}{2}) - \frac{2D}{E}\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi D}{E}. \qquad (24.4)$$

Той факт, що значення δ в (24.2) і (24.4) відрізняються тільки знаком, означає, що й напруження в цих двох випадках повинні відрізнятися тільки знаком. Величина P знаходиться із третього співвідношення (23.8), після чого із двох перших знаходяться A і B. Цю відповідність можна була передбачати на підставі того факту, що якщо зробити обидва розрізи, показані на рис. 24.1, *а* і *б*, то чверть кільця буде вирізана повністю. Відносне переміщення δ на рис. 24.1, *а* і відносне переміщення $-\delta$ на рис. 24.1,б можна викликати одночасно, якщо зрушити чверть кільця вправо на величину δ. Це не викличе ніяких напружень, і отже, обидва види дислокації повинні мати рівні й протилежні за знаком напруження, якщо кожна з них існує окремо. Ця обставина є прикладом загальної «теореми про еквівалентні розрізи».

§25. Вплив круглого отвору на розподіл напружень у пластинці

Рис. 35.1 зображує пластинку, піддану однорідному розтяганню величиною S у напрямку осі x. Якщо в пластинці прорублено малий круглий отвір, то розподіл напружень поблизу цього отвору зміниться; однак відповідно до принципу Сен-Венана можна зробити висновок, що цією зміною можна знехтувати на відстанях, досить великих у порівнянні з радіусом отвору a.

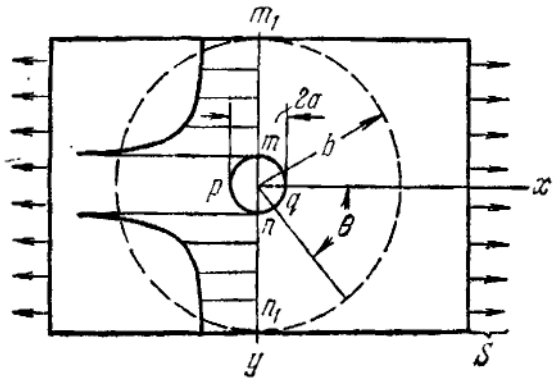


Рис. 35.1

Розглянемо частину пластинки усередині концентричної окружності радіуса b, великого в порівнянні з a. Напруження на колі радіуса b будуть власне кажучи тими ж, що й у пластині без отвору; отже, вони визначаться формулами

$$(\sigma_r)_{r=b} = S\cos^2\theta = \frac{1}{2}S(1+\cos 2\theta), \quad (\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2}S\sin 2\theta. \qquad (25.1)$$

Ці зусилля, що діють на зовнішню частину кільця, яка має внутрішній радіус $r = a$ і зовнішній радіус $r = b$, визначають розподіл напружень усередині кільця, яке можна розглядати як складену із двох частин. Перша частина викликана постійним компонентом $\frac{1}{2}S$ нормальних зусиль. Напруження, які вона викликає, можна визначити за допомогою виразів (18.5). Інша частина, викликана нормальними силами $\frac{1}{2}S\cos 2\theta$, разом з

дотичними зусиллями $-\frac{1}{2}S\sin 2\theta$ створює напруження, які можна одержати з функції напружень виду

$$\varphi = f(r)\cos 2\theta. \tag{25.2}$$

Підставляючи цей вираз в рівняння сумісності,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)=0,$$

приходимо до наступного звичайного диференціального рівняння для визначення $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{4f}{r^2}\right)=0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$f(r)=Ar^2+Br^4+C\frac{1}{r^2}+D.$$

Звідси одержуємо функцію напружень

$$\varphi=(Ar^2+Br^4+C\frac{1}{r^2}+D)\cos 2\theta, \tag{25.3}$$

а відповідні компоненти напружень, відповідно до рівнянь (17.2), визначаються формулами

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=-\left(2A+\frac{6C}{r^4}+\frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\left(2A+12Br^2+\frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta, \tag{25.4}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\left(2A+6Br^2-\frac{6C}{r^4}-\frac{2D}{r^2}\right)\sin 2\theta.$$

Сталі інтегрування потрібно тепер визначити з умов (25.1) для зовнішньої границі й з умови, що край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Ці умови дають

$$2A+\frac{6C}{b^4}+\frac{4D}{b^2}=-\frac{1}{2}S,\quad 2A+\frac{6C}{a^4}+\frac{4D}{a^2}=0,$$

$$2A+6Bb^2-\frac{6C}{b^4}-\frac{2D}{b^2}=-\frac{1}{2}S,\quad 2A+6Ba^2-\frac{6C}{a^4}-\frac{2D}{a^2}=0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь і покладаючи $a/b=0$, тобто вважаючи пластинку необмежено великою, одержуємо

$$A=-\frac{S}{4},\ B=0,\ C=-\frac{a^2}{4}S,\ D=\frac{a^2}{4}S.$$

Підставляючи ці значення сталих у рівняння (25.4) і додаючи напруження, викликувані рівномірним розтяганням інтенсивності $\frac{1}{2}S$, що діє на зовнішній границі, і знайдені з рівнянь (18.5), знаходимо

$$\sigma_r = \frac{S}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{S}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{S}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta, \qquad (25.5)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2}\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta.$$

Переміщення u і v можуть бути звідси отримані з використанням рівнянь (20.1-4) з точністю до зсувів абсолютно твердого тіла. Це пропонується зробити читачеві в якості вправи. При цьому переміщення не містять розривів.

Якщо радіус r дуже великий, напруження σ_r і $\tau_{r\theta}$ наближаються до значень, що дають рівняннями (25.1). На краю отвору $r = a$ одержуємо

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = S - 2S\cos 2\theta.$$

Можна бачити, що напруження σ_θ досягає максимального значення, коли $\theta = \frac{\pi}{2}$ або $\theta = \frac{3\pi}{2}$, тобто на кінцях min діаметра, перпендикулярного до напрямку розтягання (рис.25.1). У цих точках $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$. Це максимальне розтягувальне напруження втричі більше постійного напруження S, прикладеного на кінцях пластинки.

У точках p і q, де θ дорівнює π і 0, одержуємо

$$\sigma_\theta = -S,$$

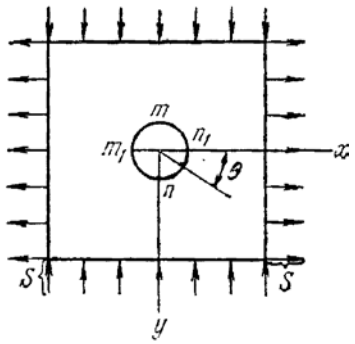
таким чином, в окружному напрямку в цих точках діє стискаюче напруження.

Для поперечного перерізу пластинки, що проходить через центр отвору й перпендикулярного осі x, кут $\theta = \frac{\pi}{2}$, тому з рівняння (25.5) знаходимо

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2}(2+\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}).$$

Ясно, що вплив отвору носить *локальний* характер. Зі збільшенням r напруження σ_θ наближається до значення S. Розподіл цих напружень показане на рис. 25.1 заштрихованою площею. Локальний характер напружень навколо отвору виправдує застосовність розв'язку (25.5), виведеного для нескінченно великої пластинки, до пластинки кінцевої ширини. Якщо ширина пластинки не менше чотирьох діаметрів отвору, помилка розв'язку (25.5) при обчисленні $(\sigma_\theta)_{\max}$ не перевищує 6%.

Маючи розв'язок (25.4) для розтягання або стиску в одному напрямку, за допомогою накладення можна легко одержати розв'язок для розтягання або стиску у двох перпендикулярних напрямках. Приймаючи, наприклад, розтягуючі напруження у двох перпендикулярних напрямках рівними S, знаходимо, що на границі отвору діють розтягуючі напруження $\sigma_\theta = 3S$ (див.§22). Вважаючи, що в напрямку x діє розтягуюче напруження (рис.25.2), а в напрямку y - *стискаюче* напруження $-S$, одержуємо випадок чистого



зсуву. Згідно (25.5) кільцеве напруження на границі отвору при цьому дорівнює

$$\sigma_\theta = S - 2S\cos 2\theta - \left[S - 2S\cos(2\theta - \pi)\right].$$

Рис. 25.2

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ або $\theta = \frac{3\pi}{2}$, тобто в точках n і m, знаходимо, що $\sigma_\theta = 4S$. При $\theta = 0$ або $\theta = \pi$, тобто в точках n_1 і m_1 маємо $\sigma_\theta = -4S$. Отже, при чистому зсуві для досить великої пластинки максимальне кільцеве напруження на границі отвору в чотири рази перевищує прикладене напруження чистого зсуву.

Висока концентрація напружень на краю отвору представляє великий практичний інтерес. Як приклад можна згадати отвори в палубах судів. При вигині корпуса судна в палубах викликається розтягання або стиск, а їх супроводжує висока концентрація напружень навколо отворів. Багаторазові цикли навантажень, викликані хвилями, приводять до втоми матеріалу в перенапружених частинах палуб, що може в остаточному підсумку викликати втомні тріщини. Часто виявляється необхідним зменшити концентрацію напружень навколо отворів, наприклад навколо отворів для огляду крил і фюзеляжу літака. Це можна зробити шляхом додавання буртика або підкріплювального кільця.

§26. Зосереджена сила, прикладена в деякій точці прямолінійної границі

Розглянемо зосереджену вертикальну силу P, прикладену до горизонтальної прямолінійної границі AB нескінченно великої пластинки (рис. 26.1, а). Розподіл навантаження по товщині пластинки є однорідним, як показано на рис. 26.1,б. Товщина пластинки приймається рівною одиниці, так що P - навантаження на одиницю товщини пластинки.

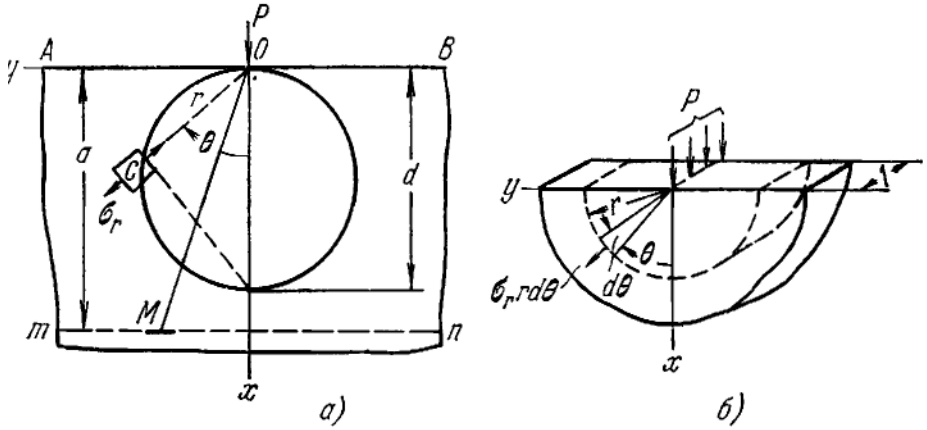


Рис. 26.1

Розподіл напружень залежить від сил, що діють на всій замкнутій границі, наприклад *ABmn,* а не тільки від умов на *AB*. Це справедливо й тоді, коли границя *ABmn* іде на нескінченність.

Існує фундаментальний розв'язок, який називають простим радіальним розподілом напружень. Будь-який елемент *C*, розташований на відстані *r* від точки прикладання сили, піддається простому стиску в радіальному напрямку. Компоненти напружень визначаються при цьому формулами

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \tag{26.1}$$

Окружні напруження σ_θ і дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю. Легко бачити, що зазначена система напружень задовольняє рівнянням рівноваги (17.1). Граничні умови на *AB* також задовольняються, тому що компоненти σ_θ і $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю уздовж прямолінійного краю пластинки, вільного від зусиль, за винятком точки прикладання сили ($r = 0$). Результуюча зусиль, що діють на циліндричну поверхню радіуса *r* (рис. 26.1, б), повинна зрівноважувати силу *P*. Вона отримується шляхом підсумовування вертикальних компонентів $\sigma_r r d\theta \cos\theta$, що діють на кожний елемент $rd\theta$ поверхні. Таким шляхом знаходимо

$$2\int_0^{\pi/2} \sigma_r r\cos\theta d\theta = -\frac{4P}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = -P.$$

Для доведення того, що (26.1) є точним розв'язком задачі, варто розглянути також умови сумісності (17.4). Наведений вище розв'язок отримується із функції напружень

$$\varphi = -\frac{P}{\pi} r\theta \sin\theta. \tag{26.2}$$

Це можна перевірити, використовуючи формули (17.2) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0, \end{aligned} \tag{26.3}$$

що збігається з розв'язком (26.1). Підставляючи функцію (26.2) в рівняння (17.4), можна легко показати, що це рівняння задовольняється.

Цей розв'язок вимагає певного розподілу зусиль на іншій частині границі. Якщо цією іншою частиною є, наприклад, півколо деякого радіуса *R,* то необхідна сила визначається формулами (26.1) при $r = R$.

Вибираючи коло довільного діаметра *a* із центром на осі *x* і дотичне до осі *y* в точці O (рис. 26.1, а), для будь-якої точки кола *C* маємо $d\cos\theta = r$. Звідси, відповідно до рівняння (26.1),

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d},$$

тобто напруження у всіх точках кола залишаються однаковими, за винятком точки прикладання навантаження *O*.

Розглянемо горизонтальну площину *mn,* що перебуває на відстані *a* від прямолінійного краю пластинки: нормальні і дотична компоненти напружень

у довільній точці M на цій площині (рис. 26.1, *а)* визначаться з умови простого стискання в радіальному напрямку

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2\theta = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos^2\theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a}\cos^4\theta,$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2\theta = -\frac{2P}{\pi a}\cos^2\theta\sin^2\theta, \qquad (26.4)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin\theta\cos\theta = -\frac{2P}{\pi}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a}\sin\theta\cos^3\theta.$$

У точці прикладання навантаження напруження теоретично необмежено велике, оскільки кінцева сила в цій точці діє на нескінченно малій площі. У дійсності навантаження розподіляється по площадці хоча й малої, але скінченої ширини. У силу цього може відбуватися локальна пластична деформація. Однак навіть у цьому випадку пластичну зону можна уявити виділеною циліндричною поверхнею малого радіуса, як показано на рис. 26.1, б. Рівняння теорії пружності в цьому випадку можна застосовувати до іншої частини пластинки.

Аналогічний розв'язок можна одержати й для горизонтальної сили P, прикладеної до прямолінійної границі напівнескінченної пластинки (Рис. 26.2).

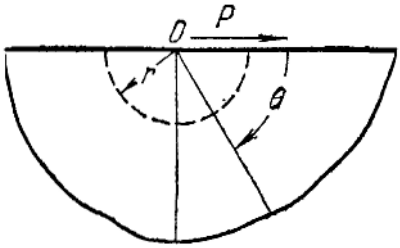


Рис. 26.2

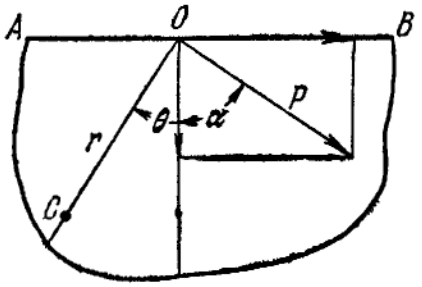


Рис. 26.3

Компоненти напружень для цього випадку даються тими ж рівняннями (26.1); однак кут θ у них потрібно при цьому вимірювати від напрямку сили, як показано на рис. 26.2. Знаходячи результуючі всіх сил, що діють на циліндричну поверхню, зображену на рис. 26.2 пунктирною лінією, одержуємо

$$-\frac{2P}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta = -P.$$

Ця результуюча зрівноважує зовнішню силу P, а оскільки компоненти напружень $\tau_{r\theta}$ і σ_θ на прямолінійній границі дорівнюють нулю, то розв'язок (26.1) задовольняє граничним умовам.

Маючи розв'язок для вертикальної і горизонтальної зосереджених сил, можна за допомогою суперпозиції одержати розв'язок для похилих сил. Розкладаючи похилу силу P на два компоненти, вертикальну $P\cos\theta$ і горизонтальну $P\sin\theta$ (рис. 26.3), з рівнянь (26.1) одержуємо формулу для радіального напруження в будь-якій точці у вигляді

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r}\left[P\cos\alpha\cos\theta + P\sin\alpha\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)\right] = -\frac{2P}{\pi r}\cos(\alpha+\theta). \qquad (26.4)$$

Таким чином, рівняння (26.1) можна використовувати для будь-якого напрямку сили, якщо в кожному випадку вимірювати кут θ від напрямку дії сили.

