Міністерство совіти і науки України

Уманський державний педагогічний університет імені Павла тичини

Азізов Т.Н., Орлова О.М. Люльченко В.Г.

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Умань

ВВЦ «Візаві»

2023

УДК 531.8 (524.012)

Рекомендовано до друку Вченою радою Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

(протокол №… від …12.2023 р.)

Рецензенти:

Кочкарьов Д.В. – доктор технічних наук, професор кафедри міського господарства і будівництва Національного університету водного господарства та природокористування;

Срібняк Н.М. – кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельних конструкцій **Сумського національного аграрного університету**

Мельник О.С. – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри професійної освіти Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

Навчальний посібник призначений для підготовки фахівців технологічної та професійної освіти з дисциплін «Прикладна механіка», Технічна механіка»

У посібнику наведені ……

© Азізов Т.Н., Орлова О.М., Люльченко В.Г. 2023

ВСТУП

Курс прикладної механіки включає в себе основи трьох наук: теоретичної механіки, опору матеріалів і теорії споруд. В даному посібнику наведені відомості з теоретичної механіки та опору матеріалів. В кожній з наук автори вибрали найбільш важливі теми, щоб студент в подальшому мав уяву про розрахунок конструкцій.

На відміну від багатьох існуючих курсів з технічної механіки, в даному застосування методів розрахунку пов’язано не тільки з деталями машин, ай з теорією споруд, розрахунком будівельних конструкцій. Це пов’язано з фактом, що студент, який отримує знання з теоретичної механіки або опору матеріалів не обов’язково повинен прикладати знання тільки в машинобудуванні.

Теоретичний матеріал супроводжується прикладами використання тієї чи іншої методики в технічній практиці, що дає можливість студенту сучасне уявлення важливості вивчення предмету.

В посібнику окрім загальних відомостей традиційних посібників подані матеріали розрахунку конструктивних елементів, які не входили в традиційні посібники (в тому числі авторські методики), але які мають важливе значення для того, щоб бути в курсі сучасних змін в техніці.

ЧАСТИНА 1. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Теоретична механіка – наука про загальні закони механічного руху матеріальних тіл. Але в механіці розглядається не тільки рух, а й рівновага тіл, При цьому рівновага не протиставляється руху, а трактується як його окремий вид.

Теоретична механіка, як і інші науки, з'явилася з практики. Вона тісно зв'язана з технікою. Це загальнотехнічна дисципліна, закони і висновки якої використовують і інші науки, такі яка опір матеріалів, теорія механізмів і машин, терія споруд, теорія корабля, балістика та інші.

В підрозділі «статика» вивчаються загальні знання про сили і умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил.

Кінематика вивчає геометричні властивості руху, розглядує рух ізольовано від сил.

Динаміка вивчає закони руху матеріальних тіл під дією сил.

В навчальному посібнику викладені кратко основні закони статики, кінематики і динаміки.

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА

1.1. Аксіоми статики.

Умови, за яких тіло може перебувати в рівновазі, називають аксіомами статики, які сформулював Ісаак Ньютон.

Аксіома 1, або перший закон Ньютона звучить так: Всяке тіло зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, поки якісь сили не виведуть тіло з цього стану.

Здатність матеріального тіла зберігати рух, коли немає діючих сил, або поступово змінювати цей рух, коли на тіло починають діяти сили, називають інертністю, яка є одною з основних властивостей матерії.

Аксіома 2, або третій закон Ньютона: Сили взаємодії двох тіл завжди однакові за модулем і протилежно напрямлені по одній прямій.

З цього закону випливає, що однобічної дії одного тіла на друге не буває, тобто всі сили природи – парні сили.

Аксіома 3 – умова рівноваги двох сил. Для рівноваги вільного твердого тіла, яке перебуває під дією двох сил, необхідно і достатньо, щоб ці сили дорівнювали одна одній за модулем і діяли по одній прямій у протилежних напрямах. Це означає, що коли система двох сил перебуває в рівновазі, то ці сили мають дорівнювати одна одній за модулем і діяти по одній прямій у протилежних напрямах.

Аксіома 4. Рівновага твердого тіла не порушиться, якщо до нього прикласти або відняти від нього систему зрівноважених сил.

Ці аксіоми статики широко використовуються в подальшому.

1.2. В'язі і реакції в’язів.

В’язями називають обмеження, які накладаються на розміщення і швидкості точок тіла в просторі. Силу, з якою тіло діє на в’язь, називають силою тиску; силу, з якою в’язь діє на тіло, називають силою реакції або просто реакцією. Відповідно до аксіоми взаємодії ці сили за модулем дорівнюють одна одній і діють у протилежних напрямах по одній прямій. Сили реакцій і тисків прикладені до різних тіл і тому не є системою сил.

Сили, які діють на тіло, поділяють на активні і реактивні. Активні сили намагаються переміщувати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні сили протидіють цьому переміщенню. Принципова відмінність активних сил від реактивних полягає у тому, що величина реактивних сил, взагалі, залежить від величини активних сил, а не навпаки. Активні сили часто називають навантаженням.

Розв’язуючи більшість задач статики, невільне тіло умовно вважають вільним відповідно до принципу звільнюваності, який формулюють так: усяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їх реакціями.

Застосовуючи такий принцип, отримаємо вільне від в’язів тіло, яке перебуває під дією певної системи активних і реактивних сил. Напрям реакцій визначається тим, в якому напрямі дана в’язь, протидіє переміщенню тіла.

Правило для визначення напряму реакцій зазвичай формулюють так: напрям реакції в'язі протилежний напряму переміщення, знищуваного даною в'яззю.

Деякі приклади в'язей і їх реакції наведені на рис. 1.1.

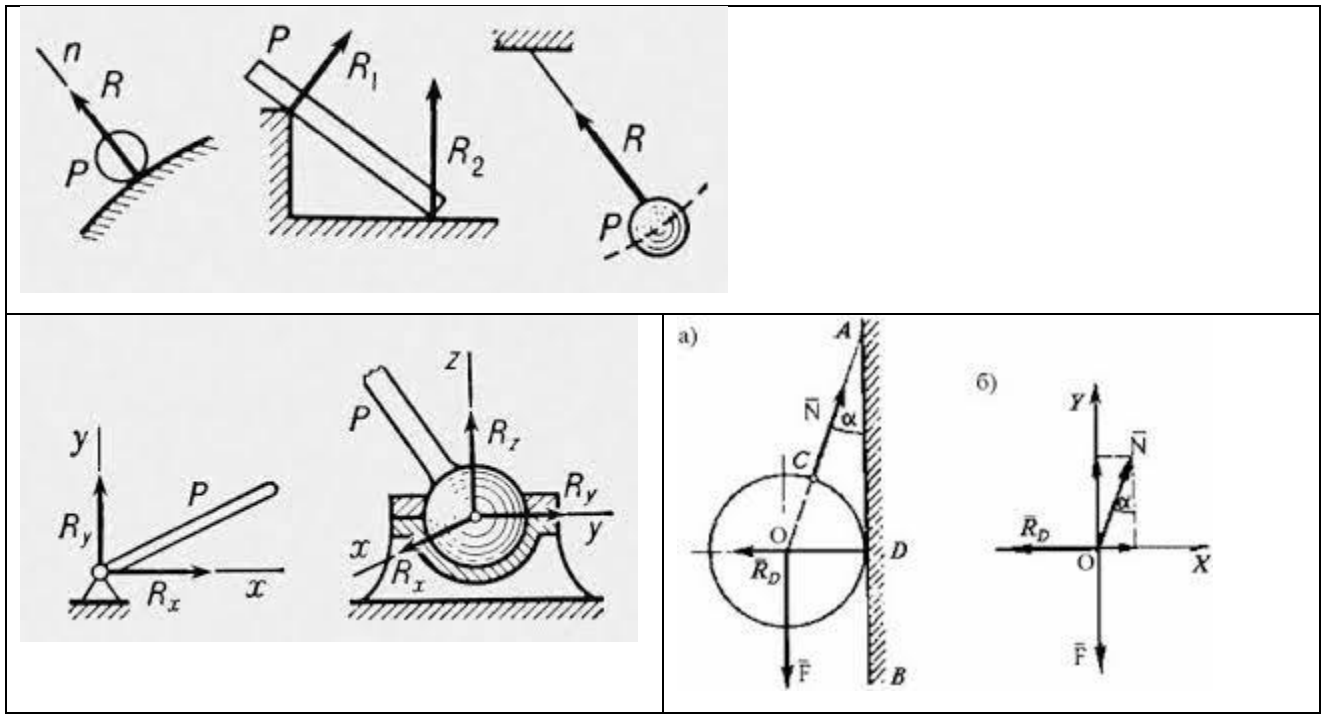


Рис. 1.1. Приклади в'язей і їх реакції

1.3. Умова рівноваги плоскої системи сил

Умова рівноваги плоскої системи сил полягає в тому, що сума проекцій всіх сил на осі і сума моментів всіх сил відносно осей повинна дорівнювати нулю. Дійсно, якщо сума проекцій всіх сил на будь яку вісь не буде дорівнювати нулю, то за законами механіки це тіло повинно рухатися в напрямку, в якому діють більші сили.

Для складання умов рівноваги плоскої системи сил треба вміти визначати проекції сил на осі.

1.3.1. Проекції сили на осі координат

Коли на тіло діє більше, ніж три сили, і невідомі напрями деяких сил зручно користуватися аналітичною умовою рівноваги, яка ґрунтується на методі проекцій.

Проекцією сили на вісь називають відрізок осі, що лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора сили.

Нехай дані координати осі X, Y, сила P, прикладена в точці A і розміщена в площині координатних осей (рис. 1.2) і направлена під кутом α до осі X. Проекціями сили **P** на осі будуть: на ось X відрізок ab; на ось Y – відрізок a'b'. Позначимо ці проекції відповідно P_x і P_y. Тоді будемо мати:

$$P_x = P\cos\alpha; \qquad P_y = P\sin\alpha$$

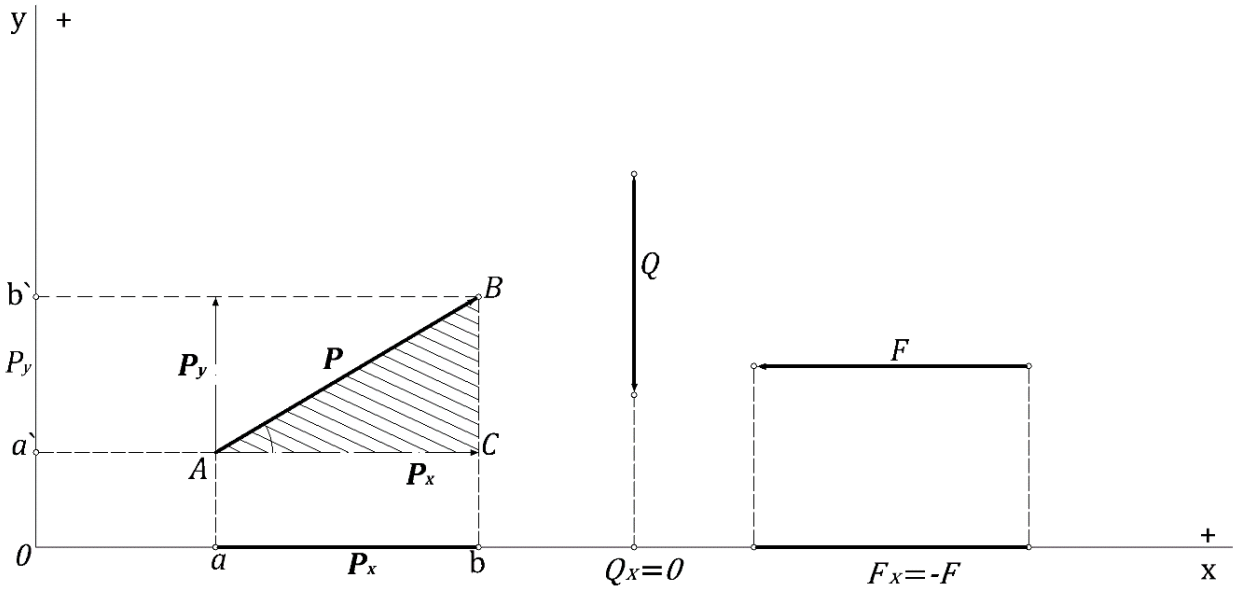


Рис. 1.2. Визначення проекцій сил на осі

Проекція сили на вісь – це величина алгебраїчна, яка може бути додатною або від'ємною, залежно від напряму проекції. За напрям проекції візьмемо напрям від проекції початку до проекції кінця вектору сили. Встановимо таке правило знаків: якщо напрям проекції сили на вісь збігається з додатним напрямом осі, то ця проекція вважається додатною, і навпаки.