Знаючи розподіл напружень, можна звичайним шляхом одержати відповідні переміщення за допомогою рівнянь (20.1-4). Для сили, нормальної до прямолінійної границі (рис. 26.1), маємо

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E}\frac{\cos\theta}{r},$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} = \nu\frac{2P}{\pi E}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad (26.5)$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0.$$

Інтегруючи перше із цих рівнянь, знаходимо

$$u = -\frac{2P}{\pi E}\cos\theta\ln r + f(\theta), \qquad (26.6)$$

де $f(\theta)$ - функція однієї тільки змінної θ. Підставляючи (26/6) у друге рівняння (26.5) і інтегруючи, одержуємо

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E}\sin\theta + \frac{2P}{\pi E}\ln r\sin\theta - \int f(\theta)d\theta + F(r), \qquad (26.7)$$

де функція $F(r)$ залежить тільки від один змінної r. Підставляючи (26.6-7) у третє рівняння (26.5), робимо висновок, що

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\sin\theta + A\sin\theta + B\cos\theta, \quad F(r) = Cr, \qquad (26.8)$$

де A, B і C - сталі інтегрування, які визначаються з умов закріплення. Вирази для переміщень, відповідно до рівнянь (26.6-7), мають вигляд

$$u = -\frac{2P}{\pi E}\cos\theta\ln r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\sin\theta + A\sin\theta + B\cos\theta,$$
$$v = \frac{2\nu P}{\pi E}\sin\theta + \frac{2P}{\pi E}\ln r\sin\theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E}\theta\cos\theta + \frac{(1-\nu)P}{\pi E}\sin\theta + \qquad (26.9)$$
$$+A\cos\theta - B\sin\theta + Cr,$$

Допустимо, що умови закріплення напівнескінченної пластинки (рис. 26.1) такі, що точки осі x не мають поперечних переміщень. Тоді $\nu = 0$ при $\theta = 0$ і, відповідно до другої з формул (26.9), одержуємо, що $A = 0,\ C = 0$. При цих значеннях сталих інтегрування вертикальні переміщення точок осі x визначаються формулою

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E}\ln r + B. \qquad (26.10)$$

Щоб визначити сталу B, припустимо, що деяка точка осі x на відстані d від початку координат не має вертикального переміщення. Тоді з рівняння (26.10) знаходимо

$$B = \frac{2P}{\pi E}\ln d.$$

Маючи значення всіх сталих інтегрування, можна по формулах (26.9) визначити переміщення будь-якої точки напівнескінченної пластинки.

Розглянемо, наприклад, переміщення точок на прямолінійній границі пластинки. Горизонтальні переміщення можна одержати, покладаючи $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ у першому з виразів (26.10). Звідси одержуємо

$$(u)_{\theta=\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}, \quad (u)_{\theta=-\pi/2} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}, \tag{26.11}$$

Таким чином, всі точки прямолінійної границі мають постійне переміщення, спрямоване до початку координат. Ми можемо вважати таке переміщення фізично можливим, якщо пригадаємо, що навколо точки прикладання сили P ми подумки видалили частину матеріалу, обмежену циліндричною поверхнею малого радіуса (рис. 26.1), у межах якої рівняння теорії пружності втрачають силу. У дійсності, звичайно, відбудеться пластична деформація цього матеріалу; внаслідок цього можна припустити існування уздовж прямолінійної границі переміщень, обумовлених формулами (26.11). Вертикальні переміщення на прямолінійній границі випливають із другого виразу (26.9). З огляду на те, що переміщення v вважається позитивним, якщо воно спрямоване у бік збільшення θ, і що деформація симетрична відносно осі x, знайдемо вертикальні переміщення, спрямовані вниз, на відстані r від початку координат у вигляді

$$(v)_{\theta=-\pi/2} = -(v)_{\theta=\pi/2} = \frac{2P}{\pi E}\ln\frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E}. \tag{26.12}$$

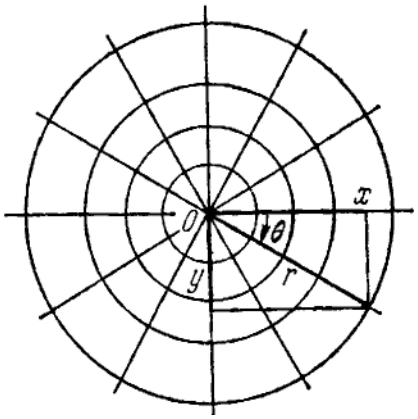
В початку координат, відповідно до цієї формули, виникає необмежено велике переміщення. Для можливості фізичного пояснення цього, як і раніше, варто припустити, що частина матеріалу навколо точки прикладання навантаження вирізана циліндричною поверхнею малого радіуса. Для інших точок границі рівняння (26.12) дає скінчені переміщення.

РОЗДІЛ 4. ВИКОРИСТАННЯ ТФКЗ В ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

§27. Основні поняття теорії функцій комплексної змінної

При розв'язуванні вище розглянутих завдань було зручно використати декартові й полярні координати. Для завдань із іншими границями - у вигляді еліпсів, гіпербол, неконцентричних окружностей і більш складних кривих зручно застосовувати інші системи координат. При введенні таких систем координат, а також при побудові відповідних функцій напружень зручно використати комплексні змінні.

За допомогою двох дійсних чисел x, y можна утворити комплексне число $x+iy$, де $i=\sqrt{-1}$ - так звана уявна одиниця. Оскільки i не належить множині дійсних чисел, то варто визначити для комплексних чисел поняття рівності, додавання, віднімання, множення і ділення. Так, по визначенню, якщо $x+iy=x'+iy'$, то $x=x'$, $y=y'$. Інші операції визначаються так само, як і для дійсних чисел. Наприклад, $(x+iy)^2=x^2+2ixy+(iy)^2=x^2+2ixy-y^2$, тому що $i^2=-1$.



Переходячи до полярних координат, показаних на рис. 27.1, маємо тригонометричне представлення комплексного числа

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (27.1)$$

Використовуючи відому формулу Ейлера $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, отримаємо експоненціальне представлення комплексного числа $z=x+iy=re^{i\varphi}$.

Рис. 27.1.

Алгебраїчні, тригонометричні, експоненціальніні, логарифмічні й інші функції від z утворюються так само, як і від дійсної змінної, якщо тільки приймається аналітичне, а не геометричне визначення. Таким чином, за допомогою відповідних степеневних рядів можна визначити функції $\sin z$, $\cos z$ і e^z. Будь-яку таку функцію можна розкласти на дійсну й уявну частини, тобто представити у формі $\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ де $\alpha(x,y)$ - дійсна частина, а $\beta(x,y)$ - уявна частина. Обидві ці частини є звичайними *дійсними* функціями x і y і не містять i. Наприклад, якщо функція $f(z)$ дорівнює $\frac{1}{z}$, то одержуємо

$$f(z)=\frac{1}{x+iy}=\frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{(-y)}{x^2+y^2}. \qquad (27.2)$$

При виділенні дійсних і уявних частин зручніше за все там, де це можливо, використати експонентні функції. Наприклад,

$$shz = \frac{1}{2}\left[e^{x+iy} - e^{-(x+iy)} \right] = \frac{1}{2}\left[(e^x - e^{-x})\cos y + i(e^x + e^{-x})\sin y \right] =$$

$$= shx\cos y + ichx\sin y,$$

аналогічно

$$chz = chx\cos y + ishx\sin y.$$

Для кожної функції комплексної змінної можна одержати, відповідно до визначення, спряжену функцію шляхом заміни всюди i на $-i$. Добуток самої функції на спряжену буде дійсною функцією.

Похідна функції $f(z)$ по z, за визначенням, виражається формулою

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \qquad (27.3)$$

де $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$; $\Delta z \to 0$ означає, зрозуміло, що $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$. Змінні x та y можна завжди представляти у вигляді декартових координат точки на площині. Тоді величини Δx і Δy характеризують переміщення у деяку сусідню точку. На перший погляд можна чекати, що формула (27.3) буде різною для різних напрямків переміщення. Проте границя в (27.3) визначається через z і Δz точно так само, як якби це були дійсні числа. При цьому мають місце й відповідні формули, як, наприклад

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z, \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

незалежно від вибору Δz, Δx і Δy. Отже, можна сказати, що всі ці функції можуть утворюватися з z формально тим же шляхом, що й похідні дійсної функції, яка залежить тільки від z. Ці похідні є однаковими для всіх напрямків приросту Δz у точці z. Такі функції називаються аналітичними.

Аналітична функція $f(z)$ має невизначений інтеграл, який визначається як функція, для якої функція $f(z)$ є її похідною по z і позначається через $\int f(z)dz$. Наприклад, якщо $f(z) = \frac{1}{z}$, то

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + C.$$

Стала інтегрування C є тепер комплексним числом $A + iB$, що містить дві дійсні довільні сталі.

Аналітичну функцію $f(z)$ можна розглядати як функцію від x і y, яка має частинні похідні. Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{d}{dz} f(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z),$$

оскільки $dz/dx = 1$. Аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = if'(z),$$

оскільки $dz/dy = i$.

Якщо $f(z)$ представити у формі $\alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ то одержимо

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

Порівнюючи ці рівності, отримаємо

$$i\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

Остання рівність вимагає рівності порізно його дійсних і комплексних частин; звідси, з урахуванням, що $i^2 = -1$, знаходимо

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}. \tag{27.4}$$

Ми одержали *рівняння Коші - Рімана.* Вилучаючи β шляхом диференціювання першого рівняння по x, другого - по y і додавання одержуваних рівностей, матимемо

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0.$$

Це рівняння називається *рівнянням Лапласа,* а будь-який його розв'язок називається гармонійною функцією. Аналогічно, вилучаючи α з рівнянь (27.4), знайдемо

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0.$$

Отже, якщо дві функції α і β змінних x і y є дійсною і уявною частинами деякої аналітичної функції $f(z)$, то кожна з них буде розв'язком рівняння Лапласа. Функції α і β називаються *спряженими* гармонійними функціями. Ясно, що якщо дана деяку гармонійна функція α, рівняння (27.4) будуть із точністю до сталої визначати іншу функцію β, що є спряженою до функції α.

Як приклади знаходження гармонійних функцій з аналітичних функцій z розглянемо функції $e^{inz}, z^n, \ln z,$ де n - дійсна стала. Одержуємо залежність

$$e^{inz} = e^{inx}e^{-ny} = e^{-ny}\cos nx + ie^{-ny}\sin nx,$$

яка показує, що $e^{-ny}\cos nx$ і $e^{-ny}\sin nx$ - гармонійні функції. Замінивши n на $-n$, знаходимо, що $e^{ny}\cos nx$ і $e^{ny}\sin nx$ також гармонійні функції. Звідси випливає, що й функції $\mathrm{sh}ny\sin nx, ..., \mathrm{ch}ny\sin nx, ..., \mathrm{sh}ny\cos nx, ..., \mathrm{ch}ny\cos nx$ - гармонійні функції, тому що вони являють собою результат додавання й віднімання попередніх функцій з коефіцієнтами 1/2. Зі співвідношення

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta$$

одержуємо гармонійні функції

$$r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta,\ r^{-n}\cos n\theta,\ r^{-n}\sin n\theta.$$

З виразу

$$\ln z = \ln re^{i\varphi} = \ln r + i\theta$$

знаходимо гармонійні функції $ln\ r$ і θ. Легко перевірити, що вказані функції задовольняють рівнянню Лапласа в полярних координатах (див. рівняння (17.3))

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \qquad (27.5)$$

§28. Функції напружень, виражені через гармонійні комплексні функції

Якщо ψ - деяка функція від x і y, те за допомогою операції диференціювання знаходимо, що

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\psi)=x\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (28.1)$$

Якщо ψ - гармонійна функція, то дужка в правій частині обертається в нуль. При цьому функція $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ також є гармонійною, оскільки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=0.$$

Таким чином, повторне застосування оператора Лапласа до виразу (28.1) дає

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x\psi)=0 \qquad (28.2)$$

що можна переписати також у вигляді

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)(x\psi)=0.$$

Порівняння цих рівнянь з рівнянням (12.4) або (12.5)показує, що функція $x\psi$ може використовуватися як функція напружень, якщо ψ - гармонійна функція. Те ж саме справедливо й відносно функції $y\psi$, а також, зрозуміло, відносно самої функції ψ. Шляхом безпосереднього диференціювання можна легко показати, що $(x^2+y^2)\psi$, тобто $r^2\psi$, також задовольняє тому ж самому диференціальному рівнянню й може прийматися як функція напружень, якщо ψ - гармонійна функція.

Питання про те, чи може бути отримана в такий спосіб будь-яка функція напружень, залишається для нас відкритим. Але відповідь на нього буде отримано відразу ж у процесі вираження загальної функції напружень через дві довільні функції.

Позначаючи оператор Лапласа $\nabla^2\equiv\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, можна записати рівняння для функції Ері у вигляді $\Delta\Delta\varphi=0,$ або $\Delta^2\varphi=0.$ Позначаючи через P оператор $\Delta\varphi=\sigma_x+\sigma_y,$ зауважуємо, що P - гармонійна функція й, отже, повинна мати спряжену гармонійну функцію $Q.$ Отже, $P+iQ$ - аналітична функція від $z,$ і можна записати

$$f(z)=P+iQ.$$

Інтеграл від цієї функції по z являє собою іншу аналітичну функцію,

скажімо, $4\psi(z)$. Тоді, позначаючи дійсну й уявну частини $\psi(z)$ через p і q, одержуємо

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)dz$$

звідки $\psi(z) = \frac{1}{4} f(z)$. Крім того, одержуємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\psi(z) = \psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4}(P + iQ).$$

Прирівнюючи дійсні частини в першому й останньому членах, знаходимо

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4}P.$$

Оскільки p і q - спряжені функції, вони задовольняють рівнянням Коші-Рімана (27.4), звідки

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P.$$

Оскільки $P = \Delta\varphi$, то з останніх рівнянь випливає, що $\varphi - xp - yq$ - гармонійна функція; дійсно,

$$\nabla^2(\varphi - xp - yq) = \nabla^2\varphi - 2\frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{\partial q}{\partial y} = 0. \qquad (28.3)$$

Таким чином, для будь-якої функції напружень φ маємо $\varphi - xp - yq = p_1$, де p_1 - деяка гармонійна функція. Отже,

$$\varphi = xp + yq + p_1, \qquad (28.4)$$

Це співвідношення показує, що будь-яка функція напружень може бути утворена з обраних відповідним чином спряжених функцій p і q і гармонійної функції p_1. Вираз (28.4) досить корисний. Відмітимо, однак, що використання обох функцій p і q не обов'язково. Замість рівняння (28.3) ми можемо записати

$$\nabla^2(\varphi - 2xp) = \nabla^2\varphi - 4\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

а це показує, що функція $\varphi - 2xp$ є гармонійною, рівною, скажімо, p_2. У силу цього будь-яку функцію напружень можна представити у формі $\varphi = 2xp + p_2$, де p і p_2 - відповідним чином підібрані гармонійні функції.

Повертаючись до рівняння (28.4), уведемо функцію q_1, що є гармонійною й спряженою до p_2, і запишемо $\chi(z) = p_1 + iq_1$. Тоді легко перевірити, що дійсна частина функції $(x - iy)(p + iq) + p_1 - iq_1$ тотожно дорівнює правій частині рівняння (28.4). Отже, функцію напружень можна представити у вигляді

$$\varphi = \mathrm{Re}\left[\overline{z}\psi(z) + \chi(z)\right], \qquad (28.5)$$

де символ Re позначає «дійсну частину», $\overline{z} = x - iy$, а $\psi(z)$ і $\chi(z)$ - відповідним чином підібрані аналітичні функції. І навпаки, при будь-якому виборі $\psi(z)$ і $\chi(z)$ рівняння (28.5) дає функцію напружень. Записуючи

«комплексну функцію напружень», що міститься в дужках у виразі (28.5), як $\overline{z}z\frac{\psi(z)}{z}+\chi(z)$, і з огляду на те, що $\overline{z}z=r^2$ і $\frac{\psi(z)}{z}$ все ще є функцією від z, знаходимо, що будь-яка функція напружень може бути представлена у вигляді $r^2p_4+p_5$, де p_4 і p_5 – гармонійні функції.

§29. Переміщення, що відповідають заданій функції напружень

Залежності між напруженнями і деформаціями для плоского напруженого стану, виражені рівняннями (6.1), можна записати в наступному вигляді:

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma_x-\nu\sigma_y,\quad E\frac{\partial v}{\partial y}=\sigma_y-\nu\sigma_x,$$
$$G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\tau_{xy}. \qquad (29.1)$$

Вносячись у перше із цих співвідношень функцію напружень і враховуючи, що $P=\Delta\varphi$, одержуємо

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left(P-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+P,$$

аналогічно

$$E\frac{\partial v}{\partial y}=-(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+P.$$

Проте, відповідно до рівностей §28 $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{P}{4}$, у наведених вище рівняннях можна замінити P на $4\frac{\partial p}{\partial x}$ і $4\frac{\partial q}{\partial y}$. Звідси, після ділення на $(1+\nu)$, одержуємо

$$2G\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{4}{1+\nu}\frac{\partial p}{\partial x},\quad 2G\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{4}{1+\nu}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Інтегрування цих рівнянь приводить до співвідношень

$$2Gu=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{4}{1+\nu}p+f(y),\quad 2Gv=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{4}{1+\nu}q+f_1(x). \qquad (29.2)$$

де $f(y)$ і $f_1(x)$ - довільні функції. Якщо ці вирази підставити в ліву частину другого рівняння (29.1), то одержимо

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{2}{1+\nu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{df}{dy}+\frac{1}{2}\frac{df_1}{dx}=\tau_{xy}.$$

Але перший член у лівій частині цього рівняння дорівнює τ_{xy}, а дужка обертається в нуль, оскільки p і q - спряжені гармонійні функції, що задовольняють рівнянням Коші - Рімана (§27). Звідси $\frac{df}{dy}+\frac{df_1}{dx}=0$, що обумовлює

$$\frac{df}{dy} = A, \quad \frac{df_1}{dx} = -A,$$

де A - стала. Звідси випливає, що члени $f(y)$ і $f_1(x)$ у рівнянні (29.2) являють собою переміщення абсолютно твердого тіла. Опускаючи ці члени, можна переписати рівняння (29.2) у вигляді

$$2Gu = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu}p, \quad 2Gv = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu}q \tag{29.3}$$

і просто мати на увазі, що в (29.3) можна додати переміщення абсолютно твердого тіла. Ці рівняння дозволяють нам знайти u і v, якщо відомо функцію φ. Насамперед ми повинні, знайшовши $P = \Delta\varphi$, визначити спряжену функцію Q за допомогою рівнянь Коші – Рімана

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

побудувати функцію $f(z) = P + iQ$ і за допомогою інтегрування функції $f(z)$, як це зроблено в §28 ($\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)dz$), одержати p і q. Далі можна знайти всі члени рівнянь (29.3).