1.3.2. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил

Якщо дана плоска система збіжних сил перебуває у рівновазі, то рівнодіюча **R** такої системи, а отже, і проекції рівнодіючої на осі координат дорівнюють нулю:

$$R = 0, \qquad R_x = 0, \qquad R_y = 0.$$

Враховуючи, що

$$R_x = \Sigma X, \qquad R_y = \Sigma y,$$

знаходимо рівності, що виражають аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0.$$

Формулюються ці умови так: для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій цих сил на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю.

За допомогою рівнянь рівноваги можна визначити два невідомі елементи даної системи сил, наприклад модуль і напрям однієї сили або модулі двох сил, напрями яких відомі і т.д.

Виведені умови рівноваги дійсні для будь-яких осей координат, але для спрощення розв'язування задач осі координат доцільно вибирати по можливості перпендикулярними до невідомих сил, щоб кожне рівняння рівноваги мало одну невідому.

Коли напрям шуканої сили відомий, то її можна розкласти на дві складові за заданими напрямами. Зазвичай ці напрями співпадають з напрямами координатних осей. За знайденими двома взаємно перпендикулярними складовими легко визначити невідому силу. Якщо під час аналітичного розв’язування задач шукана реакція виявиться від’ємною, то це означає, що дійсний її напрям протилежний до напряму, взятого на рисунку

В системі сил, коли сили розташовані довільно, одних умов рівноваги на осі не достатньо. Тому для визначення реакцій використовують момент сили. Для пояснення поняття «момент сили» розглянемо гайку, яку затягують гайковим ключем певної довжини, прикладаючи до кінця ключа м’язове зусилля (рис. 1.3). Якщо взяти ключ з більшою довжиною l, то при тому самому зусиллі F гайку можна затягнути дужче. З цього випливає, що одна й та сама сила може спричинювати різну обертальну дію. Обертальна дія сили характеризується моментом сили.

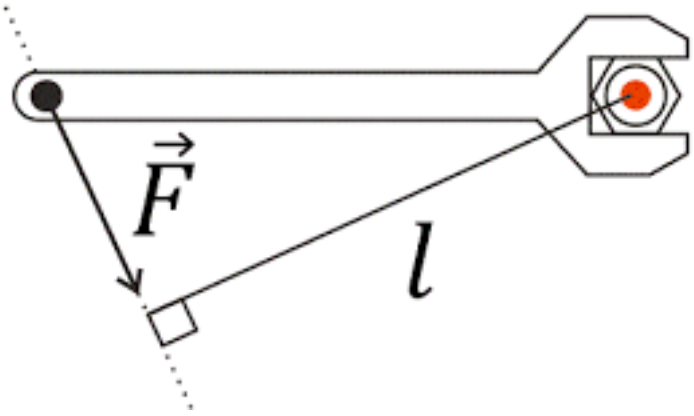


Рис. 1.3. Пояснення моменту сили

Моментом сили відносно точки називають добуток модуля сили на її плече (рис. 1.4). Плече – цу найкоротша відстані від лінії дії сили до розглядуваної точки.

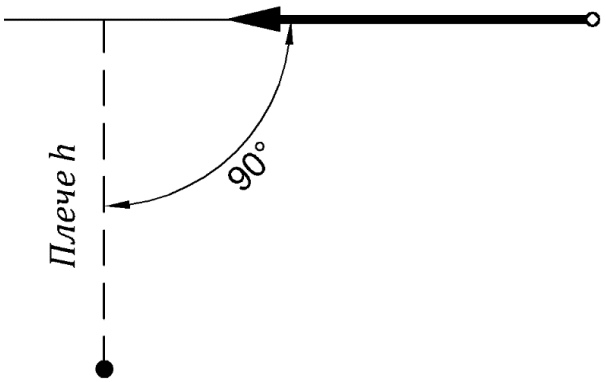


Рис. 1.4. Момент сили відносно точки

Застосування моменту сили важливо для визначення опорних реакцій в плоскій системі сил

1.3.3. Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил

Плоска система довільно розміщених сил перебуває у рівновазі, коли головний вектор і головний момент дорівнюють нулю:

$$R = 0, \qquad M = 0$$

Але $\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma P_i}$ і те, що $\mathbf{R} = 0$, означає, що силовий многокутник, побудований на силах даної системи, має бути замкненим. Отже, алгебраїчна сума проекцій сил на кожну з двох осей координат X і Y має дорівнювати нулю, тобто:

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0.$$

Якщо головний момент $M = \Sigma M_0(\mathbf{P_i})$ і $M = 0$, то це означає, що алгебраїчна сума моментів сил даної системи відносно будь-якого центра зведення також дорівнює нулю:

$$\Sigma M_0(\mathbf{P_i}) = 0$$

Отже, для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій усіх сил на осі координат X і Y дорівнювали нулю і щоб алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю. Спрощено умови рівноваги запишемо у вигляді рівностей:

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma M = 0.$$

Зазначимо, що умови рівноваги системи збіжних сил, системи паралельних сил і системи пар є окремими випадками умов рівноваги, що розглянуті в цьому пункті.

Під час розв’язування деяких задач буває доцільно замість одного або двох рівнянь проекцій складати рівняння моментів. В будь якому випадку інженер може на свій розсуд прийняти рішення, які саме умови рівноваги слід застосувати при рішення конкретної задачі. Наприклад, в балці на двох опорах можна застосувати два рівняння проекцій на вісь і одне рівняння моментів відносно однієї з опор. Можна, навпаки, застосувати два рівняння моментів і одне рівняння проекцій.

Якщо одне рівняння проекцій замінити, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma M_A = 0, \qquad \Sigma M_B = 0.$$

Але треба пам’ятати, що ці умови недостатні для рівноваги, якщо центри моментів A і B лежать на одному перпендикулярі до осі x; у цьому випадку навіть тоді, коли зазначені умови дійсні, система сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і, отже, не бути у стані рівноваги. Якщо замінити два рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил матимуть вигляд:

$$\Sigma M_A = 0, \qquad \Sigma M_B = 0, \qquad \Sigma M_C = 0.$$

Проте ці умови недостатні для рівноваги, коли центри моментів A, B і C лежать на одній прямій; у цьому випадку навіть тоді, коли зазначені умови залишаються дійсними, система сил може мати рівнодіючу, яка проходить через ці точки, і не бути у рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил є окремим випадком умов рівноваги, розглянутих у цьому пункті. Якщо вісь Y є паралельною лініям дії системи паралельних сил, то рівняння рівноваги $\Sigma X = 0$ перетвориться на тотожність, а $\Sigma Y = \Sigma P_i$, тобто алгебраїчна сума проекцій сил системи на вісь Y дорівнюватиме алгебраїчній сумі цих сил. Тоді умови рівноваги плоскої системи паралельних сил можна записати:

$$\Sigma P_i = 0, \qquad \Sigma M = 0$$

і сформулювати так: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

1.3.4. Опорні реакції балок

Для визначення опорних реакцій балок слід застосувати умови рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил, які викладені в попередньому пункті. Для прикладу на рис. 1.5 показана балка на двох опорах і маюча дві консолі. На балку прикладені зосереджені сили, зосереджений момент і рівномірне розподілене навантаження.

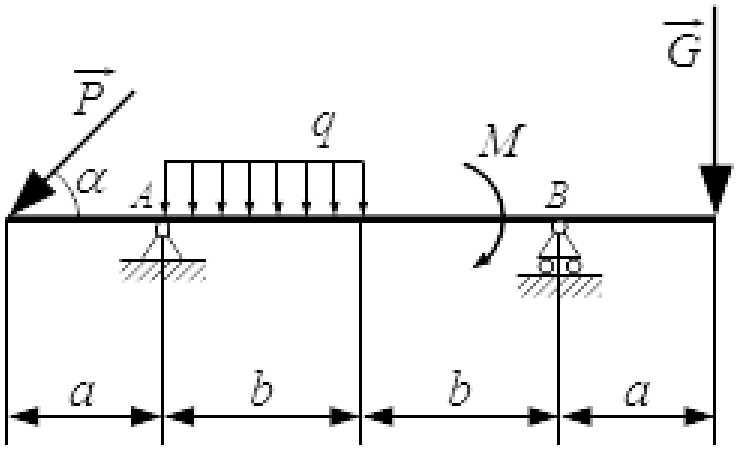


Рис. 1.5. Схема для визначення опорних реакції балок

Для визначення опорної реакції R_B в точці В слід застосувати рівність нулю моментів відносно точки А. Тоді реакції в нерухомій опорі X_A (в напрямку горизонтальної осі Х) та Y_A (в напрямку вертикальної осі Y) будуть дорівнювати нулю, бо ці сили проходять через дану точку. Із цього рівняння визначиться реакція R_B.

Для визначення горизонтальної реакції X_A слід застосувати умову рівності нулю суми проекцій усіх сил на вісь Х (з зовнішніх сил тільки сила Р матиме проекцію на вісь Х) і з цього рівняння визначити реакцію X_A.

Для визначення вертикальної реакції Y_A можна застосувати або рівняння рівності нулю проекцій всіх сил на вертикально вісь Y, або рівняння рівності нулю суми моментів всіх сил відносно точки В. В обох випадках одним невідомим (невідомі X_A та R_B вже знайдені з попередніх розрахунків) буде вертикальна реакція Y_A.

В практичних розрахунках інженер на свій розсуд приймає рішення застосування тієї чи іншої умови рівноваги.

1.4. Сили тертя.

Тертя – це явище опору відносному переміщенню, яке з’являється між двома тілами в зонах їх дотику. Тертя грає дуже важливу роль і без нього ані автомобіль не міг би рухатись, ані людина ходити.

Тертя буває як корисним, так і шкідливим. Наприклад, тертя заднього колеса автомобіля (якщо воно є ведучим) об поверхню дороги є корисним, а тертя переднього колеса – шкідливим з точки зору опору руху, але корисним з точки зору утримання автомобіля на дорозі (рис. 1.6).

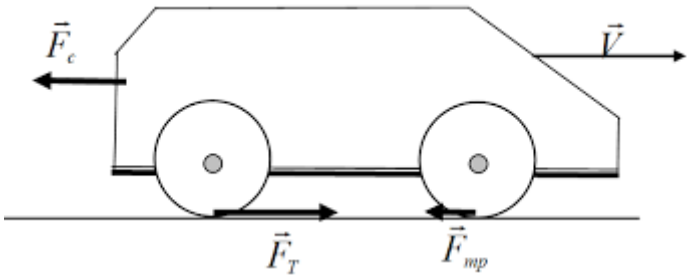


Рис. 1.6. Сили тертя при руху автомобіля

Тертя поршня об циліндр двигуна є шкідливим і на його подолання треба витрачати додаткову енергію.

Тертя розділяють на тертя ковзання та тертя кочення.

1.4.1. Сили тертя ковзання

Тертям ковзання називають тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках дотику різні. Тертя ковзання, як і тертя спокою, зумовлене насамперед шорсткістю і деформацією поверхонь, а також молекулярним зчепленням притиснутих одне до одного тіл. Тертя ковзання призводить до зносу, тобто відшарування або залишкової деформації матеріалу, а також до нагрівання поверхонь тіл, що труться (залишковою називається деформація, яка вже не зникає після припинення дії зовнішніх сил). Тертя характеризують силою тертя.

Сила тертя – це сила опору відносному переміщенню двох тіл: одного по поверхні іншого. Сила тертя напрямлена завжди проти сили, яка намагається зрушити тіло. Так, наприклад, коли ми намагаємось тягнути вантаж вправо (рис. 1.7, а), сила тертя буде напрямлена вліво; навпаки, коли ми намагаємось штовхати тіло вліво (рис. 1.7, б), то сила тертя напрямлена вправо.