Корисність рівнянь (29.3) виявляється в тих випадках, коли метод визначення переміщень, використаний у розділах 2 і 3, непридатний.

§30. Представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали

Досі ми виражали компоненти переміщення й напружень через функцію напружень φ. Але оскільки рівність (28.5) виражає φ через дві функції $\psi(z)$ і $\chi(z)$, то через ці два «комплексні потенціали» можна виразити також напруження й переміщення.

Нагадаємо, що будь-яка комплексна функція $f(z)$ може бути представлена у формі $\alpha + i\beta$, де α і β - дійсні функції. Їй відповідає комплексно *спряжена* функція $\alpha - i\beta$, що отримується із функції $f(z)$, якщо всюди замінити i на $-i$. При цьому використовується наступне позначення:

$$\overline{f}(\overline{z}) = \alpha - i\beta. \tag{30.1}$$

Таким чином, якщо $f(z) = e^{inz}$, то $\overline{f}(\overline{z}) = e^{-in\overline{z}} = e^{-in(x-iy)} = e^{-inx}e^{-ny}$.

Відзначимо відмінність цього виразу від $f(\overline{z}) = e^{in\overline{z}}$, що ілюструє зміст риски комплексного спряження над функцією $f(z)$ у рівності (30.1) Очевидно,

$$f(z) + \overline{f}(\overline{z}) = 2\alpha = 2\,\mathrm{Re}\, f(z).$$

Тим же шляхом можна показати, що якщо додати до функції, що входить у дужки в рівності (28.5), спряжену їй функцію, то сума буде дорівнювати подвоєній дійсній частині згаданої функції. Отже, рівність (28.5) можна замінити наступною:

$$2\varphi = \overline{z}\psi(z) + \chi(z) + z\overline{\psi}(\overline{z}) + \overline{\chi}(\overline{z}). \tag{30.2}$$

Шляхом диференціювання знаходимо

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \overline{z}\psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\psi}(\overline{z}) + \overline{\chi}'(\overline{z}),$$

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = i\left[\overline{z}\psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\psi}(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})\right].$$

Якщо другу із цих рівностей помножити на i і скласти з першою, то одержуємо рівність

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}'(\overline{z}). \qquad (30.3)$$

Повторюючи ці викладки з рівностями (29.3), знаходимо

$$2G(u+iv) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{4}{1+\nu}(p+iq). \qquad (30.4)$$

Використовуючи співвідношення $\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)dz$ (§28) і наведену вище рівність (30.3), одержуємо

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\psi(z) - z\overline{\psi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z}). \qquad (30.5)$$

Ця формула дозволяє визначити u і v для плоского напруженого стану, якщо задані комплексні потенціали $\psi(z)$ і $\chi(z)$. Для випадку плоскої деформації, відповідно до § 14, у правій частині формули (30.5) v потрібно замінити на $\frac{\nu}{1-\nu}$.

Компоненти напружень можна одержати безпосередньо, беручи другі похідні від обох частин співвідношення (30.2). Однак, маючи на увазі застосування до криволінійних координат, краще діяти іншим способом. Диференціюючи рівність (30.3) по x, одержуємо

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \psi'(z) + z\overline{\psi}''(\overline{z}) + \overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}''(\overline{z}). \qquad (30.6)$$

Диференціюючи рівність (30.2) по y і помноживши на i, маємо

$$i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\psi'(z) + z\overline{\psi}''(\overline{z}) - \overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}''(\overline{z}). \qquad (30.7)$$

Віднімаючи й додаючи рівняння (30.6) і (30.7), можна одержати більш прості подання

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\psi'(z) + 2\overline{\psi}'(\overline{z}) = 4\,\mathrm{Re}\,\psi'(z), \qquad (30.8)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\left[z\overline{\psi}''(\overline{z}) + \overline{\chi}''(\overline{z})\right] \qquad (30.9)$$

Ці результати та рівняння (30.5) були отримані Г.В.Колосовим.

Заміна i на $-i$ в обох частинах співвідношення (30.9) дає

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\overline{z}\psi''(z) + \chi''(z)\right]. \qquad (30.10)$$

Відокремлюючи дійсну й уявну частини рівностей (30.10) або (30.9), ми одержимо вираз для $\sigma_x - \sigma_y$ та $2\tau_{xy}$. Таким чином, два співвідношення (30.8) і (30.10) визначають компоненти напружень через комплексні потенціали $\psi(z)$ і $\chi(z)$. Отже, задавши певні функції $\psi(z)$ і $\chi(z)$, ми знайдемо з рівнянь (30.8) і (30.10) можливий напружений стан, а відповідні цьому стану

переміщення легко одержати з рівняння (30.5).

Як просту ілюстрацію цього методу розглянемо поліноміальну систему напружень, що обговорювалася в §13. Функцію напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня можна одержати зі співвідношення (30.2), якщо покласти

$$\psi(z)=(a_5+ib_5)z^4,\ \chi(z)=(c_5+id_5)z^5,$$

де a_5, b_5, c_5, d_5 - довільні коефіцієнти. Звідси

$$\psi'(z)=4(a_5+ib_5)z^3,\ \chi'(z)=5(c_5+id_5)z^4,$$

$$\psi''(z)=12(a_5+ib_5)z^2,\ \chi''(z)=20(c_5+id_5)z^3.$$

З огляду на ці формули, зі співвідношень (30.8) і (30/10) одержимо

$$\sigma_x+\sigma_y=4\,\mathrm{Re}\,4(a_5+ib_5)z^3=16\,\mathrm{Re}(a_5+ib_5)\times$$

$$\times\left[x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^2)\right]=16a_5(x^3-3xy^2)-16b_5(3x^2y-y^3),$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[12(a_5+ib_5)\bar{z}z^2+20(c_5+id_5)z^3\right]=$$

$$=24(a_5+ib_5)(x-iy)(x+iy)^2+40(c_5+id_5)(x+iy)^3=$$

$$=[24a_5x(x^2+y^2)-24b_5y(x^2+y^2)+40c_5(x^3-3xy^2)-40d_5(3x^2y-y^3)]+$$

$$+i[24a_5y(x^2+y^2)+24b_5x(x^2+y^2)+40c_5(3x^2y-y^3)+40d_5(x^3-3xy^2)].$$

Вирази у квадратних дужках визначають відповідно $\sigma_y-\sigma_x$ і $2\tau_{xy}$. Компоненти переміщення, що відповідають цьому розподілу напружень, легко одержати з рівності (30.5), що приводить до залежності

$$2G(u+iv)=\frac{3-\nu}{1+\nu}(a_5+ib_5)z^4-4(a_5-ib_5)z\bar{z}^3-5(c^5-id^5)\bar{z}^4.$$

Зрозуміло, що поліноміальна функція напружень, яка має всі члени будь-якого заданого ступеня *n (n* > 2), може містити тільки чотири незалежні дійсні сталі.

§31. Результуючих напружень, що діють по деякій кривій. Граничні умови

На мал. 31.1, *α* показано дугу кривої *AB,* проведеної на пластинці. Сила, що діє на елемент *ds* дуги, з якої матеріал ліворуч від елемента *ds* діє на матеріал, розташований праворуч від *ds*, при переході від *A* до *B* може бути представлена компонентами *X ds* і *Y ds*. Тоді з рівнянь (7.1) отримуємо

$$\bar{X}=\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha,$$
$$\bar{Y}=\sigma_y\sin\alpha+\tau_{xy}\cos\alpha,\qquad(31.1)$$

де α-кут між лівосторонньою (при русі від *A* до *B*) нормаллю *N* і віссю *x*. Малій дузі *ds*, як показано на мал. 31.1, *б,* відповідають відрізки *dx* і *dy.*

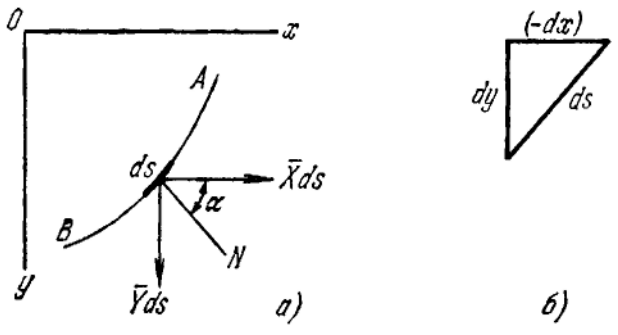


Рис. 31.1

При проходженні уздовж дуги *ds* у напрямку *AB* значення *x* зменшуються і *dx* негативне. *Довжина*

горизонтальної сторони елементарного трикутника (мал. 114,6) тому дорівнює $-dx$. Таким чином,

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

Вносячи ці значення з урахуванням залежностей

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

у рівняння (31.1), знаходимо

$$\bar{X} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

$$\bar{Y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right). \qquad (31.2)$$

Отже, компоненти F_x, F_y результуючого зусилля на дузі AB дорівнюють

$$F_x = \int_A^B \bar{X}ds = \int_A^B \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)ds = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\Bigg|_A^B,$$

$$F_y = \int_A^B \bar{Y}ds = -\int_A^B \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)ds = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\Bigg|_A^B, \qquad (31.3)$$

де квадратна дужка означає різницю значень укладеної в неї величини в точках A и B.

Зусилля, що діє на дугу AB, дає наступний момент у напрямку годинникової стрілки щодо точки O (див. (31.2)):

$$M = \int_A^B x\bar{Y}ds - \int_A^B y\bar{X}ds = -\int_A^B\left[xd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + yd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right].$$

Тут використані рівняння (31.2). Після інтегрування по частинам одержуємо

$$M = [\varphi]\Big|_A^B - \left[x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\Bigg|_A^B. \qquad (31.4)$$

З рівнянь (31.2) ми бачимо, що якщо крива AB являє собою ненавантажену границю, так що X і Y дорівнюють нулю, то похідні $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ уздовж AB повинні мати постійні значення. Якщо на кривій AB задані навантаження, то рівняння (32.2) показують, що вони визначаються за допомогою значень $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ і $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ уздовж границі. Це еквівалентно завданню похідних $\frac{d\varphi}{ds}$ уздовж границі і $\frac{d\varphi}{dn}$ уздовж нормалі до AB. Їх можна вважати відомими, якщо уздовж AB задані φ і $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Продовжимо тепер дугу так, щоб утворилася замкнута крива, і точка *B* збіглася із точкою *A*. При цьому будемо вважати, що точка *B* досягає *A*, рухаючись по дузі, тобто по замкнутому контуру *AB*. Тоді рівняння (31.3) і (31.4) дають результуюче зусилля й момент від напружень, що діють на частину пластинки, обмежену згаданим замкнутим контуром.

За допомогою комплексних потенціалів $\psi(z)$ і $\chi(z)$, згідно (30.2), рівняння (31.3) можна записати у вигляді

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\Bigg|_A^B = -i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\Bigg|_A^B.$$

Використовуючи рівняння (30.3), маємо

$$F_x + iF_y = -i\left[\psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}'(\overline{z})\right]\Big|_A^B. \qquad (31.5)$$

Рівність (31.4) тоді приймає вид

$$M = \mathrm{Re}\left[-z\overline{z}\overline{\psi}'(\overline{z}) + \chi(z) - \overline{z}\,\overline{\chi}'(\overline{z})\right]\Big|_A^B. \qquad 31.6)$$

У випадку замкнутого контуру, що містить початок координат, рівності (31.5-6) показують, що якщо прийняти $\psi(z)$ і $\chi(z)$ у формі z^n, де n – додатне або від'ємне ціле число, то F_x, F_y і M дорівнюють нулю, тому що при обході контуру функції в дужках повертаються до своїх початкових значень. Функція $\ln z = \ln r + i\theta$ після обходу замкнутого контуру, що оточує початок координат, не повертається до свого початкового значення, оскільки θ при цьому збільшується на 2π. Таким чином, якщо $\psi(z) = C\ln z$ або $\chi(z) = D\ln z$, де C і D - комплексні сталі, рівняння (31.5) дає ненульове значення для $F_x + iF_y$. Точно так само $\chi(z) = D\ln z$ дає ненульове значення M, якщо D - уявне число, але воно ж дає нульове значення, якщо число D дійсне.

§32. Розв'язки у еліптичних координатах. Еліптичний отвір у пластинці з однорідним напруженим станом

Еліптичні координати ξ, η визначаються рівняннями (див. рис. 32.1)

$$z = cch\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta \qquad (32.1)$$

Звідки

$$\frac{dz}{d\zeta} = csh\zeta, \quad e^{2i\alpha} = \frac{sh\zeta}{ch\zeta}, \quad x = cch\xi\cos\eta, \quad y = csh\xi\sin\eta,$$

$$\frac{x^2}{c^2ch^2\xi} + \frac{y^2}{c^2sh^2\xi} = 1.$$

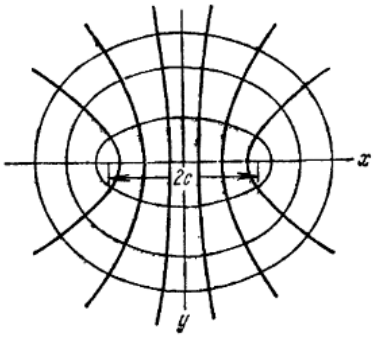


Рис. 32.1

Останнє рівняння при сталому ξ є рівнянням еліпса з піввісями $cch\xi$ і $csh\xi$ і фокусами у точках $x = \pm c$. Для різних значень ξ ми отримаємо різні еліпси з тими ж фокусами, тобто сімейство *співфокусних еліпсів* (мал. 32.1). На кожному з таких еліпсів координата ξ стала, а η змінюється в діапазоні від 0 до 2π подібно до кута θ в полярних координатах.