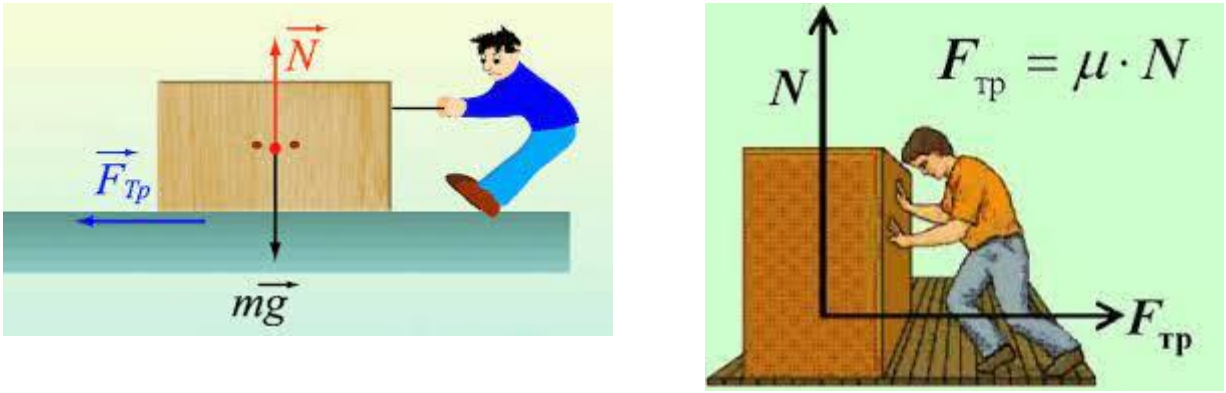


Рис. 1.7. Сила тертя завжди напрямлена в бік, протилежний рушійній силі

Розглянемо методику визначення сили тертя. Нехай тіло лежить на горизонтальній шорсткій площині (рис.1.8). Сила тяжіння **G** врівноважується нормальною реакцією **N.** Якщо до тіла прикласти невелику рушійну силу **P**, то воно не рухатиметься, поки ця сила врівноважуватиметься силою тертя $\mathbf{F_T}$, яка є реакцією опорної площини, напрямленою вздовж площини.

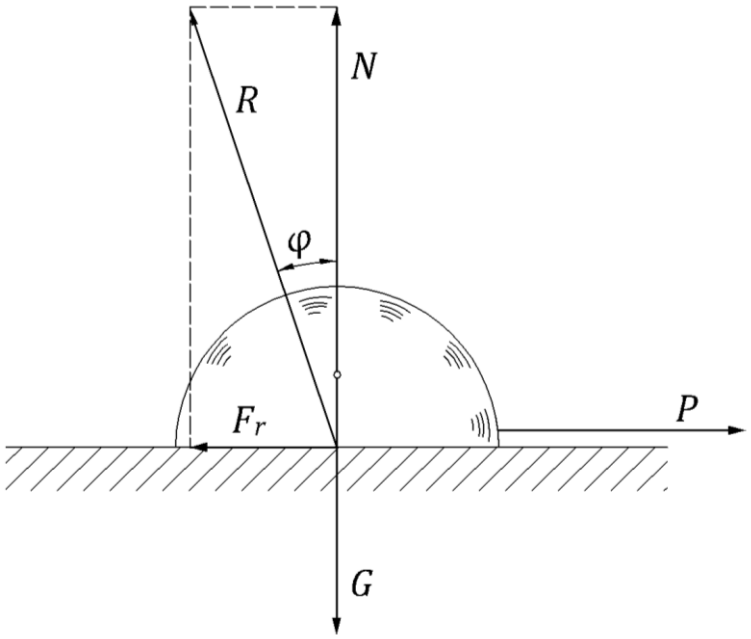


Рис. 1.8. До визначення сили тертя

Якщо рушійну силу **P** поступово збільшувати, то настане момент, коли тіло вийде із стану спокою і почне рухатись. Очевидно, що сила тертя у стані спокою залежно від ступеня попереднього зміщення може змінюватися від нуля до якогось максимального значення $\mathbf{F_T^{max}}$, причому за модулем сила тертя $\mathbf{F_T}$

завжди дорівнює рушійній силі **P** (якщо **P** не більше від $\mathbf{F_T^{max}}$). Сила тертя до початку відносно руху називається неповною силою тертя.

Максимальне значення сила тертя спокою має у момент початку відносного руху і називається найбільшою силою тертя спокою або просто силою тертя спокою. Сила тертя завжди напрямлена проти відносного руху тіла.

У XVIII ст. французькі вчені Амонтон, а потім Кулон провели важливі дослідження в галузі тертя і на цій підставі сформулювали три основних закони тертя ковзання, які прийнято називати законами Кулона:

1. Сила тертя не залежить від величини площі тертьових поверхонь.
2. Максимальна сила тертя прямо пропорційна нормальній складовій зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла.
3. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, стану тертьових поверхонь, наявності і виду мастила.

Сила тертя Ft пов'язана з нормальною складовою сили N, що притискає два тіла одне до одного, простим відношенням:

$$\mathbf{F_t = f \cdot N}$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання і є величиною безрозмірною. Коефіцієнт тертя залежить від виду матеріалів, що піддаються взаємному тертю, шорсткості поверхні тертя. Як видно з формули сили тертя ця сила не залежить від площі поверхні тіл, що труться.

1.4.2. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло, яке лежить на шорсткій похилій площині, що утворює кут α з горизонтальною площиною (рис.1.9). Розкладемо силу **G** на складові $\mathbf{G_1}$ і $\mathbf{G_2}$, паралельну і перпендикулярну до похилої площини. Модулі цих складових визначимо за формулами:

$$G_1 = G \sin \alpha \, , G_2 = G \cos \alpha .$$

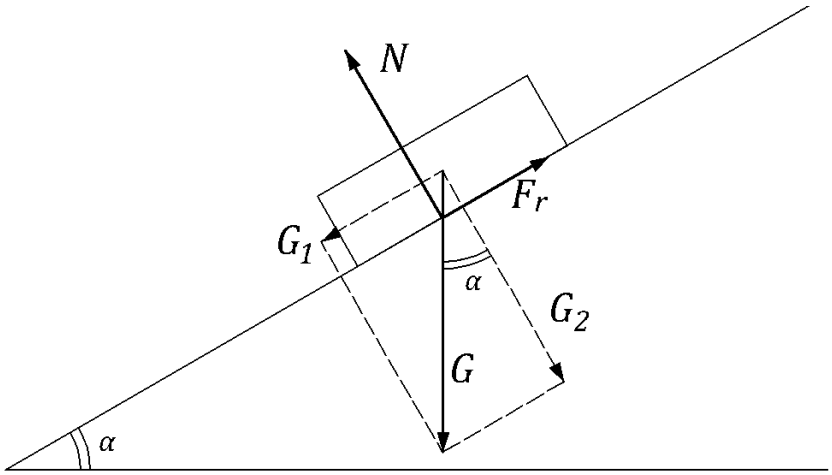


Рис. 1.9. Рівновага тіла на похилій площині

Складова $\mathbf{G_2}$ врівноважується реакцією **N** похилої площини. Тому

$$G_2 = N = G\cos\alpha.$$

Складова $\mathbf{G_1}$ намагається зрушити тіло вздовж похилої площини. Ця складова частково або повністю врівноважується силою тертя; за законом тертя ковзання її максимальне значення

$$F_T = fN = fG\cos\alpha$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання тіла по похилій площині. Щоб тіло на похилій площині було в рівновазі, рушійна сила $\mathbf{G_1}$ має дорівнювати модулем силі тертя $\mathbf{F_T}$, тобто

$$G\sin\alpha = fG\cos\alpha \text{ або } \operatorname{tg}\alpha = f$$

Звідки будемо мати: $\alpha = \varphi$.

де φ - так званий кут тертя (коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя).

Якщо кут між похилою площиною і горизонтом дорівнює куту тертя, то тіло, яке лежить на похилій площині, під дією власної сили тяжіння або рівномірно сковзатиме вниз, або буде в стані спокою. Щоб тіло, яке лежить на похилій площині, не сковзало вниз під дією власної сили тяжіння, має здійснюватись умова $\alpha < \varphi$

1.4.3. Тертя кочення

Тертям кочення називають тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках дотику однакові за величиною і напрямом. Якщо рух двох дотичних тіл відбувається за умов одночасного кочення і ковзання, то виникає тертя кочення з проковзуванням.

Розглянемо кочення циліндра без ковзання, який має вагу **G** і радіус **r**, по горизонтальній опорній площині (рис. 1.10).

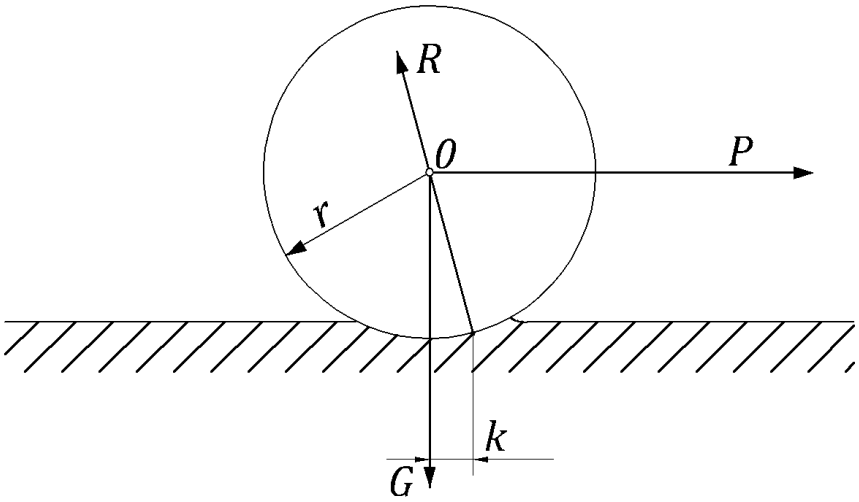


Рис. 1.10. До визначення коефіцієнта тертя кочення

Під тиском сили **G** циліндр і опорна площина в місці їх дотикання деформуватимуться. Якщо сила **P** не діє, то сила **G** урівноважуватиметься реакцією **R** опорної площини і циліндр перебуватиме в стані спокою (реакція **R** в цьому випадку матиме вертикальний напрям).

Якщо до циліндра прикласти невелику силу **P**, то, як і раніше, він буде в стані спокою. При цьому перерозподіляються тиски на опорну поверхню і повна реакція **R** пройде через якусь точку А на поверхні дороги і точку О (відповідно до теореми про рівновагу трьох непаралельних сил).

При якомусь критичному значенні **P** циліндр почне рухатися, рівномірно перекочуючись по опорній площині, а точка А займе крайнє праве положення. Звідси видно, що сила тертя кочення для стану спокою може змінюватися від нуля до певного максимального значення у момент початку руху. Позначимо

через **k** максимальне значення плеча сили **G** відносно точки А. Тоді для випадку рівномірного перекочування циліндра (тобто рівноваги) матимемо:

$$\Sigma M_A(\mathbf{P_i}) = 0$$

або: $$-Pr + Gk = 0,$$

причому плече сили **P** через незначну деформацію тіл дорівнюватиме радіусу **r** циліндра (сила **P** – горизонтальна).

З останньої рівності визначимо силу, потрібну для рівномірного кочення циліндра:

$$P = kG/r.$$

Максимальне значення плеча **k** називають коефіцієнтом тертя кочення. Коефіцієнт тертя кочення, на відміну від коефіцієнта тертя ковзання, має розмірність довжини і виражається в сантиметрах або міліметрах. З добутої формули видно, що зусилля, яке потрібне для перекочування котка, прямо пропорційне його вазі і обернено пропорційне радіусу котка.

1.4.4. Стійкість проти перекидання

Розглянемо тверде тіло вагою **G,** яке опирається на площину і може перекидатись навколо якогось ребра під дією горизонтальної сили **P** (рис.1.11). Припустимо, що сили **P** і **G** лежать в одній площині, яка перетинається з ребром у точці **A.** У момент початку перекидання на тіло діятимуть також нормальна реакція $\mathbf{N_A}$ і сила тертя F_t, прикладені у точці А. Для випадку рівноваги системи всіх чотирьох сил можна записати два рівняння:

$$\Sigma Y = 0;\ N_A - G = 0, \quad \text{звідки} \quad N_A = G;$$

$$\Sigma X = 0;\ F_T - P = 0, \quad \text{звідки} \quad P = F_T.$$

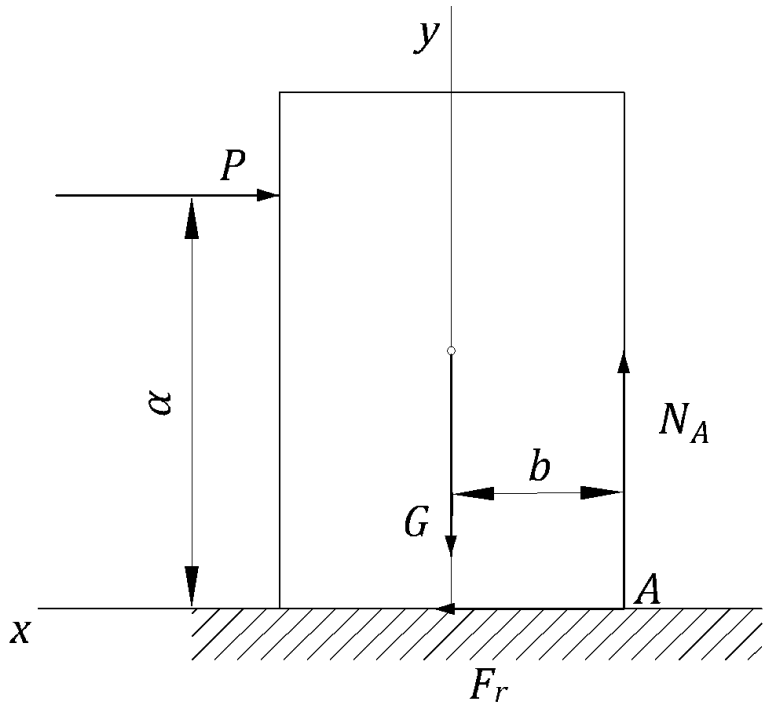


Рис. 1.11. Схема до визначення стійкості проти перекидання

Отже, в момент початку перекидання на розглядуване тіло діє пара сил (**P**;**F**$_{\text{T}}$), яка намагається перекинути тіло, і пара сил (G,N_A), що протидіє перекиданню.

Очевидно, що тіло не перекидатиметься, коли

$$\mathrm{M(G, N_A) > M(P, F_T)} \text{ або } \mathrm{Gb > Pa}.$$

Добуток Gb дорівнює моменту сили G відносно точки A і називається моментом стійкості. Момент сили відносно тієї самої точки, який дорівнює добутку Pa, називається перекидним моментом. Умову стійкості проти перекидання можна записати у вигляді нерівності

$$\mathrm{M_{ст} > M_{п}}$$

і сформулювати так: для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і достатньо, щоб момент стійкості був більшим від перекидного моменту.

Коли на тіло діє кілька сил, які намагаються перекинути його, то перекидний момент дорівнює сумі моментів сил відносно точки, навколо якої може статися перекидання. Те саме стосується і моменту стійкості. Відношення моменту стійкості до перекидного моменту називають коефіцієнтом стійкості:

$$M_{ст}/M_{п} = k_{ст}$$

Очевидно, що для споруд має бути $k_{ст} > 1$ Розрахунок стійкості особливо важливий для високих споруд, наприклад, димарів, щогл, кранів, високих стін і т. д. Зазначимо, що для випадку, коли $P > F_{т}$, а перекидний момент менший від моменту стійкості, тіло сковзатиме по опорній площині, якщо конструкція допускає такий рух.

1.5. Центр ваги

Відомо, що силу, з якою тіло притягується до землі, називають вагою. В багатьох задачах теоретичної механіки, опору матеріалів, інших технічних науках з'являється необхідність визначення центра ваги тіла. Визначення центра ваги має велике значення і від правильного його визначення часто залежить правильне рішення всієї задачі. Наприклад, в автомобілебудуванні для проектування автомобіля важливо знати положення центра ваги по довжині авто, по його ширині (рис. 1.12). . Вкрай важливим є положення центра ваги по вертикалі. Чим вище положення центра ваги автомобіля, тим менш стіким він буде в русі і особливо на поворотах.

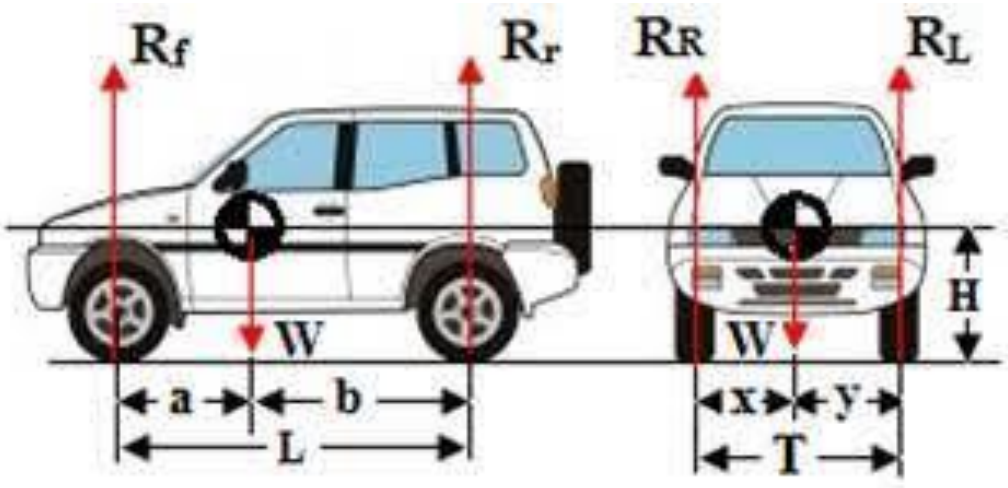


Рис. 1.12. Центр ваги автомобіля

1.5.1. Методи знаходження центра ваги

Розглянемо три методи знаходження центра ваги: метод симетрії, метод розбиття, метод від'ємних мас.

Метод симетрії. Уявимо однорідне тіло, яке має площину симетрії.

Візьмемо таку систему координат, щоб осі X і Z лежали в площині симетрії (рис.1.13).

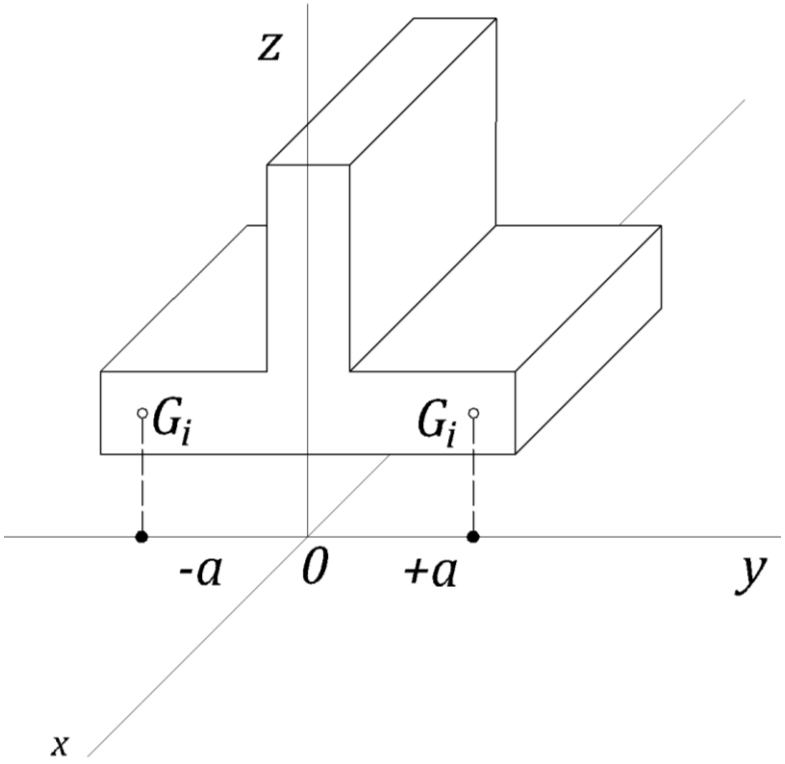


Рис. 1.13. До визначення центра ваги тіла

Тоді кожній елементарній частинці з силою тяжіння G_i абсцисою $y_i = +a$ відповідатиме така сама елементарна частинка з абсцисою $y_i = -a$. Тому відстань від початку координат до центру ваги Yc буде дорівнювати:

$$Y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}$$

Звідси випливає висновок: якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині. Аналогічно можна довести і такі твердження:

якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла лежить на цій осі; якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то його центр ваги лежить у точці їх перетину; центр ваги однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

Метод розбиття. Цей метод полягає у тому, що тіло розбивають (ділять) на найменшу кількість частин, сили тяжіння і центри ваги яких відомі. Після цього застосовують вже відомі формули.

Припустимо, що тіло, сила тяжіння якого G, розбили на три частини; G', G", G'". Абсциси центрів ваги цих частин x_c, x_c", x_c'" відомі. Використавши формулу для визначення абсциси центра ваги усього тіла легко знайти координату центра ваги:

$$x_c = \sum (G_t x_i) / \sum G_i$$

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

2.1. Рух точки. Способи задавання руху точки.

Знати закони руху тіла означає знати закони руху кожної його точки, тому вивчення кінематики почнемо з вивчення руху матеріальної точки.

Траєкторією точки тіла називають множину (геометричне місце) положень рухомої точки в розглядуваній системі відліку. Залежно від форми траєкторії рух тіла поділяють на прямолінійний і криволінійний. Розглянемо два способи задавання руху точки: звичайний і координатний.

Звичайний спосіб полягає у тому, що рух точки задають її траєкторією і рівнянням руху по цій траєкторії (законом руху).

Рівняння руху в загальному випадку записують так:

$$s = f(t),$$

де s – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу; t – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки у будь-який момент часу; для цього в рівняння $s = f(t)$ треба підставити час. Рухаючись, точка проходить якийсь шлях, що також є функцією часу. Підкреслимо, що шлях, пройдений точкою, збігається з відстанню від початку відліку тільки тоді, коли точка весь час рухається в одному напрямі і початок її руху збігається з початком відліку.

Координатний спосіб полягає у тому, що рух точки задають рухом її проекцій вздовж осей координат. Рівняння плоского руху точки у координатному вигляді записують так:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t)$$

Знаючи рівняння руху точки, записані у координатному вигляді, і підставляючи в ці рівняння час, можна знайти проекції точки, а отже, і місце самої точки в будь-який момент часу (рис. 2.1). Щоб за координатним способом

задавання руху точки визначити рівняння траєкторії y = f(t), з рівнянь руху треба виключити час.

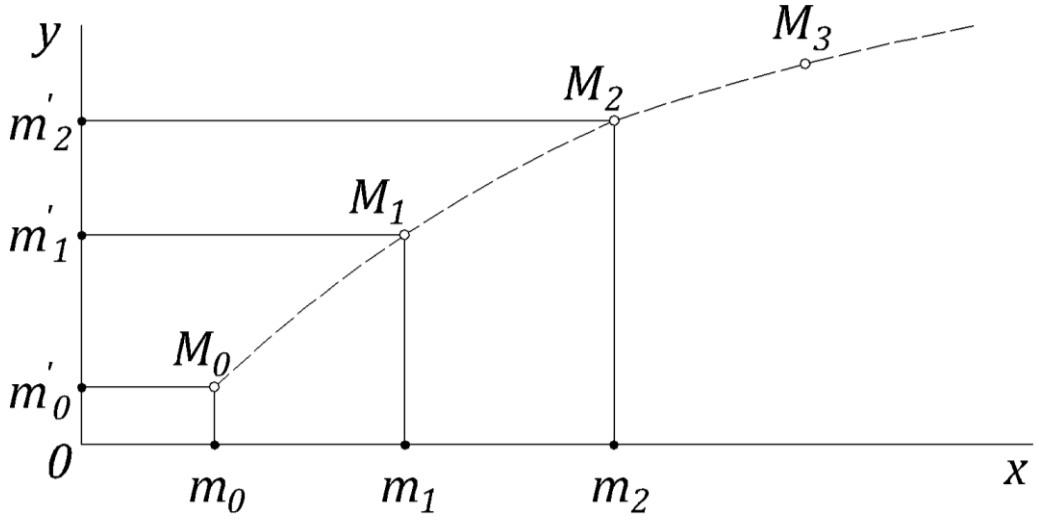


Рис. 2.1. Координатний спосіб задавання руху точки

За міжнародною системою одиниць (СІ) за одиницю довжини беруть метр, а за одиницю часу – секунду.