Розглянемо нескінченну пластинку в стані рівномірного всебічного розтягу *S*, збуреного еліптичним отвором з півосями *a* і *b*, контур отвору передбачається вільним від напружень. Ці умови означають, що

$$\sigma_x = \sigma_y = S \text{ на нескінченності } (\xi \to \infty), \tag{32.2}$$

$$\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0 \text{ на еліптичній границі отвору, де } \xi = \xi_0. \tag{32.3}$$

З рівнянь (30.8) і (30.10) знаходимо, що умова (32.2) задовольняється, якщо

$$2\,\mathrm{Re}\,\psi'(z) = S, \overline{z}\psi''(z) + \chi''(z) = 0 \text{ на нескінченності.} \tag{32.4}$$

Неперервність компонентів переміщення й напружень вимагає, щоб вони були періодичними по η з періодом 2π, у силу чого вони будуть мати ті ж значення при $\eta = 2\pi$, які вони мали при $\eta = 0$. Тому нам слід розглянути такі форми $\psi(z)$ і $\chi(z)$, які дають функцію напружень з тим же періодом. Ці форми мають вигляд

$$sh n\zeta = sh n\xi \cos n\eta + i ch n\xi \sin n\eta,$$

$$ch n\zeta = ch n\xi \cos n\eta + i sh n\xi \sin n\eta,$$

де *n* - ціле число. Функція $\chi(z) = Bc^2\zeta$, де *B* - стала, також придатна для цієї задачі. Приймаючи $\psi(z) = Acsh\zeta$, де *A* - стала, і використовуючи вираз для похідної $\frac{d\zeta}{dz}$ з (32.1) для знаходження оберненої похідної $\frac{dz}{d\zeta}$, одержуємо

$$\psi'(z) = Acch\zeta \frac{d\zeta}{dz} = A\frac{ch\zeta}{sh\zeta} = Acth\zeta. \tag{32.5}$$

На нескінченній відстані від початку координат величина ζ дорівнює нескінченності, а $cth\zeta$ дорівнює одиниці. Отже, перша з умов (32.4) задовольняється, якщо $2A = S$. З (32.5) далі одержуємо

$$\psi''(z) = -\frac{A}{c}\frac{1}{sh^3\zeta}. \tag{32.6}$$

та

$$\overline{z}\psi''(z) = -A\frac{ch\overline{\zeta}}{sh^3\zeta}. \tag{32.7}$$

Приймаючи $\chi(z) = Bc^2\zeta$, де *B* - стала, знаходимо

$$\chi'(z) = \frac{Bc}{sh\zeta}, \quad \chi''(z) = -B\frac{ch\zeta}{sh^3\zeta}. \tag{32.8}$$

Рівняння (32.7-8) показують, що кожна з функцій $\overline{z}\psi''(z)$ і $\chi''(z)$ на нескінченності обертаються в нуль. Отже, друга з умов (32.4) виконуються. Умову (32.3) можна задовольнити за допомогою належного вибору сталої *B*. В криволінійних координатах мають місце співвідношення

$$\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} = \psi'(z) + \overline{\psi}'(\overline{z}) - e^{2i\alpha}\left[\overline{z}\psi''(z) + \chi''(z)\right], \tag{32.9}$$

Функція $e^{2i\alpha}$ задана в (32.1). Звідси

$$\sigma_\xi - i\tau_{\xi\eta} = A\left(\frac{ch\zeta}{sh\zeta} + \frac{ch\bar{\zeta}}{sh\bar{\zeta}}\right) + \frac{sh\zeta}{sh\bar{\zeta}}\left(A\frac{ch\bar{\zeta}}{sh^3\zeta} + B\frac{ch\zeta}{sh^3\zeta}\right) =$$
$$= \frac{1}{sh^2\zeta\, sh\bar{\zeta}}\left\{A\left[sh\zeta\, sh(\zeta+\bar{\zeta}) + ch\bar{\zeta}\right] + Bch\zeta\right\}. \qquad (32.10)$$

На границі еліптичного отвору $\xi = \xi_0$ і $\zeta + \bar{\zeta} = 2\zeta_0$, $\bar{\zeta} = 2\zeta_0 - \zeta$. При цьому (32.10) зводиться до виду

$$\frac{1}{sh^2\zeta\, sh\bar{\zeta}}\left(Ach2\xi_0 + B\right)ch\zeta.$$

У силу цього умова (32.3) задовольняється в тому випадку, якщо

$$B = -Ach2\xi_0 = -\frac{1}{2}Sch2\xi_0. \qquad (32.11)$$

Тепер ми одержуємо

$$\psi(z) = \frac{1}{2}Sc\,\mathrm{sh}\zeta, \quad \chi(z) = -\frac{1}{2}Sc^2\,\mathrm{ch}2\xi_0\cdot\zeta \qquad (32.12)$$

Всі граничні умови виконані. Однак потрібно переконатись, що комплексні потенціали (32.12) не викликають розривів у переміщенні. Декартові компоненти переміщення можна знайти з рівняння (30.5), що у цьому випадку приводить до залежності

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu}Acsh\xi - Acch\xi cth\bar{\xi} - \frac{Bc}{sh\bar{\xi}}, \qquad (32.13)$$

де A=S/2, а B визначається виразом (32.11). Гіперболічні функції мають дійсну й уявну частини, періодичні по η. Отже, якщо обійти будь-який еліптичний контур $\xi = const$ усередині пластинки, переміщення u і v придбають свої початкові значення. Це означає, що комплексні потенціали (32.12) дають розв'язок задачі.

Аналогічно до (30.8) в еліптичних координатах з урахуванням (32.5) і A=S/2 маємо

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4\,\mathrm{Re}\,\psi'(z) = 2S\,\mathrm{Re}\,cth\zeta.$$

Але $cth\zeta = \dfrac{sh2\xi - i\sin 2\eta}{ch2\xi - \cos 2\eta}$. Звідси $\sigma_\xi + \sigma_\eta = \dfrac{2Ssh2\xi}{ch2\xi - \cos 2\eta}$.

Оскільки σ_ξ на краю отвору дорівнює нулю, то з останньої рівності на краю отвору отримуємо

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = \frac{2Ssh2\xi_0}{ch2\xi_0 - \cos 2\eta}.$$

Найбільше значення σ_η виявляється на кінцях головної осі, де η приймає значення 0 і π, а cos2η= 1, дорівнює

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \frac{2Ssh2\xi_0}{ch2\xi_0 - 1}.$$

Нехай піввісі еліптичного отвору дорівнюють a і b. Отже, згідно (32.1)

$cch\xi_0 = a,\ csh\xi_0 = b.$

$$c^2 = a^2 - b^2,\ \ sh2\xi_0 = \frac{2ab}{c^2},\ \ ch2\xi_0 = \frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

Звідси знаходимо, що

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \frac{2Sa}{b}.$$

Ця величина усе більше зростає в міру того, як еліпс стає вужчим.

Найменше значення $(\sigma_\eta)\big|_{\xi=\xi_0}$ виходить на кінцях малої осі, де $\cos 2\eta = -1$. Звідси

$$(\sigma_\eta)_{\min} = \frac{2Ssh2\xi_0}{ch2\xi_0 + 1} = \frac{2Sb}{a}.$$

При $a=b$, тобто коли еліпс перетворюється в коло, $(\sigma_\eta)_{\max}$ і $(\sigma_\eta)_{\min}$ стають рівними $2S$, що збігається з розв'язком для кругового отвору при всебічному розтягу (§25).

Задача про дію рівномірного тиску S усередині еліптичного отвору з нульовими напруженнями на нескінченності легко отримати шляхом комбінації вищенаведеного розв'язку з розв'язком для однорідного напруженого стану $\sigma|_\xi = \sigma|_\eta = -S$, який одержується з комплексного потенціалу $\psi(z) = -Sz/2$.

§33. Визначення комплексних потенціалів по заданих граничних умовах. Методи М.І.Мусхелішвілі

У попередньому параграфі було приведено приклад розв'язання задач за допомогою деякого розумного вибору комплексних потенціалів відносно простої форми, наділених відповідними властивостями. Однак існують могутніші й загальні методи відшукання потенціалів безпосередньо із заданих граничних умов, за допомогою подальшого використання теорії функцій комплексного змінного.

В §31 ми виявили, що компоненти зусилля F_x, F_y переданого по дузі *AB,* проведеної в матеріалі, даються рівністю (31.5)

$$F_x + iF_y = -i\left[\psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}'(\overline{z})\right]\Big|_A^B. \qquad (33.1)$$

Дуга $A\ B$ може становити частину замкнутої границі, наприклад, границі отвору, показаного на мал. 33.1. Тоді, якщо рухатися від точки A до точки B так, щоб матеріал залишався ліворуч, діючі на нього сили дорівнюватимуть $-F_x$ і $-F_y$. Приймемо тепер точку A за фіксовану точку на границі отвору, а B за типову точку на L. Вважаючи, що навантаження на границі отвору задане, знаходимо сили F_x, F_y як функції s (мал. 33.1) у вигляді

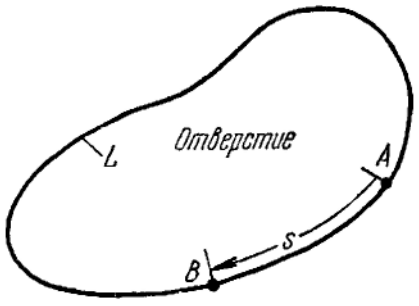


Рис. 33.1.

$$(F_x + iF_y) = f_1(s) + if_2(s), \qquad (33.2)$$

де $f_1(s)$ і $f_2(s)$ - дійсні функції. У рівнянні (33.1) значення величини в дужках у лівій частині для фіксованої точки A є

деякою сталою *C*. Позначаючи через *z* координату рухомої точки *B,* можна виразити граничні умови на краю отвору у формі

$$\psi(z) + z\overline{\psi}'(\overline{z}) + \overline{\chi}'(\overline{z}) = f_1(s) + if_2(s) \text{ на } L. \qquad (33.3)$$

Для визначення із цього рівняння двох комплексних потенціалів зручно замінити комплексну змінну *z* для будь-якої точки у фізичній області нової комплексної змінної ζ, зв'язаною залежністю

$$z = \omega(\zeta), \qquad (33.4)$$

де ω(ζ) - підібрана відповідним чином функція ζ. Таке перетворення змінних називають *конформним відображенням.* Точка *P′*, задана комплексною координатою $\zeta = \xi + i\eta$ у площині ζ (мал. 33.2, б), відповідає точці *P* (або *відображається* в точку *P*) на площині *z* (мал. 33.2, *а*), де *z* визначається формулою z=ω(ζ). У загальному випадку гладка крива *P′Q′* відображається в іншу гладку криву *PQ*. Для задач теорії пружності, у яких розглядається один некруговий отвір у нескінченній області, функція, що здійснює конформне відображення, буде вибиратися таким чином, щоб одиничне коло *ρ=1* на площині ζ відображалося на криву *L*. При цьому замість прямокутних координат ξ, η зручно використовувати полярні координати *ρ, θ*. Функція ω(ζ), крім того, буде вибиратися таким чином, щоб будь-яка точка *P′* (усередині кола або на ньому) відображалася тільки в *одну* точку *P*. Ця функція повинна бути аналітичною в кожній точці *P′*, що відображається в «матеріальну» точку *P*. В якості такої функції можна взяти розкладання в ряд Лорана

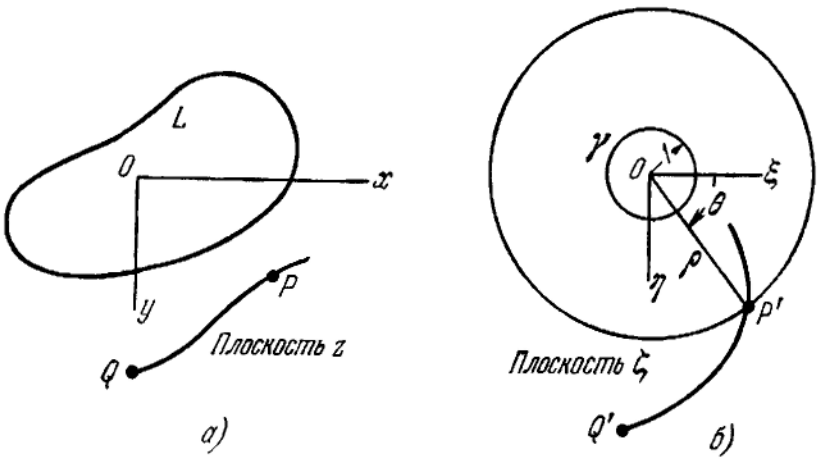


Рис. 33.2

$$\omega(\zeta) = R\zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \frac{e_2}{\zeta} + ...,$$

де R, e_1, e_2 і т.д. - сталі.

Тоді будь-яка функція від *z*, наприклад, $\psi(z)$ або $\chi'(z)$, буде також функцією від ζ, одержуваною заміною *z* на ω(ζ). Звідси

$$\psi(z) = \psi\left[\omega(\zeta)\right], \quad \chi'(z) = \chi'\left[\omega(\zeta)\right]. \qquad (33.5)$$

Переходячи до функцій від ζ, ми трохи змінимо позначення, використовуючи символи φ і ψ в іншому розумінні, а саме: функція ψ[ω(ζ)] в формулах (в) буде записуватись у вигляді φ(ζ), а функція χ'[ω(ζ)] у формулах (33.5) у вигляді $\psi(\zeta)$. Якщо переписати граничну умову (33.3) у цих нових позначеннях, то перший член у лівій частині стане рівним просто $\varphi(\zeta)$. Третій член стане рівним $\overline{\psi}(\overline{\zeta})$ і отримується за допомогою заміни кожного символу *i* у виразі ψ(ζ) на -*i*. У другому члені лівої частини (33.3) потрібно замінити *z* на ω(ζ). Перш ніж замінити $\overline{\psi}'(\overline{z})$, слід врахувати, що

$$\psi'(z)=\frac{d}{dz}\psi(z)=\frac{d}{d\zeta}\psi\left[\omega(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d}{d\zeta}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dz}=\varphi'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz}$$

і

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{1}{\dfrac{dz}{d\zeta}}=\frac{1}{\omega'(\zeta)}.$$

Відповідно до цього другий член в (33.3) заміниться виразом

$$\omega(\zeta)\left[\overline{\varphi}(\overline{\zeta})\right]=\frac{1}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})}.$$

У правій частині виразу (33.3) ми маємо комплексну функцію положення точки на кривій L. Відповідна точка на одиничному колі $\rho=1$ може бути визначена координатою θ або $e^{i\varphi}$. Покладаючи

$$\sigma=e^{i\varphi},\quad \overline{\sigma}=e^{-i\varphi},$$

ми зауважуємо, що σ є в дійсності значення ζ для характерної точки на одиничному колі. Таким чином, праву частину рівняння (33.3) можна виразити як функцію від σ і записати

$$f_1(s)+if_2(s)=f(\sigma).$$

Сталу C у виразі (33.3) можна виключити за допомогою простого додавання відповідної сталої до ψ (або до $\chi'(z)$), причому така зміна не вплине на розподіл напружень. Функція $f(\sigma)$ відповідає навантаженню, прикладеному між точками A і B, яке, згідно рівнянню (33.2), задається у вигляді $-F_y+iF_x$. Після цього гранична умова (33.3) приймає вигляд

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\overline{\sigma})}\overline{\varphi}'(\overline{\sigma})+\overline{\varphi}(\overline{\sigma})=f(\sigma). \qquad (33.6)$$

Ця умова й служить основною у методах Мусхелішвілі.

§34. Формули для комплексних потенціалів

Нашою метою зараз є відшукання потенціалів $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, що задовольняють граничним умовам (33.6) для будь-якої *зовнішньої* точки ζ одиничного кола. Тут координата ζ вибирається один раз і потім фіксується. Далі рівняння (33.6) множиться на $1/(\sigma-\zeta)$. Кожен член після цього залишається деякою функцією від σ і може бути проінтегрований по одиничному колу, позначеному далі через γ. Звідси

$$\int_\gamma\frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\overline{\sigma})}\overline{\varphi}'(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma\frac{\overline{\psi}(\overline{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}. \qquad (34.1)$$

Значення цього кроку полягає в тому, що він встановлює зв'язок з інтегралами такого роду, використовуваними в добре відомій інтегральній теоремі Коші - Гурса й інтегральній формулі Коші. Згідно із цими теоремами перший інтеграл в (34.1) визначається так:

$$\int_\gamma\frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=-2\pi i\varphi(\zeta), \qquad (34.2)$$

якщо функція $\varphi(\zeta)$ є аналітичною в кожній точці поза γ, включаючи точки на нескінченності. Значення $\varphi(\sigma)$ на γ повинні зберігати неперервність при переході до значень $\varphi(\zeta)$ поза одиничним колом. Третій інтеграл в (34.1), як можна показати, обертається в нуль, якщо функція $\psi(\zeta)$ є *аналітичною в будь-якій точці* ζ поза γ, включаючи точки на нескінченності. Крім того, функція $\psi(\sigma)$ повинна бути неперервною при переході до $\psi(\zeta)$. Другий інтеграл в (34.1) можна обчислити, як $\omega(\zeta)$ є раціональною функцією, тобто відношенням двох поліномів. В окремих випадках цей інтеграл дорівнює нулю, і рівняння (34.1) дає вираз для $\varphi(\zeta)$ у вигляді

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\gamma}. \qquad (34.3)$$

Рівняння (34.1) також приводить до подібної формули для ψ(ζ).

Вимога, щоб функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ були аналітичними поза γ, накладає деякі обмеження на типи задач, які можна розв'язувати цим методом. Розглянемо їх.

Припустимо, що відображаюча функція $\omega(\zeta)$ є всюди аналітичною в області, зайнятій матеріалом. Отже, якщо потенціали є аналітичними функціями від ζ, то вони залишаться аналітичними як функції від z у будь-якій точці розглянутої області. Звідси випливає, що аналітичними функціями є й всі їхні похідні. Із властивості аналітичності випливає неперервність цих функцій. Зокрема, вони набувають початкового значення при обході будь-якого замкнутого контуру, що оточує отвір і лежить усередині матеріалу. Звідси також випливає, що їхні спряжені функції, а також дійсні й комплексні частини порізно неперервні.

Знаючи це, ми можемо з використанням рівнянь (30.5.8-10), (31.5-6) установити наступні характеристичні властивості напружених станів, які можуть бути представлені за допомогою аналітичних потенціалів.

1. Відповідно до рівнянь (30.8-9) компоненти напружень є неперервними.

2. Відповідно до рівняння (30.5) компоненти переміщень є безперервними. Таким чином, напружений стан, що відповідає розв'язку, не може містити дислокацій.

3. Відповідно до рівняння (31.5) повне зусилля, що діє на будь-який контур, дорівнює нулю. Отже, повинно дорівнювати нулю й результуюче зусилля, прикладене до границі отвору.

4. Відповідно до рівняння (31.6) результуючий момент зусиль, прикладених до границі отвору, повинен дорівнювати нулю.