2.2. Швидкість точки

Швидкість – це кінематична міра руху точки, що характеризує бистроту зміни її положення.

Як відомо з фізики, швидкість рівномірного руху вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:

$$v = s / t = \text{const}$$

(маємо на увазі, що початки відліку шляху і часу збігаються).

Одиниця швидкості

$$[v]=\frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр на секунду=м/с.}$$

Швидкість є величина векторна. Для прямолінійного рівномірного руху швидкість стала як за модулем, так і за напрямом, а її вектор збігається з траєкторією (рис.2.2,а).

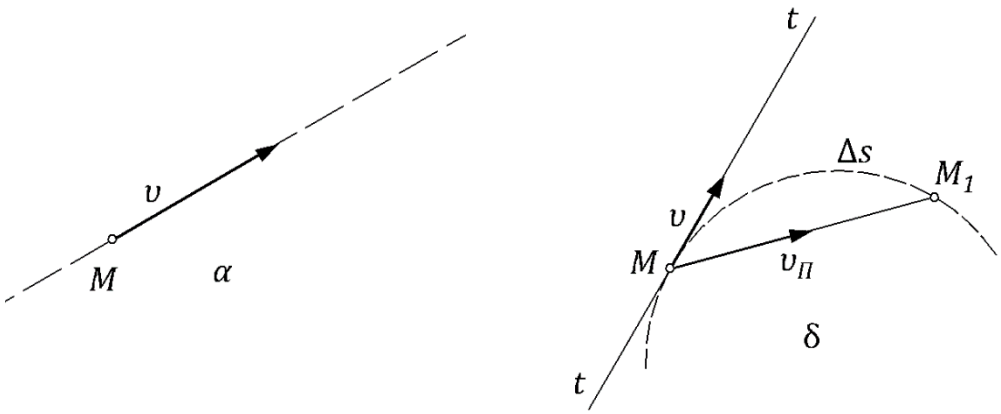


Рис. 2.2. Напрямок вектору швидкості: а) при прямолінійному русі; б) – при криволінійному

У випадку криволінійного руху швидкість точки за напрямом змінюється. Щоб визначити напрям вектора швидкості для криволінійного руху, розіб'ємо траєкторію на безмежно малі ділянки шляху, які можна вважати (оскільки вони дуже малі) прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість $\upsilon_п$ такого прямолінійного руху буде напрямлена по хорді. Оскільки Δs прямує до нуля, то хорда збігається з дотичною, тому швидкість у кожний момент часу напрямлена по дотичній до траєкторії в напрямі руху (рис. 2.2, б). Коли точка рухається нерівномірно, то модуль її швидкості змінюється.

Уявимо точку, рух якої задано звичайним способом рівнянням:

$$s = f(t).$$

Якщо за невеликий проміжок часу Δt точка пройшла шлях Δs, то її середня швидкість буде

$$v_c = \Delta s / \Delta t.$$

Але середня швидкість не дає уявлення про дійсну швидкість у кожний момент часу (дійсну швидкість називають миттєвою). Чим менший проміжок часу, за який визначають середню швидкість, тим ближче вона до дійсної.

Дійсна швидкість – це границя, до якої прямує середня швидкість, коли Δt прямує до нуля:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s / \Delta t = \frac{ds}{dt}.$$

Отже, числове значення швидкості дорівнює

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Дійсна швидкість для будь-якого руху точки дорівнює першій похідній координати (тобто відстані від початку відліку переміщення) за часом.

2.3. Прискорення точки в прямолінійному русі

Прискорення – це кінематична міра зміни вектора швидкості точки. Прискорення – величина векторна. У прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією. З курсу фізики відомо, що прискорення – це зміна швидкості за одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася на Δv, то середнє прискорення

$$a_c = \Delta v / \Delta t.$$

Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення у кожний даний момент часу (дійсне прискорення називають миттєвим). Чим менший проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до дійсного. Дійсне прискорення – це границя, до якої прямує середнє прискорення при Δt, що прямує до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Отже, враховуючи, що $v = \frac{dv}{dt}$, дістаємо

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості за часом або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Одиниця прискорення

$$[a]=\frac{[v]}{[t]}=\frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}}=\text{метр на секунду у квадраті} = \text{м/с}^2.$$

2.4. Прискорення точки в криволінійному русі

Коли точка рухається по криволінійній траєкторії, то швидкість змінює свій напрям. Уявимо точку М, яка за час Δt, рухаючись по криволінійній траєкторії, перемістилась у положення M_1 (рис. 2.3). Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо Δυ, тоді

$$\Delta v = v_1 - v.$$

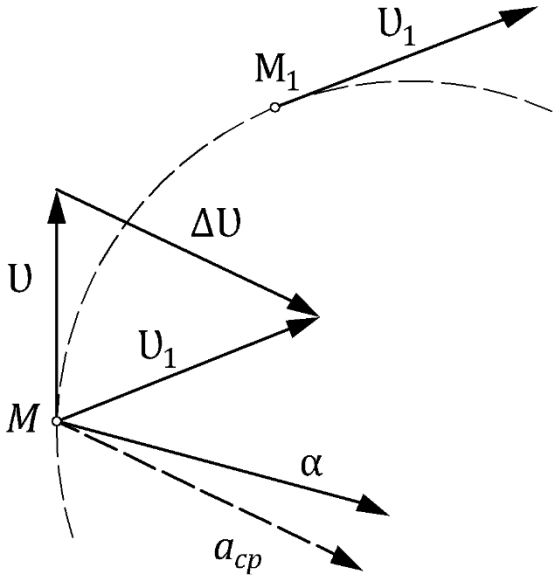


Рис. 2.3. (9.6). Схема до визначення прискорення при криволінійному русі

Щоб знайти вектор Δυ, перенесемо вектор υ_1 у точку М і побудуємо трикутник швидкостей. Знайдемо вектор середнього прискорення

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вектор a_c паралельний вектору Δυ, оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрям вектора не зміниться. Вектор дійсного прискорення – це границя, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли він прямує до нуля,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Таку границю називають векторною похідною. Таким чином, дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом. З рис.2.3 видно, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди напрямлений у бік угнутості траєкторії. Зважаючи на те, що похідну безпосередньо обчислити не можемо, визначатимемо прискорення в криволінійному русі іншим способом. Так, наприклад, якщо рух точки задано звичайним способом, то застосовують теорему про проекції прискорення на дотичну і нормаль.

2.4.1. Теорема про проекції швидкості на координатну вісь

Якщо рух точки задано звичайним способом, то її швидкість знаходять як першу похідну переміщення за часом; якщо ж рух точки задано координатним способом,– то за допомогою теореми про проекції швидкості на координатну вісь.

Теорема. Проекція швидкості на координатну вісь дорівнює першій похідній відповідної координати за часом.

Нехай плоский рух точки М задано координатним способом рівняннями руху

$$x = f(t), \quad y = f_1(t).$$

За час $\Delta\upsilon$ точка перейшла з положення М у положення M_1 (рис.2.4). Коли б точка рухалась по хорді рівномірно, то її умовна швидкість дорівнювала б

$$v_{\text{n}} = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Спроектуємо вектор v_{n} і точку М на вісь х, тоді

$$v_{\text{nx}} = v_{\text{n}} \cos\left(v_{\text{n}}, x\right) = \frac{MM_1}{\Delta t} \cos(v_{\text{n}}, x).$$

Оскільки

$$MM_1 \cos(v_n, x) = \Delta x,$$

$$то \quad v_{nx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

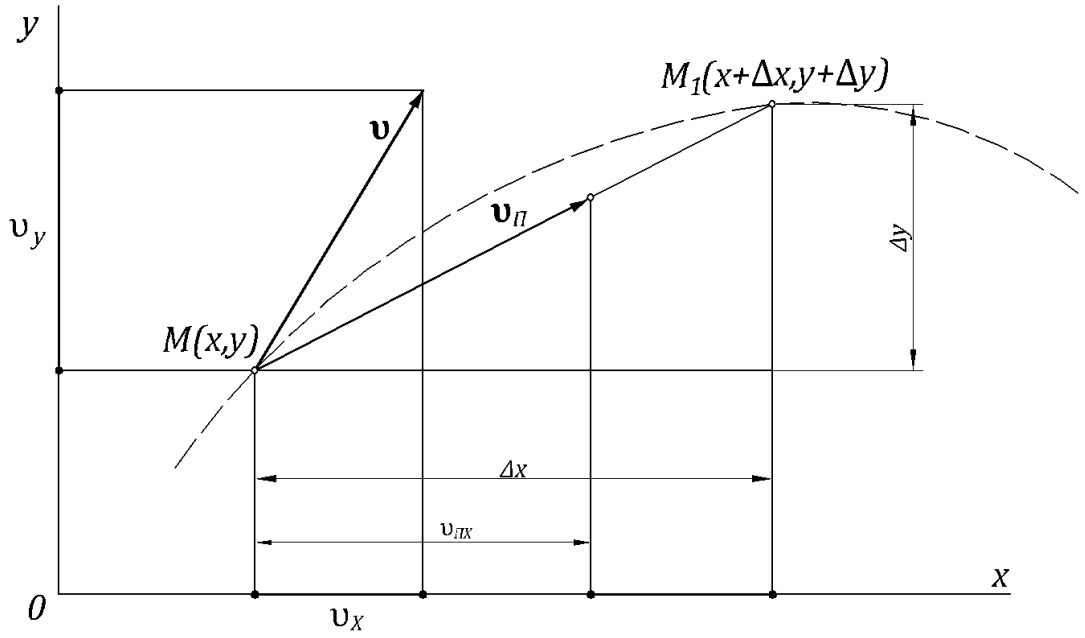


Рис. 2.4. До визначення проекції швидкості на координатну вісь

Перейшовши до межі, матимемо: $\mathrm{v_x} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$. Таким чином теорема доведена.

Аналогічно матимемо: $\mathrm{v_y} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$

Знаючі дві проекції швидкості, можна знайти її модуль і направлення за формулою:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v_x^2} + \mathrm{v_y^2}}$$

2.4.2. Теорема про проекцію прискорення на координатну вісь

Якщо рух точки задано звичайним способом, то її прискорення визначають за теоремою про проекцію прискорення на дотичну і нормаль; якщо ж рух точки задано координатним способом, то за допомогою теореми про проекцію прискорення на координатну вісь.

Теорема. Проекція прискорення на координатну вісь дорівнює другій похідній від відповідної координати за часом.

З доведеної у попередньому пункті теореми видно, що проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює швидкості проекції точки на ту саму вісь.

Ці міркування застосовні й до прискорення точки, тобто проекція прискорення точки на координатну вісь дорівнює прискоренню проекції точки на ту саму вісь. Оскільки проекції точок на осі рухаються прямолінійно, то відповідно до попереднього пункту

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Знаючи дві проекції прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення за формулами: модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

2.5. Найпростіші рухи твердого тіла

Розрізняють два види найпростіших рухів твердого тіла: поступальний і обертальний навколо нерухомої осі.

Поступальний рух

Рух тіла, під час якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною сама собі, називають поступальним. Уявлення про поступальний рух можна скласти, спостерігаючи рух вагона трамвая на прямолінійній ділянці шляху; поступально рухається стіл поздовжньо-стругального верстата, поршень стаціонарного двигуна внутрішнього згоряння тощо.

Рух, при якому хоча б дві точки твердого тіла чи незмінної системи залишаються нерухомими, називається **обертальним**; пряма, яка сполучає ці дві точки, називається віссю обертання. В означенні обертального руху йдеться про незмінну систему, тому вісь обертання може бути й за межами тіла.

Обертальний рух у техніці – явище дуже поширене. Переважна більшість механізмів і машин мають ланки, які рухаються обертально, наприклад вали, зубчасті колеса, кривошипи тощо. Зазначимо, що поняття обертального руху

може стосуватися лише тіла, але не точки; так, наприклад, рух точки по колу – не обертальний рух, а криволінійний.

Під час обертального руху тіла його точки, що містяться на різних відстанях від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення, але мають однакові кутові швидкості.

2.6. Початкові відомості про складний рух точки

Досі розглядався рух точки відносно однієї системи координат, яку вважали нерухомою. Проте все навколо перебуває у неперервному русі, а нерухомої системи координат насправді не існує. Тому нерідко доводиться розглядати рух точок одночасно відносно двох систем відліку, одну з яких умовно приймають нерухомою, а друга певним способом рухається відносно першої. У такому випадку рух точки називають складним.

Рух точки відносно нерухомої системи координат називають абсолютним. Рух точки відносно рухомої системи координат називають відносним. Рух рухомої системи координат відносно нерухомої називають переносним. Абсолютний рух точки складний, він містить у собі відносний і переносний рухи.

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА

3.1. Аксіоми динаміки. Основне рівняння

Динаміка – це частина теоретичної механіки, яка вивчає механічний рух тіл залежно від сил що, впливають на цей рух.

Встановлення основних законів динаміки почалося з часів італійського вченого Галілея (1564–1642); далі його продовжив Ньютон. Галілей спростував погляд, який панував у науці з часів Аристотеля (IV ст. до н. е.), про те, що з двох падаючих на Землю тіл важче те, яке падає швидше. Галілей виявив, що причиною зміни швидкості є сила, тобто причина виникнення прискорення.

Динаміка ґрунтується на ряді положень, що є аксіомами і називаються законами динаміки. Перед тим, як перейти до вивчення цих законів, введемо поняття ізольованої матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Насправді ізольованих тіл у природі не існує і поняття ізольованої матеріальної точки цілком умовне.

Перший закон динаміки, який називають аксіомою інерції або першим законом Ньютона, стосовно матеріальної точки формулюється так: ізольована матеріальна точка перебуває або у стані спокою, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух – це єдиний вид руху, в якому прискорення дорівнює нулю. Тому аксіому інерції можна сформулювати так: прискорення ізольованої матеріальної точки дорівнює нулю.

Отже, ізольована від впливу навколишніх тіл точка сама собі не може надати прискорення. Цю властивість тіл називають інерцією, або інертністю. Можна сказати, що інерція, або інертність – це властивість тіла зберігати свою швидкість незмінною за модулем і напрямом (у тому числі і швидкість, яка дорівнює нулю).

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила. Залежність між силою і наданим нею прискоренням виражається другим законом динаміки, або другим законом Ньютона, який формулюється

так: прискорення, якого надає матеріальній точці сила, має напрям сили і пропорційне її модулю. Якщо сила $\mathbf{P_1}$ надає матеріальній точці прискорення $\mathbf{a_1}$ а сила $\mathbf{P_2}$ – прискорення $\mathbf{a_2}$, то за другим законом можна записати

$$P_1 / P_2 = a_1 / a_2 \quad \text{або} \quad P_1 / a_1 = P_2 / a_2.$$

Отже, для даної матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина стала. Це відношення позначимо m і назвемо масою даної точки:

$$P / a = m = \text{const}.$$

Ця рівність означає, що дві матеріальні точки мають однакові маси, якщо від однієї і тієї самої сили вони набувають однакового прискорення. Чим більша маса точки, тим більшу силу треба прикласти, щоб надати їй потрібного прискорення. Маса – одна з основних характеристик будь-якого матеріального об’єкта, що визначає його інертні і гравітаційні властивості. Ньютон називав масою кількість матерії в тілі і вважав масу сталою величиною.

У сучасних поглядах маса тіла (відношення сили до прискорення) – величина змінна, яка залежить від швидкості руху. Так, наприклад, спостереженнями за рухом у прискорювачах заряджених частинок доведено, що інертність частинки, тобто здатність зберігати свою швидкість, зростає із збільшенням її швидкості.

Теорія відносності встановила таку залежність між масою тіла, що перебуває у стані спокою і в русі:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_0\sqrt{1 - \upsilon^2/\mathrm{c}^2},$$

де m – маса рухомого тіла, $\mathrm{т}_0$ – маса спокою, v – швидкість руху тіла, c – швидкість світла. З цієї формули видно, що чим більша швидкість руху тіла, тим більша його маса і тому тим важче надати йому дальшого прискорення.

Спираючись на висновки теорії відносності, сучасна наука дає таке означення маси: маса – це міра інертності тіла. Проте маса змінюється помітно лише при дуже великих швидкостях, близьких до швидкості світла, тому далі цю зміну звичайно не братимемо до уваги і вважатимемо масу величиною сталою.

Другий закон Ньютона має вигляд

$$P = ma.$$

Його називають основним рівнянням динаміки і формулюють так: сила – це вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення.

Основне рівняння динаміки – це рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. З досліду відомо, що під дією притягання Землі тіла падають у пустоті в даному місці з однаковим прискоренням, яке називають прискоренням вільного падіння. Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла $G_1 = m_1 g$, а другого $G_2 = m_2 g$, то

$$G_1 / G_2 = m_1 g / (m_2 g) = m_1 / m_2,$$

тобто сили тяжіння тіл пропорційні їх масам; це дає змогу порівнювати маси тіл зважуванням.

Прискорення вільного падіння g у різних місцях земної поверхні різне; воно зменшується від полюса до екватора, бо земна куля сплюснута в напрямі полюсів. Іншою причиною зменшення прискорення вільного падіння при переміщенні від полюсів до екватора є відцентрова сила інерції, про яку буде сказано далі. На полюсах g=9,83 м/с^2, на екваторі g = 9,78 м/с^2. З цього випливає, що сила тяжіння тіла залежить від місця, в якому зважують тіла.

Із другого закону Ньютона виходить, що під впливом сталої сили вільна матеріальна точка, яка була у стані спокою, рухатиметься прямолінійно рівномірно. Рух під дією сталої сили може бути прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сил). Прикладом руху під впливом сталої сили є вільне падіння тіл.

До основних законів динаміки відносять відому із статики аксіому взаємодії, або третій закон Ньютона. Стосовно матеріальної точки закон формулюють так: сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і мають протилежні напрями.

3.2. Принцип незалежності дії сил. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Принцип незалежності дії сил формулюється так: коли на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то її прискорення дорівнює векторній сумі прискорень, що їх набувала б ця точка від кожної сили окремо.

Нехай до матеріальної точки А прикладені сили $\mathbf{P_1}$ і $\mathbf{P_2}$, рівнодіюча яких **P**. За аксіомою паралелограма запишемо

$$P_1 + P_2 = P.$$

Поділивши обидві частини рівності на масу точки **т,** дістанемо

$$P_1 / m + P_2 / m = P / m, \text{ звідки } a_1 + a_2 = a.$$

Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма, можемо сказати, що коли на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то прискорення руху буде таким, якого б надавала рівнодіюча сила

$$P = \sum P_i.$$

За принципом незалежності дії сил складемо рівняння руху матеріальної точки в диференціальному вигляді. Нехай матеріальна точка А масою т рухається у площині рисунка під дією сили $P = \sum P_i$. з прискоренням а, тоді

$$P = ma.$$

Спроектуємо цю векторну рівність на дві взаємно перпендикулярні осі координат х і **у** (осі і вектор сили **P** лежать в одній площині). Тоді запишемо рівняння плоского руху матеріальної точки у координатному вигляді:

$$P_x = \Sigma X = ma_x, \quad P_y = \Sigma Y = ma_y.$$

Застосовуючи теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, ці рівняння можемо записати у вигляді диференціальних рівнянь плоского руху матеріальної точки:

$$\Sigma X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Sigma Y = m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

У цих рівняннях ΣX і ΣY – алгебраїчні суми проекцій сил, які діють на точку, на відповідні координатні осі, x і y біжучі координати точки. За допомогою знайдених рівнянь розв'язують дві основні задачі динаміки:

1) за заданим рухом точки визначити сили, які діють на неї;

2) знаючи сили, які діють на точку, визначити її рух.

Коли під час розв'язування задач маємо справу з невільною матеріальною точкою, треба застосовувати принцип звільнюваності, тобто відкинути в'язі і замінити їх реакціями, враховуючи їх у рівняннях руху так само, як активні сили, що діють на точку.

3.3. Рух матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту

Розглянемо матеріальну точку M масою т, кинуту з точки 0 поверхні Землі з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту (рис. 3.1). Визначимо рух точки M, вважаючи, що на неї діє тільки сила тяжіння G (опір повітря не враховуємо). Початок координат візьмемо в точці 0, вісь x напрямимо по горизонталі вправо, а вісь y – по вертикалі вгору. Складемо диференціальні рівняння руху точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$$

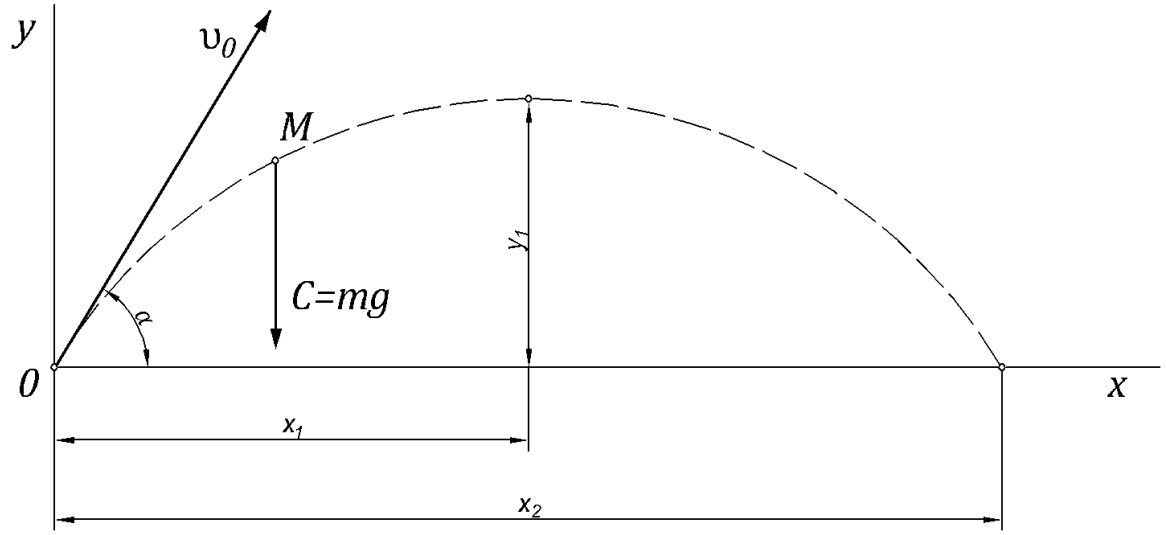


Рис. 3.1. Схема до визначення руху матеріальної точки

Скоротимо ці рівності на т, тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{3.2}$$

Після інтегрування рівняння (3.1) знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = C_1.$$

За теоремою про проекцію швидкості на координатну вісь,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1,$$

отже, проекція швидкості точки М на вісь х весь час залишається величиною сталою

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

З останніх двох рівностей маємо

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо:

$$x = v_0 \, t \cos\alpha + C_2.$$

За умовою, коли t = 0, то х = 0, тому довільна стала $C_2 = 0$. Остаточно

$$x = v_0 t cos\alpha.$$

Після інтегрування рівняння (3.2) знаходимо

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_3.$$

Підставимо в це рівняння значення t=0, тоді

$$C_3 = v_y = v_0 sin\alpha.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Інтегруючи ще раз, дістаємо

$$y = v_0 t\ sin\,\alpha - gt^2 / 2 - C_4.$$

За умовою, коли t = 0, то y = 0, тому довільна стала $C_4 = 0$. Остаточно

$$y = v_0 t\ sin\,\alpha - gt^2 / 2.$$

Отже, матеріальна точка M, кинута з швидкістю v_0 під кутом α до горизонту, рухається відповідно до рівнянь

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t\ sin\,\alpha - gt^2 / 2.$$