Крім того, якщо початок координат лежить усередині отвору, то всяка функція $F(z)$, аналітична в області матеріалу у всіх точках, включаючи точки на нескінченності, допускає розкладання в ряд Лорана $F(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + ...$, де $c_0,...,c_n$ - сталі. Розглянуті потенціали $\psi(z)$ і $\chi(z)$, таким чином, також допускають таке розкладання, Тоді з рівнянь (30.8-9) випливає, що:

5. Компоненти напружень на нескінченності обертаються в нуль. Таким чином, на нескінченності немає ніякого навантаження, тому що, відповідно до властивостей (3) і (4), результуючі сила або момент для нескінченного контуру дорівнюватимуть нулю.

Із цих властивостей зрозуміло, що напруження і деформації, представлені аналітичними потенціалами, повинні відповідати з само зрівноваженому навантаженню на границі отвору.

Це обмеження не є надмірно сильним. Наприклад, вплив ненавантаженого отвору в нескінченній області з навантаженням границі на нескінченності (див., наприклад, задачу в §32) можна знайти, якщо спочатку відшукати напруження при відсутності отвору. Це викликає деяке навантаження на кривій, що відповідає отвору, однак у силу того, що матеріал, який заповнює отвір, перебуває в рівновазі, це навантаження є самозрівноваженим. Далі нам потрібно визначити напруження поза отвором, викликані рівним по величині й протилежним за знаком навантаженням границі отвору, які обертаються в нуль на нескінченності. Ця задача відповідає вимогам 1-5 для аналітичних потенціалів.

Якщо потрібно досліджувати навантаження на границі отвору, що має ненульові результуюче зусилля й момент, можна виходити з розв’язку для зосередженої сили або моменту, надаючи їм необхідні результуючі значення. Ці розв’язки відповідають навантаженню, що діє на границі отвору і має задані результуючу силу й результуючий момент, але розподіленому інакше, ніж потрібно. Заданий розподіл навантаження досягається введенням деякого доступного визначенню навантаження на границі отвору, причому задача про таке навантаження відповідає вимогам, що випливають із властивостей аналітичних потенціалів.

Якщо потрібно одержати дислокаційний розв’язок, то можна виходити з відомих розв’язків задач із заданими величинами дислокаційного переносу або обертання, і отримана в такий спосіб задача буде задовольняти вимогам, що випливають із властивостей аналітичних потенціалів.

РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

§35. Вступ

Із давніх часів людина стикається із проблемами руйнування й міцності. Однак довгий час знання про міцність і руйнування матеріалів накопичувалися випадково, передавалися з покоління в покоління як секрети майстерності й відносилися швидше до галузі мистецтва, з яким ми знайомі по чудовим архітектурним ансамблям, що дивують нас і сьогодні.

Що ж таке руйнування? Справжні природа цього добре відомого явища з'ясована далеко не повністю. Катастрофи танкерів і кораблів, літаків і ракет, викликані раптовим поширенням тріщин, показала недостатність існуючих класичних розрахунків, необхідність у нових характеристиках руйнування. Таким чином, проблема руйнування набула в наші дні першочергове значення.

Явище руйнування вивчається з різних позицій, що відбивають ті або інші погляди вчених на цю проблему. Зокрема, воно вивчається з позицій механіки суцільного середовища. Для неї характерне прагнення до опису основних особливостей руйнування в рамках строго сформульованих і досить загальних моделей, застосовуваних до деяких класів матеріалів. Використання основних положень, законів і методів механіки суцільного середовища при дослідженні процесу руйнування визначило назву нової науки - «Механіка руйнування».

Можна сказати, що механіка руйнування в широкому розумінні цього поняття містить у собі ту частину науки про міцність матеріалів і конструкцій, що пов'язана з вивченням несучої здатності тіла або без урахування, або з урахуванням початкового розподілу тріщин, а також з вивченням різних закономірностей розвитку тріщин.

Основоположником механіки руйнування по праву можна вважати Галілео Галілея. Він установив, що руйнівне навантаження не залежить від довжини бруса, що розтягується, і прямо пропорційна площі поперечного перерізу.

Взагалі перший етап досліджень з механіки руйнування, пов'язаний з іменами Галілео Галілея, Р. Гука, Ш. Кулона, А. Сен-Венана, О. Мора, характеризується широким дослідженням деформівних властивостей тіл і побудовою різних критеріїв руйнування, які називають теоріями міцності. Сутність цих теорій полягає в тому, що руйнування відбувається в той момент, коли в деякій точці тіла певна комбінація таких параметрів, як напруження, деформація і т.д., досягає свого критичного значення. При такому підході сам процес поширення руйнування по об’єму тіла повністю ігнорується, що до деякої міри виправдано лише в тих випадках, коли розвиток дефектів, що приводять до втрати несучої здатності, відбувається в малому околі критичної області. У цей час при розрахунках на міцність використовуються ті або інші критерії міцності (критерії найбільшого головного або дотичного напружень тощо) залежно від типу матеріалів і

умов експлуатації. При всій важливості проведених у рамках такого підходу досліджень по теорії міцності вони є недостатніми по цілому ряду міркувань.

У зв'язку із цим важливого значення набувають задачі рівноваги пружних тіл із тріщинами. Однак розв’язки цих задач, найчастіше пов'язані з великими математичними труднощами, містять набагато більше інформації, ніж потрібно. Головним тут є питання про те, чи володіє тіло при розглянутому навантаженні несучою здатністю чи ні, тобто становить основний інтерес не сам розв’язок складної задачі рівноваги тіла із тріщинами, а існування або неіснування цього розв’язку при розглянутому навантаженні. Тому з математичної точки зору руйнування наступає при реалізації такої ситуації, що приводить до виконання деяких граничних умов, що забезпечують неіснування розв’язку відповідної задачі рівноваги тіла із тріщинами. Ці умови є інтегральними характеристиками процесу руйнування, що співзвучно із загальною глобальною концепцією руйнування твердих тіл.

У рамках феноменологічного підходу загальним для різних моделей розвитку тріщин у твердих тілах є те, що в початковий момент вважається заданим деяке кінцеве збурювання у вигляді початкових тріщин, що добре узгоджується з експериментальними даними про наявність недосконалостей структури матеріалу, якій би попередній технологічній обробці він не піддавався. Звідси при виведенні різних критеріїв міцності з урахуванням процесу руйнування одержують співвідношення, що збігаються за формою зі звичайними критеріями міцності; тільки вхідні тепер у ці співвідношення сталі залежать від координат, довжин і геометрії початкових тріщин.

Сьогодні значення досліджень з механіки руйнування виходить далеко за рамки питання про несучу здатність. Дослідження процесу руйнування становить самостійний інтерес. Керування процесом руйнування й знання його закономірностей мають величезне значення для практики.

§36. Поля напруг і зсувів в околі кінчика тріщини

Перш ніж перейти до розв’язок задачі, зазначеної в назві параграфа, нагадаємо деякі основні співвідношення теорії пружності, необхідні надалі.

Значні математичні труднощі, пов'язані з розв’язком загальних рівнянь теорії пружності, привели до необхідності побудови розв’язків для більш-менш широких класів окремих випадків. Таким, наприклад, є клас «плоских задач теорії пружності», що включає в себе два практично важливих випадки: а) деформація довгого циліндра однаковими у всіх площинах зусиллями, прикладеними до його бічної поверхні й лежачими в площинах, перпендикулярних твірним циліндра, і б) деформація пластини зусиллями, що лежать у її площині й прикладеними до її периметра.

У курсах теорії пружності дається вивід рівнянь рівноваги плоскої задачі теорії пружності (у цьому випадку маємо три рівняння рівноваги в нехтуванні масовими силами й інерційними членами). Приведемо повну систему, що замикається законом Гука для ізотропного тіла при плоскій деформації:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0,$$

$$\sigma_x=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_x,\ \ \sigma_y=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_y,\ \ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left(\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \qquad (36.1)$$

Останні співвідношення в (36.1) отримані в припущенні «малої деформації», тобто таких змін у тілі, коли похідні компонентів зміщення по x і y настільки малі, що їхніми квадратами й добутками можна знехтувати.

Система п'яти рівнянь (36.1) із частинними похідними першого порядку відносно п'яти невідомих функцій σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v є система основних рівнянь плоскої теорії пружності. У випадку довгого циліндра присутня ще компонента $\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$ (ν - коефіцієнт Пуассона), що, однак, відразу визначається після розв’язок системи рівнянь у цілому. Крім того, у випадку плоскої пластини замість λ входить пружна стала

$$\lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{E\nu}{1-\nu^2}$$

(λ, μ - сталі пружності Ламе).

Користуючись групою формул (36.1), легко вивести як систему рівнянь, що містять тільки зміщення

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u=0,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v=0, \qquad (36.2)$$

так і рівняння, що містять тільки напруження, для чого до перших двох співвідношенням (36.1) потрібно додати ще одне рівняння

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0. \qquad (36.3)$$

Якщо скористатися поданням компонентів напружень і переміщень через функцію напруження $U(x,y)$, введену в 1862 р. англійським астрономом Ері,

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\ \ \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},$$

то з (36.3) випливає, що $U(x,y)$ - бігармонічна функція:

$$\Delta\Delta U=0.$$

Будь-яку бігармонічну функцію можна виразити через аналітичні функції комплексної змінної. Зокрема, Е. Гурса (1898 р.) запропонував наступне подання бігармонічної функції через дві аналітичні функції φ, χ комплексної змінної:

$$U=\frac{1}{2}(\overline{z}\varphi+z\overline{\varphi}+\chi+\overline{\chi}). \qquad (36.4)$$

З наведених вище співвідношень і (36.4) випливає комплексне подання розв’язків плоскої задачі теорії пружності, що лежить в основі

розвинених Г.В. Колосовим і Н.І.Мусхелішвілі методів застосування ТФКЗ у теорії пружності.

Приведемо вирази для комплексного подання зсувів і напружень, отримані Г.В. Колосовим в 1909 р.:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \quad \psi(z) = \chi'(z),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right], \quad \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z),$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \qquad (36.5)$$

Тут $\kappa = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu$ для плоскої деформації, $\kappa = \dfrac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \dfrac{3 - \nu}{1 + \nu}$ для плоского напруженого стану. Співвідношення (36.5) у трохи зміненому вигляді можуть бути представлені так

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z)\right],$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$u + iv = \frac{1}{2\mu}\left[\kappa\varphi(z) - \omega(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi(z)}\right]. \qquad (36.5')$$

Тут введені наступні співвідношення (c відбиває зсув тіла як цілого):

$$\omega(z) = \int_0^z \Omega(\zeta)d\zeta + c, \quad c = a + ib.$$

Можна показати, що при будь-яких значеннях $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ визначені з (36.5) функції σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v задовольняють основним рівнянням (36.1). Інакше кажучи, (36.5) є загальний розв’язок плоскої задачі (36.1) теорії пружності. Однак при розв’язуванні практично важливих задач доводиться накладати деякі додаткові умови на розглянуті величини на границі області, що приводить до так називаних крайових задач, а співвідношення (36.5), незважаючи на свою загальність, не є конкретним розв’язком цих крайових задач.

Два спеціальних випадки співвідношень (36.5) пов'язані з іменем Вестергарда. Якщо покласти, наприклад, що

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}Z_1(z), \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2}zZ_1'(z), \qquad (36.6)$$

то зі співвідношень (36.5) одержуємо

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\,Z_1, \quad \sigma_y - \sigma_x = 2y\,\mathrm{Im}\,Z_1', \quad \tau_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,Z_1'. \qquad (36.7)$$

Розв’язок, що дається цими рівняннями, має ту властивість, що при $y = 0 : \tau_{xy} = 0$ і $\sigma_x = \sigma_y$.

Якщо скористатися законом Гука і виразити з (36.1) зміщення u, v через напруження, обумовлені співвідношеннями (36.7), то одержимо наступні вирази для випадку плоскої деформації ($\varepsilon_z = 0$) :

$$u = \frac{1 + \nu}{E}\left[(1 - 2\nu)\,\mathrm{Re}\,Z_1^0 - y\,\mathrm{Im}\,Z_1\right] \quad \left(Z_1 = \frac{dZ_1^0}{dz}\right),$$

$$v = \frac{1+\nu}{E}\left[2(1-\nu)\operatorname{Im} Z_1^0 - y\operatorname{Re} Z_1\right]. \qquad (36.8)$$

Нехай тепер

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}iZ_2(z),\ \Psi(z) = \frac{1}{2}izZ_2' + iZ_2. \qquad (36.9)$$

Тоді з тих же співвідношень (36.5) будемо мати

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\operatorname{Im} Z_2,\quad \sigma_y - \sigma_x = -2\operatorname{Im} Z_2 - 2y\operatorname{Re} Z_2',$$
$$\tau_{xy} = \operatorname{Re} Z_2 - y\operatorname{Im} Z_2'. \qquad (36.10)$$

Це розв'язок володіє тією властивістю, що уздовж лінії $y = 0$ $\sigma_y = 0$.

Аналогічно попередньому визначаємо зміщення

$$u = \frac{1+\nu}{E}\left[2(1-\nu)\operatorname{Im} Z_2^0 + y\operatorname{Re} Z_2\right] \quad \left(Z_2 = \frac{dZ_2^0}{dz}\right),$$

$$v = \frac{1+\nu}{E}\left[-(1-2\nu)\operatorname{Re} Z_2^0 - y\operatorname{Im} Z_2\right]. \qquad (36.11)$$

Однією з найважливіших особливостей при розрахунках на міцність елементів конструкцій і споруджень із тріщинами є врахування виникаючого перерозподілу напружень у результаті утворення щілин і тріщин під дією зовнішніх навантажень.

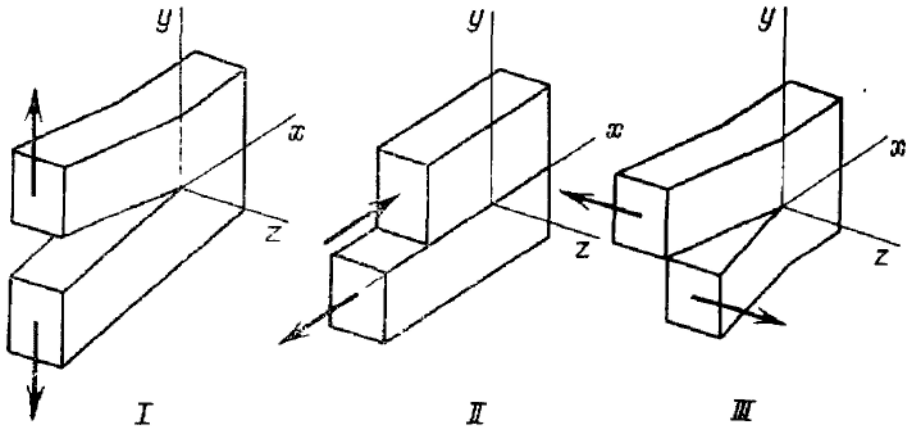


Рис. 36.1. Основні види зміщень поверхні тріщини

При цьому саме кінчик тріщини є місцем створення найбільшої концентрації напружень і вихідною точкою найімовірнішого подальшого руйнування. Тому особливого значення набуває питання дослідження напруженого стану в кінчику (вершині) тріщини. Самий загальний випадок полів деформацій і напружень біля кінчика тріщини можна одержати шляхом взаємного накладення напружень наступних окремих видів деформацій (рис. 36.1). Перший вид (I) пов'язаний з відривним зміщенням, при якому поверхні тріщини прямо розходяться одна від іншої у взаємно протилежних напрямках (симетрично щодо площин *xy* і *xz*). Другий вид (II) відповідає переміщенням, при яких поверхні тріщини ковзають одна по одній (симетрично площині *xy,* але кососиметрично відносно площини *xz* - поперечний зсув). Третій вид (III) пов'язаний з антиплоскою деформацією (розрізування ножицями), при якій одна поверхня сковзає по іншій паралельно направляючому фронту тріщини (кососиметрична деформація відносно площин *xy* і *xz* - поздовжній зсув).

Повернемося тепер до розв'язків Вестергарда й виберемо функцію Z_1, аналітичну у всій області, за винятком деякого відрізка дійсної осі, у наступному виді:

$$Z_1 = \frac{g(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \qquad (36.12)$$

Цей вираз у випадку досить гладкої функції $g(z)$ забезпечує розв'язок задачі про тріщину, розташовану уздовж дійсної осі $a < x < b,\ y = 0,$ тому що на цьому відрізку $\sigma_y = \tau_{xy} = 0.$ Звідси випливає, що

$$\operatorname{Im} g(x) = 0 \quad (a < x < b). \qquad (36.13)$$

Наприклад, функція, що дає розв'язок задачі про тріщину, що розтягується на нескінченності нормальним напруженням p і вільну від напружень на інтервалі $-l < x < l,\ y = 0,$ має вигляд

$$Z_1 = \frac{pz}{\sqrt{z^2 - l^2}}. \qquad (36.14)$$

Зробимо тепер у виразі (36.12) заміну змінної $\xi = z - b$. тоді

$$Z_1 = f(\xi)\xi^{-1/2}. \qquad (36.15)$$

В околі кінчика тріщини $x = b$, тобто при малих значеннях $|\xi|$, з (36.12) і (36.13) випливає, що функція $f(\xi)$ досить гладка, і її при $|\xi| \to 0$ можна замінити дійсною сталою $Z_1\big|_{|\xi|\to 0} = K_I \big/ \sqrt{2\pi\xi}$. Звідси випливає

$$K_I = \lim_{|\xi|\to 0} \sqrt{2\pi\xi} Z_1 \qquad (36.16)$$

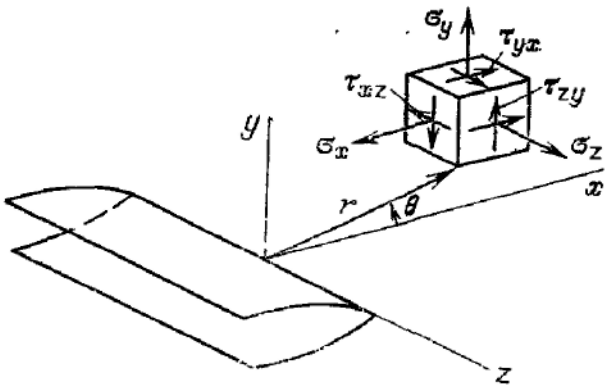


Рис.36.2. Система координат і компоненти напружень біля кінчика тріщини.