Щоб визначити траєкторію точки M, виключимо з рівнянь руху час. Для цього знайдемо час з першого рівняння руху

$$t = x / (v_0 \cos\alpha)$$

і підставимо його значення у друге рівняння. Тоді рівняння траєкторії запишеться

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2\alpha).$$

Траєкторія точки M – є парабола з вертикальною віссю симетрії. Визначимо час польоту точки M. Для цього в друге рівняння руху підставимо значення y=0. Тоді рівняння набуде вигляду

$$v_0 t \sin\alpha - gt^2 / 2 = 0.$$

Звідси знаходимо два значення часу, при яких ордината дорівнює нулю:

$$t_0 = 0, \quad t_2 = (2v_0 \sin\alpha) / g.$$

Перше значення часу відповідає початку польоту, друге – кінцеве. Тривалість польоту

$$t_2 - t_0 = t_2 = (2v_0 \sin\alpha) / g.$$

Щоб визначити дальність польоту, в перше рівняння руху підставимо значення часу t_2:

$$x_2 = v_0 t_2 \cos\alpha = (v_0 \cos\alpha \cdot 2v_0 \sin\alpha) / g$$

або

$$x_2 = (v_0^2 \sin 2\alpha) / g.$$

З цього рівняння видно, що максимальна дальність польоту $x_{\max}$ буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, тобто коли $\alpha = \pi/4$ рад: $x_{\max} = v_0^2 / g$. Знайдемо найбільшу висоту піднімання точки М, тобто в момент, коли проекція її швидкості на вісь ординат дорівнюватиме нулю:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1 = 0.$$

З цієї рівності знайдемо t_1:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = t_2/2$$

Отже, найвище точка підніметься у середині шляху польоту, коли

$$x_1 = x_2 / 2.$$

Підставимо значення t_1 у друге рівняння руху

$$y_1 = (v_0 \sin\alpha v_0 \sin\alpha) / g - g v_0^2 \sin^2\alpha / (2g^2),$$

Звідси

$$y_1 = (v_0^2 \sin^2\alpha) / (2g).$$

З цього рівняння видно, що точка досягає максимальної висоти, коли $\sin\alpha = 1$ або $\alpha = \pi/2$ рад, тобто коли точку кинути вертикально вгору:

$$y_{\max} = v_0^2 / 2g.$$

3.4. Метод кінетостатики

Нехай матеріальна точка, маса якої m, рухається з прискоренням a під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодіюча яких **P**. Скористаємось однією з відомих формул (основним рівнянням динаміки), щоб рівняння руху записати у вигляді рівнянь рівноваги (метод кінетостатики):

$$P = ma.$$

Перепишемо це рівняння у такому вигляді

$$P + (-ma) = 0.$$

Вираз у дужках позначимо $F^{ін}$ і назвемо силою інерції:

$$F^{ін} = -ma.$$

Сила інерції – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її прискорення і має протилежний до прискорення напрям. Тоді

$$P + F^{ін} = 0 \quad \text{або} \quad \Sigma(P, F^{ін}) = 0.$$

Цю рівність, яка є математичним виразом принципу, що носить ім’я французького вченого Д’аламбера (1717–1783), можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Підкреслимо, що добута рівність, хоч і називається рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

Зауважимо, що ще до Д'аламбера над загальним методом, за допомогою якого рівнянням динаміки надають вигляду рівнянь статики, працювали Я. Герман (1716) і Л. Ейлер (1737).

Принцип Д’аламбера формулюють так: активні і реактивні сили, які діють на матеріальну точку, разом із силами інерції утворюють систему взаємно зрівноважених сил, що відповідає всім умовам рівноваги.

Треба пам’ятати, що сила інерції прикладена до розглядуваної матеріальної точки умовно, але для в’язі, яка спричинює прискорення, вона реальна. Пояснимо це на прикладі (рис. 3.2). Нехай до тіла, яке лежить на горизонтальній площині, прив’язано нитку, яка може витримати силу тяжіння **G** цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу **T** статично (поступово), то тіло

підніметься вгору і нитка не обірветься, а коли силу **Т** прикласти динамічно (раптово, ривком), то нитка обірветься.

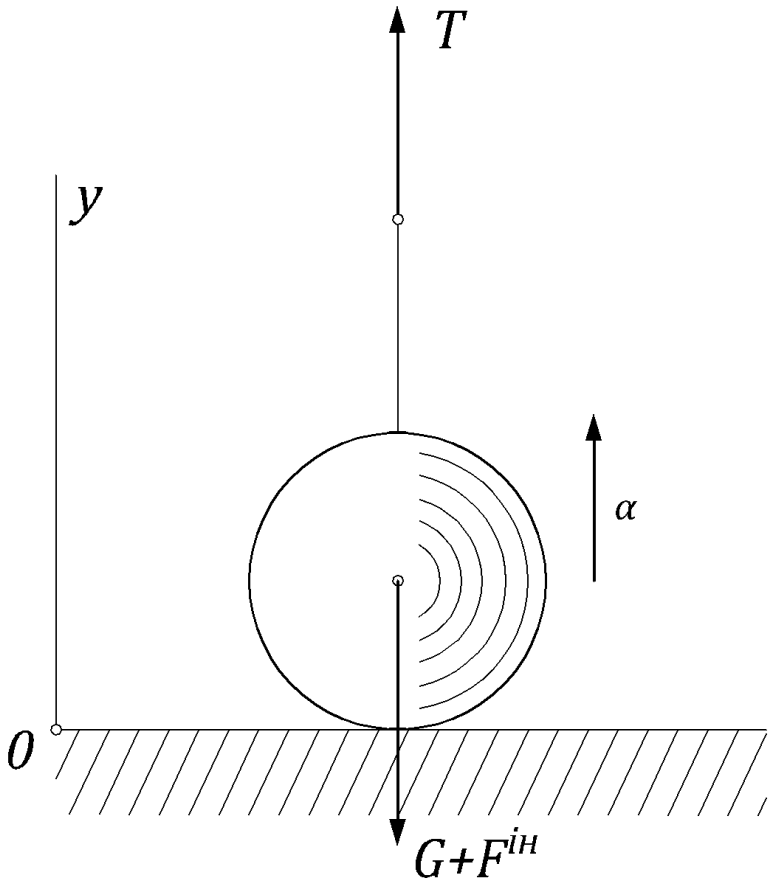


Рис. 3.2. Схема до методу кінетостатики

Це пояснюється так. Щоб підняти вантаж, йому потрібно надати певного прискорення **а**. Для визначення натягу нитки застосуємо принцип Д'аламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = 0; \;\; T - G - F^{\text{ін}} = 0,$$

звідки

$$T = G + F^{\text{ін}} = G + ma.$$

У першому випадку вантаж набуває невеликого прискорення і сила інерції, що збільшує натяг нитки, невелика, прискорення а=0; у другому випадку прискорення, яке надається тілу, значне і сила інерції відповідно зростає. В обох випадках сила інерції не збільшує тиску на опору, бо прикладена до тіла умовно. Зазначимо, що вагою тіла називають силу, з якою тіло внаслідок

притягання до Землі діє на опору (або підвіс), яка утримує його від вільного падіння. Якщо тіло і опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

3.5. Сили інерції у криволінійному русі

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень.

Дотичне прискорення $a_t = \frac{dv}{dt}$, нормальне прискорення $a_n = \nu^2 / \rho$, повне прискорення $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$.

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$F_t^{\text{ін}} = m\frac{dv}{dt}$ – дотична, або тангенціальна, сила інерції;

$F_n^{\text{ін}} = mv^2 / \rho$ – нормальна, або відцентрова, сила інерції;

$F^{ін} = ma$ – повна сила інерції.

Як приклад розглянемо рівномірний рух по колу, що лежить у горизонтальній площині, каменя, на який діє сила тяжіння G. Камінь прив'язано до невагомої нитки завдовжки R, яка лежить у тій самій площині (рис. 3.3, а). Щоб нитка залишалась у площині руху каменя, припускаємо, що він ковзає по ідеальній гладенькій горизонтальній площині. Швидкість каменя позначимо v. Тоді $F_n^{ін} = mv^2 / R$ – відцентрова сила інерції (ця сила натягує нитку); $N = mv^2 / R$ – доцентрова сила, прикладена до каменя (ця сила утримує камінь на колі). Відцентрова і доцентрова сили (дія і протидія) за третім законом Ньютона дорівнюють одна одній за модулем і мають протилежні напрями.

Очевидно, що дотична сила інерції $F_t^{ін}$ у цьому випадку дорівнює нулю, бо $v = \text{const}.3$ досвіду відомо, що при достатній швидкості нитка може розірватись і камінь полетить по дотичній до кола, тобто в напрямі швидкості, яку має камінь у момент розриву нитки. Це свідчить про те, що відцентрова сила інерції є реальною силою для в'язі, але до тіла вона прикладена умовно.

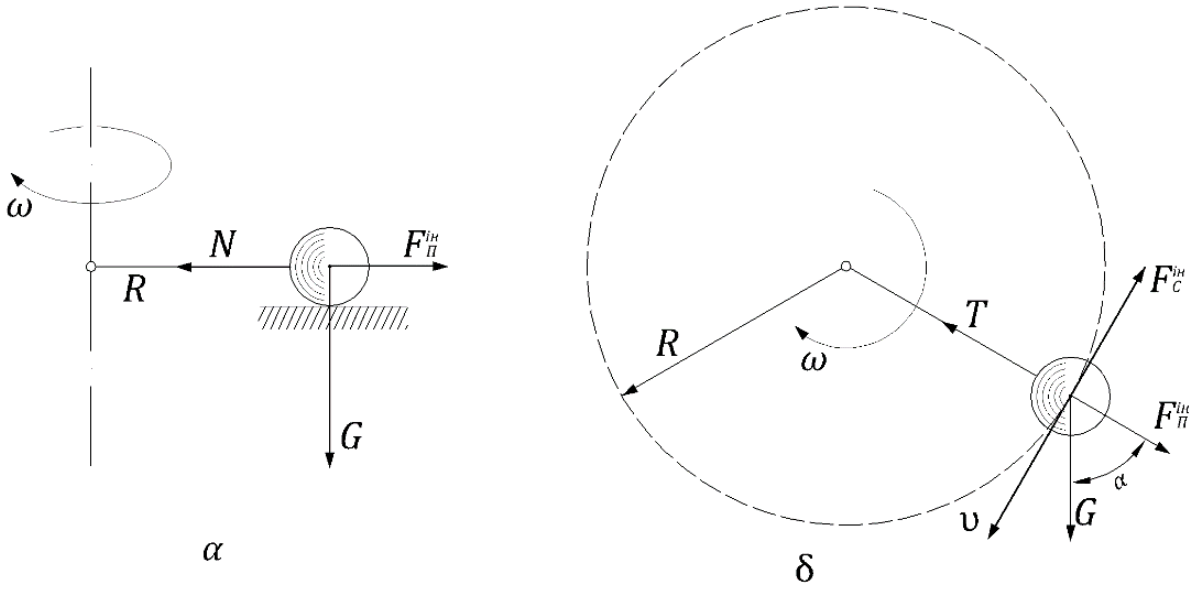


Рис. 3.3. До визначення сили інерції при криволінійному русі

Всередині тіл, які рухаються з прискоренням, також виникають внутрішні сили інерції, бо для кожної частинки тіла сусідні частинки є в'язями. Знайдемо, чому дорівнюватиме натяг нитки, коли камінь рухається по колу, яке лежить у вертикальній площині (рис. 3.3, б).

Щоб знайти натяг Т нитки, застосуємо принцип Д'аламбера, тобто прикладемо до каменя нормальну силу інерції $F_t^{ін}$ і дотичну силу інерції $F_t^{ін}$ Спроектуємо всі сили на напрям нитки, тоді

$$T - G\cos\alpha - F_n^{\text{in}} = 0,$$

звідки

$$T = F_n^{\text{ін}} + G\cos\alpha = mv^2 / R + G\cos\alpha.$$

Натяг нитки буде максимальним, коли α = 0, тобто коли камінь буде в нижньому положенні:

$$T_{\max} = mv^2 / R + G.$$

Натяг нитки буде мінімальним, коли α = π рад, тобто коли камінь буде вгорі:

$$T_{\min} = mv^2 / R - G.$$

Зазначимо, що під впливом сили тяжіння каменя модуль його швидкості v змінюватиметься і досягне найменшого значення у верхньому положенні, а найбільшого – в нижньому. Якщо лінійну швидкість каменя виразити через кутову швидкість нитки

$$v = \omega R,$$

то формулу відцентрової сили інерції можна записати

$$F_n^{\text{ін}} = m\omega^2 R.$$

Аналогічний приклад можна навести про обертання місяця навколо Землі. Тут в якості в'язі виступає сила тяжіння землі. Місяць не може відірватись від землі, бо його притягує сила тяжіння. Місяць не може впасти на землю, бо відцентрова сила інерції напрямлена в протилежному напрямку. Алгебраїчна сума сил тяжіння і інерції дорівнює нулю і умова рівноваги в розумінні принципу Д'аламбера виконується.