Підставимо (36.16) в (36.7) і перейдемо в цих співвідношеннях до полярних координат $\xi = re^{i\theta}$ (рис. 36.2). Тоді, відкидаючи члени більш високого порядку порівняно з r, легко отримати формули для полів напружень, що дають гарне наближення в області, де r малі в порівнянні, наприклад, з довжиною тріщини [1])

[1]) Всі формули, що нижче приводяться, відповідають випадку плоскої *деформації (w* = 0). У випадку плоского напруженого стану *(*σ_z = 0) коефіцієнт Пуассона в зміщеннях заміняється відповідною величиною (а саме, $\nu \to \nu/(1-\nu)$.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),$$
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),$$
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x+\sigma_y),$$
$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}, \quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0. \tag{36.17}$$

Зміщення в околі кінчика тріщини одержимо в результаті підстановки (36.16) в (36.8) і переходу до полярних координат:

$$u = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}),$$
$$\nu = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}). \tag{36.18}$$

Співвідношення (36.16), (36.17) і (36.18) являють собою асимптотичні вирази полів напружень і деформацій в околі кінчика тріщини для першого виду деформацій, пов'язаного з відривним зміщенням.

Перейдемо до другого виду деформацій, при якому поверхні тріщини сковзають одна по одній. Аналогічно попередньому робимо висновок, що при $|\xi| \to 0$ в околі кінчика тріщини $Z_2\big|_{|\xi|\to 0} = K_{II}\big/\sqrt{2\pi\xi}$, звідки

$$K_{II} = \lim_{|\xi|\to 0}\sqrt{2\pi\xi}Z_2. \tag{36.19}$$

Підставивши (36.19) в (36.10), (36.11), одержуємо в полярних координатах наступні асимптотичні представлення для цього випадку деформації:

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}),$$
$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x+\sigma_y), \tag{36.20}$$
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),$$
$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0,$$
$$u = \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}),$$
$$\nu = \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(2\nu-1+\sin^2\frac{\theta}{2}), \quad \omega = 0 \tag{36.21}$$

Якщо розглянути плоску задачу в цілому і скористатися співвідношеннями (36.5'), то коефіцієнти інтенсивності напружень визначаються наступним виразом:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{x\to+0,\,y=0}\left[\sqrt{2\pi x}(\sigma_y + i\tau_{xy})\right].$$

Останній із зазначених вище окремих випадків пов'язаний з антиплоскою деформацією, при якій одна поверхня ковзає по іншій паралельно фронту тріщини. У цьому випадку $w = w(x, y)$ - єдина відмінна від нуля компонента зміщення $(u = v = 0)$, а рівняння рівноваги і закон Гука приймають наступний вигляд:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{36.22}$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} = \mu\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = \mu\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{36.23}$$

звідки випливає, що при підстановці (36.23) в (36.22) зміщення задовольняють рівнянню Лапласа

$$\Delta w = 0. \tag{36.24}$$

Якщо вибрати $w = w(x, y)$ у вигляді

$$w = \frac{1}{\mu}\operatorname{Im} Z_3, \tag{36.25}$$

то з (36.23) одержуємо

$$\tau_{xz} = \operatorname{Im} Z_3', \quad \tau_{yz} = \operatorname{Re} Z_3'. \tag{36.26}$$

В околі кінчика тріщини $(y = 0,\ x < 0)$ з вершиною в точці $x = y = 0$ функція напружень Z_3 має вигляд $Z_3\big|_{|\xi|\to 0} = K_{III}\big/\sqrt{2\pi\xi}$, звідки

$$K_{III} = \lim_{|\xi|\to 0}\sqrt{2\pi\xi}\,Z_3. \tag{36.27}$$

Підставивши (36.27) в (36.25), (36.26), одержуємо вираз для зміщень і напружень біля кінчика тріщини у випадку антиплоскої деформації:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \tag{36.28}$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad u = v = 0. \tag{36.29}$$

Отримані співвідношення містять величини K_I, K_{II}, K_{III}, так звані коефіцієнти інтенсивності напружень для трьох зазначених вище видів деформацій. Ці коефіцієнти відіграють винятково важливу роль у механіці крихкого руйнування.

§37. Канонічний метод розв'язання задачі для тріщини

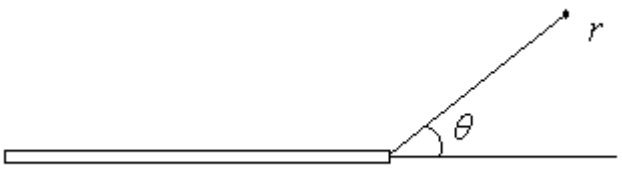


Рис. 37. 1

Розглянемо плоску статичну симетричну задачу теорії пружності для площини з напівнескінченою тріщиною - канонічну задачу для тріщини (рис. 37.1). Скористаємось при цьому полярною системою координат (r,θ) з початком O у

кінці тріщини, в якій рівняння рівноваги, умова суцільності та співвідношення, які витікають з закону Гука (u_θ, u_r - зміщення; E - модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона) мають такий вигляд

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\sigma_r-\sigma_\theta=0,\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+2\tau_{r\theta}=0, \tag{37.1}$$

$$\Delta\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right)=0\left(\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right), \tag{37.2}$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}=\frac{1+\nu}{E}\left(2\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{1-\nu}{r}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1+\nu}{E}\left[\left(1-\nu\right)\sigma_r-\nu\sigma_\theta\right]. \tag{37.3}$$

В силу симетрії обмежившись верхньою півплощиною, представимо граничні умови задачі

$$\theta=\pi,\ \sigma_\theta=\tau_{r\theta};\ \theta=0,\ \tau_{r\theta}=0,\ u_\theta=0. \tag{37.4}$$

Будемо шукати розв'язки виду

$$\sigma_\theta=r^\lambda f_1(\theta),\ \tau_{r\theta}=r^\lambda f_2(\theta),\ \sigma_r=r^\lambda f_3(\theta), \tag{37.5}$$

(f_1, f_2, f_3- невідомі функції, λ - невідома стала).

Тут $\lambda>-1$, оскільки у протилежному випадку у вершині тріщини відповідно (37.3) були б нескінчені зміщення, що не має фізичного змісту.

Вважаючи $\lambda\neq 0$, і підставляючи (37.5) у (37.1), (37.2), отримуємо систему лінійних звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{df_2}{d\theta}-f_1+\left(\lambda+1\right)f_3=0, \tag{37.6}$$

$$\frac{df_1}{d\theta}+\left(\lambda+2\right)f_2=0,$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\theta^2}+\frac{d^2 f_3}{d\theta^2}+\lambda^2\left(f_1+f_3\right)=0.$$

З перших двох рівнянь (37.6)

$$f_2=-\left(\lambda+2\right)^{-1}\frac{df_1}{d\theta},$$

$$f_3=\left(\lambda+1\right)^{-1}\left(\lambda+2\right)^{-1}\left[\frac{d^2 f_1}{d\theta^2}+\left(\lambda+2\right)f_1\right]. \tag{37.7}$$

Підставивши f_3 (37.7) у третє рівняння (37.6), приходимо до рівняння

$$\frac{d^4 f_1}{d\theta^4}+[\lambda^2+(\lambda+2)^2]\frac{d^2 f_1}{d\theta^2}+\lambda^2+(\lambda+2)^2 f_1=0. \tag{37.8}$$

Це є звичайне однорідне диференціальне рівняння 4-го порядку, якому відповідає характеристичне рівняння

$$r^4+[\lambda^2+(\lambda+2)^2]r^2+[\lambda^2+(\lambda+2)^2]=0\,.$$

Його корені є уявними: $r_{1,2} = \pm i\lambda$, $r_{1,2} = \pm i(\lambda + 2)$, тому загальний розв'язок рівняння (37.8) являє собою лінійну комбінацію тригонометричних функцій

$$f_1(\theta) = a_1 \sin(\lambda + 2)\theta + a_2 \sin\lambda\theta + a_3 \cos(\lambda + 2)\theta + a_4 \cos\lambda\theta. \qquad (37.9)$$

Підставляючи (37.9) в (37.7), знаходимо $f_2(\theta)$ і $f_3(\theta)$, після підстановки яких у формули (37.6) отримуємо

$$\sigma_\theta = r^\lambda \left[a_1 \sin(\lambda + 2)\theta + a_2 \sin\lambda\theta + a_3 \cos(\lambda + 2)\theta + a_4 \cos\lambda\theta \right], \qquad (37.10)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{r^\lambda}{\lambda + 2}\left[a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\theta + a_2\lambda\cos\lambda\theta - \right.$$

$$\left. -a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\theta + a_4\lambda\sin\lambda\theta \right],$$

$$\sigma_r = -\frac{r^\lambda}{\lambda + 2}\left[a_1(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\theta + a_2\lambda\sin\lambda\theta + \right.$$

$$\left. +a_3(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\theta + a_4\lambda\cos\lambda\theta \right]$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{(1+\nu)\lambda r^\lambda}{E(\lambda + 2)}\left[a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\theta + a_2(\lambda + 4 - 4\nu)\cos\lambda\theta - \right.$$

$$\left. -a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\theta - a_4(\lambda + 4 - 4\nu)\sin\lambda\theta \right],$$

Тут $a_1, a_2, a_3, a_4 -$ невідомі сталі.

Задовольняючи за допомогою (37.10) умовам (37.4), маємо

$$\begin{aligned} &a_1 \sin\pi\lambda + a_2 \sin\pi\lambda + a_3 \cos\pi\lambda + a_4 \cos\pi\lambda = 0 \\ &a_1(\lambda + 2)\cos\pi\lambda + a_2\lambda\cos\pi\lambda + a_3(\lambda + 2)\sin\pi\lambda - a_4 \sin\pi\lambda = 0 \\ &a_1(\lambda + 2) + a_2\lambda = 0 \\ &a_1(\lambda + 2) + a_2(\lambda + 4 - 4\nu) = 0 \end{aligned} \qquad (37.11)$$

Визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь (37.11), який дорівнює $4(1-\nu)(\lambda + 2)\sin 2\pi\lambda$, має обертатись у нуль, інакше отримаємо тривіальний розв'язок задачі. Тому $\sin 2\pi\lambda = 0$, тобто $\lambda = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$ Кожному з цих чисел відповідає розв'язок (37.10). Асимптотично найбільшому розв'язку, який нас, цікавить, відповідає $-\frac{1}{2}$. Система (37.11) у цьому випадку така:

$$a_1 + a_2 = 0,\ \tfrac{3}{2}a_3 - \tfrac{1}{2}a_4 = 0,\ \tfrac{3}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2 = 0,\ \tfrac{3}{2}a_1 + \left(\tfrac{7}{2} - 4\nu\right)a_2 = 0$$

Звідси

$$a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = a_4/3 \qquad (37.12)$$

(a_4 - довільна стала). Покладаючи $a_4 = 3K/\left(4\sqrt{2\pi}\right)$ (K- довільна стала) і підставляючи (37.12) у (37.10) отримаємо напруження в околі кінця тріщини в полярних координатах, аналогічні виразам (36.17)

$$\sigma_\theta = \frac{(3\cos\theta/2 + \cos\theta/2)K}{4\sqrt{2\pi r}},\quad \tau_{r\theta} = \frac{(\sin\theta/2 + \sin 3\theta/2)K}{4\sqrt{2\pi r}},\quad \sigma_r = \frac{(5\cos\theta/2 - \cos\theta/2)K}{4\sqrt{2\pi r}}. \qquad (37.13)$$

§38. Метод Вінера-Хопфа розв'язання задачі механіки руйнування про зрушення крайової мікротріщини

Розв'яжемо задачу математичної механіки руйнування про зрушення крайової мікротріщини довжиною l нормального розриву в прямокутній пластині, якщо по паралельним її сторонам рівномірно розподілено нормальне навантаження (рис. 38.1)

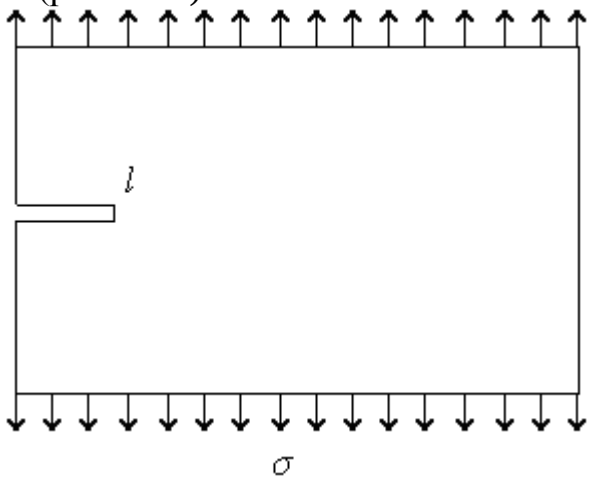


Рис. 38.1

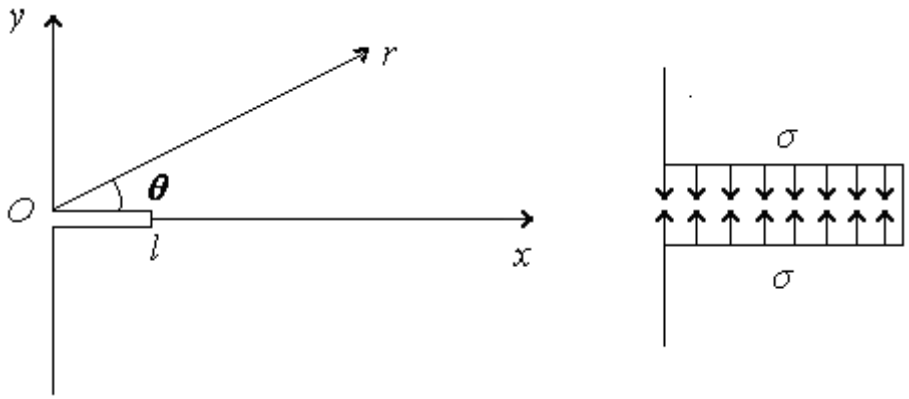


Рис. 38.2.

Оскільки l σ мала порівняно з розмірами області, як розв'язок сформульованої задачі будемо використовувати розв'язок плоскої статичної симетричної задачі А теорії пружності про коефіцієнт інтенсивності напруг для півплощини з вільною від напруг границею, яка містить крайову тріщину при умові $x, y \to \infty, \sigma_y \to \sigma, \tau_{xy} \to 0, \sigma_x \to 0$ (початок координат співпадає з початком тріщини, а вісь y - з границею).

Цей розв'язок є сумою розв'язків таких двох задач. Перша - аналогічна задача без тріщини. Підстановкою в рівнянні теорії пружності і граничні умови впевнюємось, що напруги в ній такі: $\sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0, \sigma_x = 0$. Друга задача (задача Б) відрізняється від А тим, що на берегах розрізу задані постійні нормальні стискуючі напруги σ, а на нескінченності напруження зникають (рис. 38.2).

Оскільки шуканий коефіцієнт K інтенсивності напружень співпадає з коефіцієнтом інтенсивності напружень в кінці розрізу в задачі Б, то наступна мета - визначення останнього.

Граничні умови задачі Б мають вигляд

$$\theta = \pi/2 \,(0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi/2), \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \theta = 0, \tau_{r\theta} = 0 \qquad (38.1)$$

$$\theta = 0,\ r < l,\ \sigma_\theta = -\sigma,\ \theta = 0,\ r > l,\ u_\theta = 0 \tag{38.2}$$

$$\theta = 0, r \to l - 0, \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sim \frac{2\left(1 - \nu^2\right)}{E} \frac{K}{\sqrt{2\pi\left(l - r\right)}} \tag{38.3}$$

$$\theta = 0, r \to l + 0, \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r - l)}},\ V(\sigma_\theta; \tau_{r\theta}; \sigma_r) = O(1);$$

$$r \to \infty,\ V = O(1/r^{1+\delta}) \tag{38.4}$$

($0 < \delta$ - стала).

Друга формула (38.2) - наслідок результатів М.І.Мусхелішвілі [2] із загальної площинної статичної задачі теорії пружності для півплощини з криволінійною границею.

Для побудови точного аналітичного рішення краєвої задачі (37.1)-(37.3) з граничними умовами (38.1)-(38.4) застосуємо метод Вінера-Хопфа [5].

Застосуємо інтегральне перетворення Мелліна [6]

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r) r^p dr \tag{38.5}$$

з компонентним параметром p до рівнянь (37.1), (37.2). Трансформанти $\sigma_\theta^*, \tau_{r\theta}^*, \sigma_r^*, \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*, \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^*$ існують і є аналітичними в смузі $-1 < \operatorname{Re} p < \delta$ в силу (38.3) та відомих ознак збіжності невласних інтегралів типу (38.5) [7]. Відносно перших трьох з них при фіксованому p, що лежить у даній смузі, отримаємо систему трьох лінійних звичайних диференційних рівнянь, яка, подібно до того, як це було зроблено вище, зводиться до рівняння четвертого порядку. Розв'язавши останнє, вказану систему та (37.3) знаходимо ($A_j(p)$, j=1,2,3,4 - невідомі функції)

$$\sigma_\theta^* = A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta \tag{38.6}$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1}\left[A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta - \right.$$

$$\left. - A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta\right]$$

$$\sigma_r^* = -\frac{1}{p-1}\left[A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \right.$$

$$\left. + A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta\right]$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^* = \frac{1+\nu}{p-1}\left[A_1(p-3+4\nu)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(\mathrm{p}-1)\theta - \right.$$

$$\left. - A_3(p-3+4\nu)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta\right]$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* = \frac{1+\nu}{E(p-1)}\left[A_1(p+3-4\nu)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \right.$$

$$\left. + A_3(p+3-4\nu)\cos(p+1)\theta - A_4(p-1)\cos(p-1)\theta\right]$$

$$\left(-1 < \operatorname{Re} p < \delta,\ 0 \le \theta \le \pi/2\right)$$

Якщо $A_j(p)$ відомі, то напруження визначаються за формулами обернення $\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \sigma_\theta^*(p,\theta) r^{-p-1} dp$ (i - уявна одиниця; L - паралельна уявній осі пряма, яка лежить в згаданій смузі). Піддаючи перетворенню Мелліна наскрізні граничні умови (38.1), відповідно (38.6) маємо

$$A_1\cos\frac{p\pi}{2} - A_2\cos\frac{p\pi}{2} - A_3\cos\frac{p\pi}{2} + A_4\cos\frac{p\pi}{2} = 0 \qquad (38.7)$$

$$A_1(p+1)\sin\frac{p\pi}{2} - A_2(p-1)\sin\frac{p\pi}{2} + A_3(p+1)\cos\frac{p\pi}{2} - A_4(p-1)\cos\frac{p\pi}{2} = 0$$

$$A_1(p+1) + A_2(p-1) = 0$$

З (38.7)

$$A_2 = -\frac{p+1}{p-1}A_1,\ A_3 = -\frac{2\left(p+\sin^2\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin p\pi}A_1,\ A_4 = -\frac{2(p+1)\left(p-\sin^2\frac{p\pi}{2}\right)}{(p-1)\sin p\pi}A_1 \qquad (38.8)$$

Підставляючи (38.8) в першу та четверту формули (38.6) при $\theta = 0$, отримуємо

$$\sigma_\theta^*(p,0) = \frac{4\left(\sin^2\frac{p\pi}{2} - p^2\right)}{(p-1)\sin p\pi}A_1, \quad \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0} = -\frac{4(1-\nu^2)}{E(p-1)}A_1. \qquad (38.9)$$

Виключаючи A_1 в (38.9), встановлюємо зв'язок між трансформантами $\sigma_\theta^*(p,0), \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}$

$$\sigma_\theta^*(p,0) = -\frac{E}{1-\nu^2}\times\frac{\sin^2\frac{p\pi}{2} - p^2}{\sin p\pi}\times\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}. \qquad (38.10)$$

В силу дуальних граничних умов (38.2)

$$\sigma_\theta^*(p,0) = \int_0^\infty \sigma_\theta(r,0) r^p dr = -\int_0^l \sigma_\theta(r,0) r^p dr = \left[\Phi^+(p) + \frac{\sigma_1}{p+1}\right] l^{p+1}. \qquad (38.11)$$

$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty \sigma_\theta(pl,0)\rho^p d\rho,\ \sigma_1=-\sigma,$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^*_{\theta=0}=\int_1^\infty\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\theta=0} r^p dr=\int_0^l\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\theta=0} r^p dr=\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\Phi^-(p)l^{p+1},$$

$$\Phi^-(p)l^{p+1}=\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho.$$

Трансформанти $\Phi^+(p)$ і $\Phi^-(p)$ існують і аналітичні у напівплощинах $\operatorname{Re} p<\delta$ і $\operatorname{Re} p>-1$ відповідно, оскільки особливість $\delta=1$ згідно (38.3) інтегрується.

Підставимо отримані вирази (38.11) у (38.10), прийдемо до наступного функціонального рівняння Вінера-Хопфа відносно невідомих трансформант $\Phi^+(p)$ і $\Phi^-(p)$:

$$\Phi^+(p)+\frac{\sigma_1}{p+1}=G_0(p)\Phi^-(p),$$
$$G_0(p)=-\frac{2\left(\sin^2\frac{p\pi}{2}-p^2\right)}{\sin p\pi} \qquad (38.12)$$

$(-1<\operatorname{Re} p<\delta)$.

Суть методу розв'язання (38.12) полягає у послідовному його перетворенні на уявній осі до рівності, ліва частина котрої містить $\Phi^+(p)$ і аналітична у напівіплощині $\operatorname{Re} p<0$, а права - містить $\Phi^-(p)$ і аналітична у напівплощині $\operatorname{Re} p>0$. Якщо таке ж рівняння ми змогли б отримати, то на основі принципу неперервного продовження [8] можна було б стверджувати, що згадані ліва і права частини дорівнюють одній і тій самій функції, яка є аналітичною по всій площині p. Якщо, далі, вдалося б знайти цю єдину аналітичну функцію, то питання про визначення невідомих трансформант перетворилося б у тривіальне.

Розщепимо коефіцієнт $G_0(p)$ рівняння на функції, аналітичні в лівій і правій напівплощинах. З цією метою представимо його у вигляді

$$G_0(p)=-tgp\pi\times G(p),\qquad G(p)=\frac{2\left(\sin^2\frac{p\pi}{2}-p^2\right)\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}. \qquad (38.13)$$

Функції $G(p)$, яка визначена (38.13), на відміну від $G_0(p)$, при $p=0$ не обертається у нуль, а у інших точках $p=it$ $(-\infty<t<\infty)$ уявної осі

$$G(it)=\frac{2\left(sh^2\frac{t\pi}{2}-t^2\right)cht\pi}{sh^2 t\pi}. \qquad (38.14)$$

Представляючи собою дійсну додатну парну функцію *t*, яка прямує до одиниці при $t \to \infty$. Тому існує $\ln G(p)$ $(\mathrm{Re}\, p = 0)$. Введемо у розгляд функцію

$$I(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p}dz = \begin{cases} I^+(p), \mathrm{Re}\, p < 0 \\ I^-(p), \mathrm{Re}\, p > 0 \end{cases} \tag{38.15}$$

Завдяки експоненціальним властивостям функції (38.14), $I(p)$ існує і аналітична по усій площині за виключенням уявної осі, де знаменник підінтегрального виразу може обертатись на нуль. Однак, як показано Ю.В.Сохоцьким, існують скінчені межі функцій $I^{\pm}(p)$ при наближенні *p* до точки уявної осі та правій напівплощинах, причому $I^+(p) - I^-(p) = \ln G(p)$ $(\mathrm{Re}\, p = 0)$. Отже,

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, G^{\pm} = e^{1^{\pm}} \quad (\mathrm{Re}\, p = 0). \tag{38.16}$$

Крім того відповідно (38.15)

$$G^{\pm}(\infty) = 1. \tag{38.17}$$

Представлення (38.16) називається факторизацією. Функція $pctgp\pi$ факторизується елементарно. Вона виражається через чотири гамма-функції (детальна інформація про гамма-функції наведена у численних довідниках з вищої математики (див. наприклад, [9])). Маємо

$$pctgp\pi = K^+(p)K^-(p), K^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \mp p\right)}. \tag{38.18}$$

Тут $K^+(p)$ аналітична і не має нулів у напівплощині $\mathrm{Re}\, p < l/2$, а $K^-(p)$ – у напівплощині $\mathrm{Re}\, p > -l/2$, Крім того

$$K^{\pm}(p) \sim \sqrt{\mp p}\ (p \to \infty). \tag{38.19}$$

За допомогою факторизації (38.16), (38.18) рівняння (38.12) перепишемо так:

$$\frac{\sigma_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} + \frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} = -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} \quad (\mathrm{Re}\, p = 0). \tag{38.20}$$

Скористаємося представленням

$$\frac{\sigma_1 K^+(p)}{p(p+1)G^+(p)} = \frac{\sigma_1}{p+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}\right] - \frac{\sigma_1 K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} \quad (\mathrm{Re}\, p = 0,\ p \neq 0) \tag{38.21}$$

Підставляємо(38.21) у (38.20), приходимо до рівності

$$\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{\sigma_1}{p+1}\left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}\right] = -\frac{\Phi^-(p)}{K^-(p)G^+(p)} + \frac{\sigma_1 K^+(-1)}{(p+1)^+(-1)} \quad (\mathrm{Re}\, p = 0) \tag{38.22}$$

ліва і права частини якого дорівнюють єдиній аналітичній по всій площині функції. Для того, щоб знайти цю функцію, вивчимо поведінку шуканих трансформант $\Phi^{\pm}(p)$ у околі нескінчено віддаленої точки.

Має місце наступний факт [8]:

$$f(x) \sim Ax^{a}\,(x \to +0, -1 < \alpha < 0) \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \sim A\Gamma(\alpha+1)\, p^{-\alpha-1} \qquad (38.23)$$

$$(p \to \infty,\ \operatorname{Re} p > 0)$$

Позначимо $\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)$ через $u(r)$. Виконавши у інтегралі $\Phi^{-}(p)$ заміну $p = e^{-x}$, отримаємо

$$\Phi^{-}(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx,\ f(x) = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)} u\left(e^{-z} l\right) e^{-x}. \qquad (38.24)$$

Виходячи з першої формули (38.3) і враховуючи (38.24), знаходимо:

$$f(x) \sim -\frac{K}{\sqrt{2\pi d}} x^{1/2}\ (x \to +0). \qquad (38.25)$$

Згідно (38.23), (38.25) (друга формула отримана аналогічно)

$$\Phi^{\pm}(p) \sim \pm \frac{K}{\sqrt{\mp 2pl}}\ (p \to \infty). \qquad (38.26)$$

З асимптотик (38.17), (38.19), (38.26) випливає, що єдина аналітична функція прямує до нуля при $p \to \infty$. Але тоді на основі теореми Ліувілля [8] можна стверджувати, що вона тотожно рівна нулю по всій площині.

Прирівнявши до нуля ліву та праву частини (38.22), знаходимо шукані трансформанти - розв'язок рівняння (38.12)

$$\Phi^{+}(p) = -\frac{\sigma_1 p G^{+}(p)}{(p+1) K^{+}(p)} \left[\frac{K^{+}(p)}{p G^{+}(p)} + \frac{K^{+}(-1)}{G^{+}(-1)} \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0) \qquad (38.27)$$

$$\Phi^{-}(p) = \frac{\sigma_1 K^{+}(-1) K^{-}(p) G^{-}(p)}{G^{+}(-1)(p+1)} \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

Шуканий коефіцієнт *K* визначається так. Враховуючи (38.17), (38.19) з другої формули (38.27) для $\Phi^{-}(p)$ отримуємо асимптотику

$$\Phi^{-}(p) \sim \frac{\sigma_1 K^{+}(-1)}{G^{+}(-1)\sqrt{p}}\ (p \to \infty). \qquad (38.28)$$

З іншого боку, для даної трансформанти має місце асимптотика (38.26). Прирівнюючи ці асимптотики, знаходимо

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi G^{+}(-1)} \sigma \sqrt{\pi l}. \qquad (38.29)$$

Приймаючи до уваги парність *G(it)*, яка визначається формулою (37.14), $G^{+}(-1)$ можна перетворити до вигляду

$$G^{+}(-1)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln G(it)}{t^{2}+1}dt\right]. \qquad (38.30)$$

У результаті обчислення інтегралу в (38.30) на ЕОМ отримуємо таку формулу для коефіцієнта інтенсивності напруг:

$$K=1{,}122\sigma\sqrt{\pi l}. \qquad (38.31)$$

Результат (38.31) отриманий голандським механіком В.Койтером у 1956 році. Одним з критеріїв зрушення тріщини є досягнення КІН K критичного значення КІН K_c матеріалу. Прирівнявши (38.31) до K_c, встановлюємо, що значення руйнівного навантаження, при якому відбувається зрушення тріщини, дорівнює

$$\overline{\sigma}=0{,}503\frac{K_c}{\sqrt{l}}. \qquad (38.32)$$

Література

1. Черепанов Г.П. В энциклопедиях не значится // Правда. 3.09.1984 г.С.3
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. - 707 с.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М,: Наука, 1981. - 688 с.
5. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 279 с.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. - 402 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М.: Наука, 1969. - 800 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. - 736 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. - 832 с.

ПИТАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Модуль 1. Двовимірні задачі теорії пружності в прямокутних координатах

1. Сформулюйте вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла.
2. Як визначається деформоване тіло в механіці деформівного твердого тіла?
3. Які деформації називаються пружними?
4. Які деформації називаються пластичними?
5. Приведіть діаграму розтягу для пластичних матеріалів.
6. Приведіть діаграму розтягу для крихких матеріалів.
7. Які зовнішні сили називають поверхневими?
8. Які зовнішні сили називають масовими?
9. Який стан тіла називають природнім?
10. Позначте на кубічному елементі компоненти нормальних напружень.
11. Позначте на кубічному елементі компоненти дотичних напружень.
12. Як визначається нормальне напруження?
13. Як визначається тангенціальне напруження?
14. Коли нормальні напруження вважають позитивними?
15. Як визначаються позитивні напрямки дотичних напружень?
16. Що таке напруження у точці?
17. Що таке нормальні та дотичні напруження? Яка їх розмірність?
18. Як визначається тензор напружень?
19. Чому дорівнюють зусилля, що діють на кожній грані куба?
20. Як визначається відносне видовження ε_x в декартових координатах?
21. Як визначається відносне видовження ε_y в декартових координатах?
22. Як визначається відносне видовження ε_z в декартових координатах?
23. Як визначається відносний зсув γ_{xy} у декартових координатах?
24. Як визначається відносний зсув γ_{xz} у декартових координатах?
25. Як визначається відносний зсув γ_{xz} у декартових координатах?
26. Як визначається тензор деформацій?
27. Що характеризує модуль пружності ?
28. Що таке коефіцієнт Пуассона? В яких межах він змінюється?
29. Запишіть закон Гука для повздовжніх деформацій.
30. Яку величину називають модулем зсуву?
31. Як модуль зсуву пов'язаний з модулем Юнга?
32. Який напружений стан називається чистим зсувом?
33. Запишіть закон Гука для деформації зсуву.
34. В яких координатах будується діаграма розтягу?
35. Що називається границями пропорційності, текучості, тимчасового опору?
36. Що таке допустиме напруження? Як воно визначається?
37. Що таке коефіцієнт запасу міцності? Від яких основних факторів залежить його величина?

38. Запишіть компоненту напружень σ_x як функцію компоненти деформацій ε_x.
39. Запишіть компоненту напружень σ_y як функцію компоненти деформацій ε_y.
40. Запишіть компоненту напружень σ_z як функцію компоненти деформацій ε_z.
41. Який стан називають плоским напруженим?
42. Що розуміють під плоскою деформацією?
43. Як визначаються компоненти напружень в точці?
44. Які напрямки для напружень називають головними?
45. Приведіть диференціальні рівняння рівноваги для двовимірної задачі.
46. Приведіть диференціальні рівняння рівноваги у випадку, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла.
47. Що розуміють під граничними умовами?
48. Приведіть умову сумісності для деформацій.
49. Приведіть умову сумісності в напруженнях у випадку плоского напруженого стану.
50. Приведіть умову сумісності в напруженнях у випадку плоскої деформації.
51. В чому полягає принцип Сен-Венана?
52. Запишіть функцію напружень Ері.
53. Які функції називають гармонічними?
54. Запишіть бігармонічне рівняння, яке задовольняє функція напружень Ері.
55. Який вигляд має поліном першого ступеня?
56. Який вигляд має поліном другого ступеня?
57. Який вигляд має поліном третього ступеня?
58. Який вигляд має поліном четвертого ступеня?
59. Який вигляд має поліном п’ятого ступеня?
60. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності для випадку довгої прямокутної пластинки, якщо функцію напружень задано поліномом другого ступеня.
61. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності для випадку довгої прямокутної пластинки, якщо функцію напружень задано поліномом третього ступеня.
62. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності для випадку довгої прямокутної пластинки, якщо функцію напружень задано поліномом четвертого ступеня.
63. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності для випадку довгої прямокутної пластинки, якщо функцію напружень задано поліномом п’ятого ступеня.
64. Запишіть переміщення для випадку довгої прямокутної пластинки.
65. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності у випадку згину консолі, навантаженої на кінці.
66. Запишіть переміщення у випадку згину консолі, навантаженої на кінці.

67. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності у випадку вигину балки рівномірним навантаженням.
68. Запишіть переміщення у випадку вигину балки рівномірним навантаженням.

Модуль 2. Двовимірні задачі теорії пружності в полярних координатах

1. Що називається полярною віссю?
2. Що називається полярною системою координат?
3. Якими числами визначається точка в полярній системі координат?
4. У яких випадках для дослідження напружень зручно використовувати полярні координати?
5. Який зв'язок між полярною та прямокутною декартовою системами координат.
6. Запишіть рівняння рівноваги у полярних координатах.
7. Приведіть оператор Лапласа в полярних координатах.
8. Запишіть бігармонічне рівняння, якому задовольняє функція напружень Ері у полярних координатах.
9. Запишіть диференціальне рівняння сумісності деформацій у полярних координатах.
10. Запишіть загальний розв’язок рівняння сумісності деформацій, якщо функція напружень залежить тільки від *r*.
11. Який вигляд мають компоненти напружень у випадку полярно-симетричного розподілу напружень без врахування об'ємних сил?
12. Запишіть полярно-симетричний розподіл напружень для пластинки без отвору у початку координат при відсутності об'ємних сил.
13. Запишіть полярно-симетричний розподіл напружень для пластинки, яка має отвір у початку координат при відсутності об'ємних сил.
14. Приведіть поле напружень у порожньому циліндрі, підданому дії рівномірного тиску на внутрішній і зовнішній поверхнях.
15. Запишіть вираз для радіального переміщення u у випадку плоского напруженого стану у порожньому циліндрі, підданому дії рівномірного тиску на внутрішній і зовнішній поверхнях.
16. Приведіть поле напружень у порожньому циліндрі, підданому дії рівномірного тиску лише на внутрішній поверхні.
17. Запишіть вираз для найбільшого значення $(\sigma_\theta)_{\max}$ на внутрішній поверхні циліндра, підданому дії рівномірного тиску на внутрішній поверхні.
18. Що називають деформацією згину?
19. При якому навантаженні брус випробовує чистий, а при якому – поперечний згин?
20. Приведіть граничні умови для кривого бруса із сталим перерізом у вигляді вузького прямокутника і круговою віссю, якщо брус згинається у площині кривизни моментами *M*.
21. Запишіть розв’язок двовимірної задачі теорії пружності в полярних координатах у випадку чистого згину кривих брусів.
22. Сформулюйте принцип Сен-Венана.

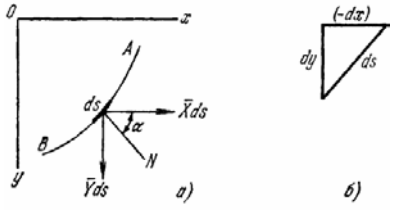
23. Приведіть вираз для деформації у радіальному напрямку ε_r у полярних координатах.
24. Приведіть вираз для окружної деформації ε_θ у полярних координатах.
25. Приведіть вираз деформації зсуву $\gamma_{r\theta}$ у полярних координатах.
26. Як можна знайти компоненти деформацій u і v у полярних координатах, знаючи ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$?
27. Запишіть закон Гука для плоского напруженого стану у полярних координатах.
28. Який стан називають чистим згином?
29. Які гіпотези покладені в основу виведення формули для нормальних напружень при чистому згині?
30. Чому дорівнюють переміщення при симетричних полях напружень?
31. Наведіть приклад багатозв'язного тіла. Що необхідно знати для повного визначення поля напружень у багатозв'язному тілі?
32. Розкрийте фізичний зміст багатозначних розв'язків.
33. Запишіть розподіл напружень у випадку суцільного диска, що обертається.
34. Які максимальні значення приймають напруження σ_r і σ_θ у випадку суцільного диска, що обертається?
35. Запишіть розподіл напружень у випадку обертання диска із круглим отвором радіуса a в центрі.
36. Які максимальні значення приймають напруження σ_r і σ_θ у випадку обертання диска із круглим отвором радіуса a в центрі?
37. Що називають концентрацією напружень?
38. Чому функція напружень Ері у випадку вигину кривого бруса силою, прикладеною на кінці пропорційна $\sin\theta$?
39. Запишіть розв'язок двовимірної задачі теорії пружності в полярних координатах у випадку вигину кривого бруса силою, прикладеною на кінці.
40. Запишіть вираз для відносного зсуву двох поверхонь розрізу кільця δ?
41. Який стан називають «крайовою дислокацією»?
42. Наведіть приклад загальної «теореми про еквівалентні розрізи».
43. Запишіть розв'язок двовимірної задачі теорії пружності в полярних координатах у випадку розтягу пластинки, в якій прорублено малий круглий отвір.
44. Як впливає круглий отвір на розподіл напружень у пластинці?
45. Запишіть розв'язок двовимірної задачі теорії пружності в полярних координатах у випадку розтягу пластинки у двох перпендикулярних напрямках, в якій прорублено малий круглий отвір.
46. Висока концентрація напружень на краю отвору представляє великий практичний інтерес. Наведіть приклад.
47. Який розподіл напружень називають радіальним?
48. Приведіть функцію напружень Ері у випадку зосередженої сили, прикладеної в деякій точці прямолінійної границі.
49. Приведіть розподіл напружень у випадку зосередженої вертикальної сили, прикладеної в деякій точці прямолінійної границі.

50. Приведіть розподіл напружень у випадку зосередженої горизонтальної сили, прикладеної в деякій точці прямолінійної границі.
51. Приведіть вирази для деформацій ε_r, ε_θ $\gamma_{r\theta}$ у випадку зосередженої сили, прикладеної в деякій точці прямолінійної границі.
52. Чому дорівнюють горизонтальні і вертикальні переміщення точок на прямолінійній границі пластинки?

Модуль 3. Використання ТФКЗ в теорії пружності

1. Коли зручно використовувати положення ТФКЗ?
2. Що називають комплексним числом?
3. Що таке уявна одиниця?
4. Чому дорівнює i^2?
5. Чому дорівнює дійсна частина числа $z = 4 + 6i$?
6. Чому дорівнює уявна частина числа $z = 7$?
7. Запишіть тригонометричне представлення комплексного числа.
8. Запишіть формулу Ейлера.
9. Запишіть експоненціальне представлення комплексного числа.
10. Як виражаються тригонометричні функції комплексного аргумента через показникову функцію?
11. Як виражаються гіперболічні функції комплексного аргумента через показникову функцію?
12. Який зв'язок між гіперболічним і звичайним синусами у випадку комплексної змінної?
13. Який зв'язок між гіперболічним і звичайним косинусами у випадку комплексної змінної.
14. Що називають комплексно спряженою функцією?
15. Запишіть формулу похідної для диференційованої функції.
16. Яка функція є аналітичною?
17. Запишіть рівняння Коші-Рімана.
18. Запишіть рівняння Лапласа.
19. Що називають гармонійною функцією?
20. Які функції називають спряженими гармонійними?
21. Запишіть гармонійні функції з аналітичної функції e^{inz}.
22. Запишіть гармонійні функції з аналітичної функції z^n.
23. Запишіть гармонійні функції з аналітичної функції $\ln z$.
24. Приведіть функцію напружень φ, виражену через гармонійну комплексну функцію.
25. Запишіть формули, які дозволяють знайти переміщення, знаючи функцію напружень φ.
26. Запишіть вирази для компонент напружень, отримані Г.В.Колосовим.
27. Приведіть формули для компонент напружень через комплексні потенціали.
28. Приведіть формули для компонент напружень через комплексні потенціали у випадку представлення функції напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня.

29. Приведіть формули для компонент переміщень через комплексні потенціали у випадку представлення функції напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня.
30. Приведіть компоненту F_x результуючого напруження, що діє по деякій кривій.
31. Приведіть компоненту F_y результуючого напруження, що діє по деякій кривій.

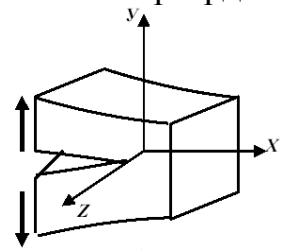


32. Запишіть граничні умови, що діють по деякій кривій.
33. Що називається еліптичною системою координат?
34. Якими числами визначається точка в еліптичній системі координат?
35. Якими рівняннями визначаються еліптичні координати ξ, η?
36. Що називають сімейством співфокусних еліпсів? Як змінюються координати ξ, η на таких еліпсах?
37. Запишіть розв’язок задачі теорії пружності для нескінченної пластинки в стані рівномірного всебічного розтягу, збуреного еліптичним отвором у еліптичних координатах.
38. Запишіть розв’язок задачі теорії пружності для пластинки з еліптичним отвором з однорідним напруженим станом.
39. Яке перетворення змінних називають конформним відображенням?
40. В чому полягає метод М.І.Мусхелішвілі?
41. Приведіть інтегральну теорему Коші-Гурса.
42. Приведіть інтегральну формулу Коші.
43. Сформулюйте характеристичні властивості напружених станів, які можуть бути представлені за допомогою аналітичних потенціалів.
44. Яке навантаження називають самозрівноваженим?
45. Які положення використовують, якщо потрібно досліджувати навантаження на границі отвору, що має ненульові результуюче зусилля й момент?
46. Які положення використовують, якщо потрібно одержати дислокаційний розв’язок?

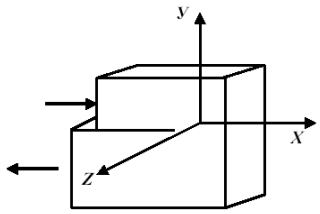
Модуль 4. Елементи механіки руйнування матеріалів

1. Що називають руйнуванням?
2. Яку науку називають механікою руйнування?
3. Кого вважають основоположником механіки руйнування?
4. Що таке внутрішні сили? Яка їх природа?
5. В чому суть теорій міцності?
6. Як визначається допустиме напруження?
7. У чому відмінність пластичних і крихких матеріалів?
8. Які деформації вважаються пружними і які пластичними?

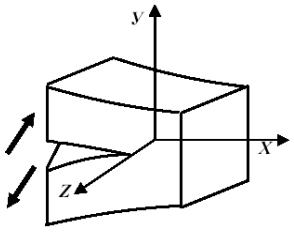
9. Намалюйте умовну діаграму розтягу маловуглецевої сталі і вкажіть її характерні точки.
10. Що таке границя пропорційності? Як вона визначається і позначається?
11. Що таке границя текучості? Як вона визначається на діаграмі розтягу?
12. Що таке умовна границя текучості і як вона визначається?
13. Що спостерігається на поверхні зразка при пластичному деформуванні? Чим обумовлене це явище?
14. Що таке тимчасовий опір? Як він визначається і позначається?
15. Чим пояснюється зменшення розтягуючої сили на діаграмі розтягу? В якому випадку навантаження це не спостерігається?
16. На якій ділянці діаграми розтягу у зразку утворюється шийка? У яких матеріалів при розтязі вона виникає?
17. Приведіть подання бігармонічної функції через дві аналітичні функції комплексної змінної, запропоноване Е. Гурсом.
18. Приведіть вирази для комплексного подання зсувів і напружень, отримані Г.В. Колосовим.
19. Приведіть вирази для комплексного подання зсувів і напружень, отримані Вестергардом.



20. Назвіть і охарактеризуйте вид зміщення поверхні тріщини.



21. Назвіть і охарактеризуйте вид зміщення поверхні тріщини.



22. Назвіть вид і охарактеризуйте зміщення поверхні тріщини.
23. Хто здійснив основоположні дослідження розвитку крихких тріщин і вперше сформулював енергетичний критерій руйнування?
24. Хто вперше сформулював дерформаційний критерій руйнування?
25. Яку величину називають коефіцієнтом інтенсивності напружень?
26. Приведіть компоненти нормальних напружень σ_x, σ_y, σ_z у вершині тріщини нормального відриву через коефіцієнт інтенсивності напружень.
27. Приведіть компоненти дотичних напружень τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} у вершині тріщини нормального відриву через коефіцієнт інтенсивності напружень.

28. Приведіть компоненти переміщень u, v у вершині тріщини нормального відриву через коефіцієнт інтенсивності напружень.
29. Приведіть компоненти нормальних напружень σ_x, σ_y, σ_z у вершині тріщини поперечного зсуву через коефіцієнт інтенсивності напружень.
30. Приведіть компоненти дотичних напружень τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} у вершині тріщини поперечного зсуву через коефіцієнт інтенсивності напружень.
31. Приведіть компоненти переміщень u, v у вершині тріщини поперечного зсуву через коефіцієнт інтенсивності напружень.
32. Приведіть компоненти нормальних напружень σ_x, σ_y, σ_z у вершині тріщини у випадку антиплоскої деформації через коефіцієнт інтенсивності напружень.
33. Приведіть компоненти дотичних напружень τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} у вершині тріщини у випадку антиплоскої деформації через коефіцієнт інтенсивності напружень.
34. Приведіть компоненти переміщень u, v у вершині тріщини у випадку антиплоскої деформації через коефіцієнт інтенсивності напружень.
35. Яку роль відіграють коефіцієнти інтенсивності напружень в механіці руйнування?
36. Як класифікуються особливі точки аналітичних функцій?
37. Охарактеризуйте поведінку аналітичної функції в околі полюса.
38. В чому полягає канонічний метод розв’язання задачі для тріщини?
39. Приведіть рівняння рівноваги, умову сумісності та співвідношення, які випливають із закону Гука.
40. Приведіть розв’язок канонічної задачі для тріщини.
41. В чому полягає метод Вінера – Хопфа?
42. Запишіть інтегральне перетворення Мелліна.
43. Сформулюйте принцип аналітичного продовження.
44. Сформулюйте теорему Ліувілля.
45. Запишіть формулу Гахова.
46. Як здійснюють факторизацію коефіцієнта рівняння Вінера-Хопфа?
47. Як здійснюють факторизацію $pctgp\pi$?
48. Запишіть розв’язок задачі механіки руйнування про зрушення крайової мікротріщини, отриманий голандським механіком В.Койтером.
49. Сформулюйте критерій зрушення тріщини.
50. .Чи можна розглядати тріщину в зразку як концентратор напружень?
51. Який вплив тріщини на напружений стан і як його зменшити?
52. Який напружений стан має місце у вершині тріщини?

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ З СУЧАСНИХ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1. Вихідні припущення механіки деформівного твердого тіла
2. Напруження
3. Компоненти напружень
4. Тензор деформацій
5. Закон Гука
6. Плоский напружений стан і плоска деформація
7. Напруження в точці
8. Диференціальні рівняння рівноваги
9. Граничні умови
10. Рівняння сумісності
11. Принцип Сен-Венана
12. Функція напружень Ері
13. Розв’язки у поліномах
14. Визначення переміщень
15. Згин консолі, навантаженої на кінці
16. Вигин балки рівномірним навантаженням
17. Загальні рівняння в полярних координатах
18. Полярно-симетричний розподіл напружень
19. Чистий згин кривих брусів
20. Компоненти деформацій у полярних координатах
21. Переміщення при симетричних полях напружень
22. Обертання диска
23. Вигин кривого бруса силою, прикладеної на кінці
24. Крайові дислокації
25. Вплив круглого отвору на розподіл напружень у пластинці
26. Зосереджена сила, прикладена в деякій точці прямолінійної границі
27. Основні поняття теорії функцій комплексної змінної
28. Функції напружень, виражені через гармонійні комплексні функції
29. Переміщення, що відповідають заданій функції напружень
30. Представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали
31. Результуючих напружень, що діють по деякій кривій. Граничні умови
32. Розв’язки у еліптичних координатах. Еліптичний отвір у пластинці з однорідним напруженим станом
33. Визначення комплексних потенціалів по заданих граничних умовах. Методи М.І.Мусхелішвілі
34. Формули для комплексних потенціалів
35. Поля напруг і зсувів в околі кінчика тріщини
36. Канонічний метод розв’язання задачі для тріщини
37. Метод Вінера-Хопфа

Для нотаток

Навчальне видання

Сучасні методи теорії пружності
курс лекцій

Дудик Михайло Володимирович
Діхтяренко Юлія Володимирівна

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
фізико-математичних спеціальностей

Видання здійснено в авторському редагуванні

Підписано до друку 15.01.2015. Формат 60×90 1/32
Папір офсет.
Обл.-вид. арк. 0,45. Ум. друк. арк. 0,4
Тираж 100. Зам. №2561.

Видавець та виготовлювач
ФОП Жовтий О.О.

20300, м. Умань, вул. Садова, 2
(УДПУ, навчальний корпус №1)
Тел. 097 255 65 07
047 44 5 21 66
093 540 78 82
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК, №2444 від 22.03.2006 р.