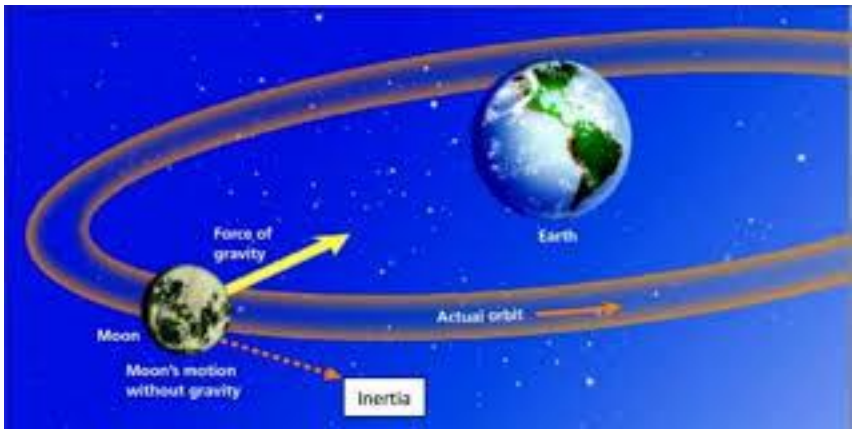


Рис. 3.4. Схема обертання місяця навколо землі

3.6. Робота сталої сили на прямолінійній ділянці шляху

Розглянемо матеріальну точку **M,** до якої прикладено серед інших силу **P.** Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення $\mathbf{M_0}$ у положення $\mathbf{M_1}$ і пройшла при цьому шлях S (рис. 3.4).

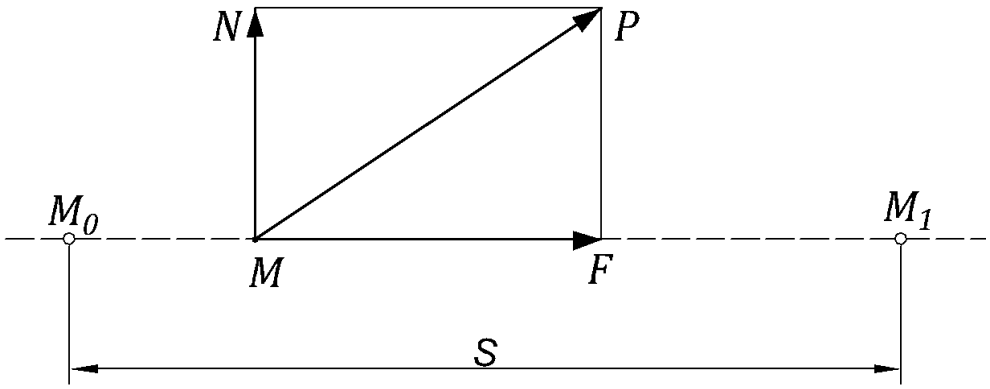


Рис. 3.4. До визначення роботи сталої сили

Щоб визначити кількісну міру дії сили **P** на шляху S, розкладемо цю силу на складові **N** і **F,** напрямлені відповідно перпендикулярно до напряму переміщення і вздовж його. Оскільки складова **N** не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямі S, то дію сили **P** на шляху S можна визначити добутком FS. Цю величину називають роботою і позначають A Отже,

$$A = Fs = Ps\cos\alpha,$$

тобто робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямами сили і переміщення. Отже, робота – це міра дії сили, прикладеної до матеріальної точки під час її переміщення. Робота – величина скалярна. Розглянемо три окремих випадки обчислення роботи:

1) α = 0, тоді $A = Ps.$; 2) α = 90 тоді A = 0; 3) α = 180 °, тоді $A = -Ps.$

Виходить, що робота буде додатною, якщо напрями сили і переміщення збігаються (α < 90 °); вона буде від'ємною, коли напрям сили протилежний до напряму переміщення (α=90°) робота дорівнює нулю, коли напрями сили і переміщення взаємно перпендикулярні. Так, наприклад, коли тіло піднімається вгору, то робота сили тяжіння буде від'ємною, коли тіло рухається вниз – додатною, а коли тіло рухається по горизонтальній поверхні, то робота сили тяжіння дорівнює нулю. Сили, які виконують додатну роботу, називають рушійними силами, а ті, що виконують від'ємну роботу,– силами опору. Одиниця роботи [A]=[P]*[s]=сила х довжина = Ньютон х метр = Джоуль [Дж].

Джоуль – це робота сили в один ньютон на шляху в один метр (коли напрями сили і переміщення збігаються).

Теорема про роботу рівнодіючої. Робота рівнодіючої сили на якійсь ділянці шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тій самій ділянці шляху.

Нехай до матеріальної точки М прикладено систему сил (**P_1, P_2, P_3.....P_n**), рівнодіюча яких дорівнює R.

Система сил, прикладених до матеріальної точки – це система збіжних сил, отже,

$$R = P_1 + P_2, P_3 ..... P_n .$$

Спроектуємо цю векторну рівність на дотичну до траєкторії, тоді

$$R\cos\gamma = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \\ + P_3\cos\alpha_3 + ... + P_n\cos\alpha_n .$$

Помножимо обидві частини рівності па нескінченно мале переміщення ds і проінтегруємо в межах якогось кінцевого переміщення s:

$$\int_0^s R\cos\gamma ds = \int_0^s P_1\cos\alpha_1 ds + \int_0^s P_2\cos\alpha_2 ds + \cdots + \int_0^s P_n\cos\alpha_n ds,$$

тоді

$$A_R = A_{P_1} + A_{P_2} + ... + A_{P_n},$$

або скорочено

$$A_R = \Sigma A_{P_i} .$$

Теорему доведено.

3.7. Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла

Уявимо диск, який обертається навколо нерухомої осі під дією сталої сили **P** (рис.3.5), точка прикладання якої переміщується разом з диском. Розкладемо силу **P** на три взаємно перпендикулярні складові; **P_1** – колове зусилля, **P_2** – осьове зусилля, **P_3** – радіальне зусилля. Під час повертання диска на

нескінченно малий кут **dφ** сила **P** викопує елементарну роботу, яка за теоремою про роботу рівнодіючої дорівнюватиме сумі робіт складових. Але робота складових $\mathbf{P_2}$ і $\mathbf{P_3}$ дорівнює нулю, бо вектори цих сил перпендикулярні до нескінченно малого переміщення ds точки прикладання M, тому елементарна робота сили **P** дорівнює роботі складової $\mathbf{P_1}$**:**

$$dA = P_1 ds = P_1 R d\varphi.$$

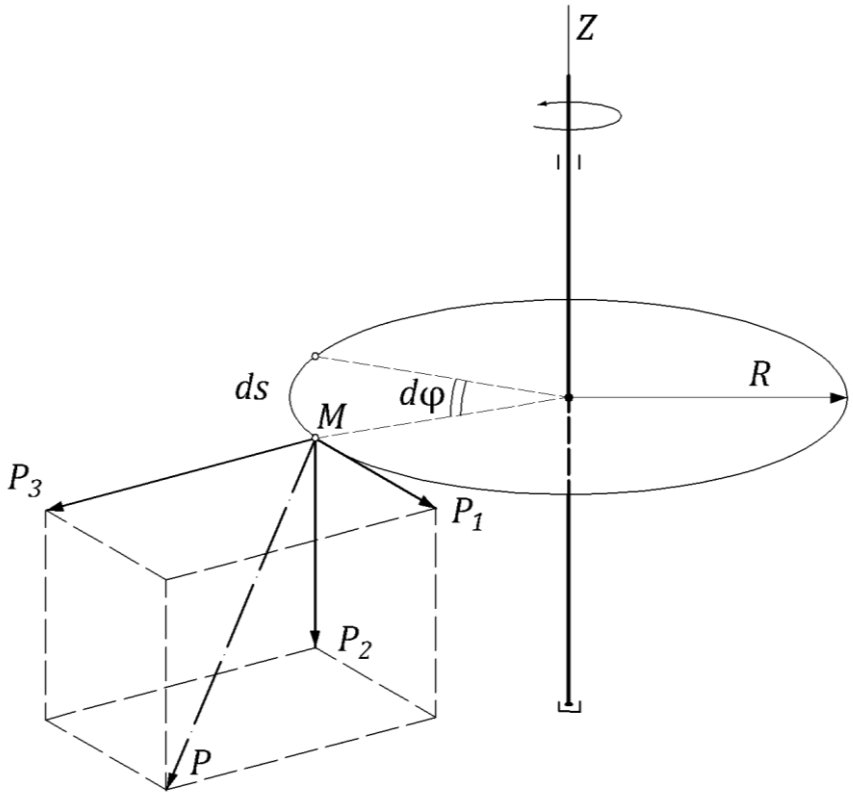


Рис. 3.5. До визначення роботи при обертанні

При повертанні диска на кінцевий кут φ робота сили **P** дорівнюватиме

$$A = \int_0^{\varphi} P_1 R d\varphi = P_1 R \int_0^{\varphi} d\varphi = P_1 R \varphi,$$

де кут φ у радіанах. Оскільки моменти складових $\mathbf{P_2}$ і $\mathbf{P_3}$ відносно осі **z** дорівнюють нулю, то момент сили **P** відносно осі **Z** дорівнює

$$M_z(P) = P_1 R.$$

Момент сили, прикладеної до диска, відносно осі обертання називають обертаючим моментом і зазвичай позначають T:

$$T = M_z(P), \text{ отже, } \quad A = T\varphi.$$

Робота сталої сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертаючого моменту на кут обертання.

3.8.Потужність

Робота будь-якої сили може тривати різні проміжки часу. Щоб визначити швидкість виконання роботи, в механіці введено поняття потужності. Потужністю сили називають роботу, виконану протягом одиниці часу. Якщо робота відбувається рівномірно, то потужність визначається за формулою:

$$N = A / t.$$

Коли напрями сили і переміщення збігаються, формулу потужності можна записати

$$N = A / t = Ps / t \quad \text{або} \quad N = Pv.$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її прикладання.

Одиниця потужності:

$$[N] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \text{джоуль на секунду=ват (Вт).}$$

Якщо роботу виконує сила, прикладена до обертового тіла, яке рухається рівномірно, то потужність обчислюють за формулою

$$N = A / t = T\varphi / t \quad \text{або} \quad N = T\omega.$$

Потужність сили, прикладеної до обертового тіла, дорівнює добутку обертаючого моменти на кутову швидкість. /

3.9. Загальні теореми динаміки матеріальної точки

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних мір руху матеріальної точки і мірами дії сил, прикладених до цієї точки.

3.9.1. Теорема про зміну кількості руху

Кількість руху mv матеріальної точки – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість і має напрям швидкості. Кількість руху – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху

$$[mv] = [m][v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Імпульсом сталої сили Pt називають вектор, який дорівнює добутку сили на час її дії. Імпульс сили – це міра її дії у часі.

Одиниця імпульсу сили

$$[Pt] = [P][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)/\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/ с}.$$

Кількість руху і імпульс сили мають однакові одиниці. Зв'язок між ними встановлює **теорема про зміну кількості руху**, яка формулюється так: зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією сталої сили **P**. Оскільки такий рух буде рівнозмінним, то його швидкість визначається формулою:

$$v = v_0 + at.$$

Перенесемо v_0 у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу т матеріальної точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Але добуток маси точки на її прискорення – це сила, під дією якої точка рухається, тому

$$mv - mv_0 = Pt.$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час t, а в правій – імпульс сили за той самий проміжок часу, що й треба було довести.

Якщо рух сповільнений ($v < v_0$), то вектор сили напрямлений протилежно до вектора швидкості, тому в останню формулу силу треба підставляти з від'ємним знаком.

Для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили час t можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати сталим, а шлях – прямолінійним. Тоді імпульс сили за скінченний проміжок часу t дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. При цьому математичний вираз теореми про зміну кількості руху матиме вигляд:

$$mv - mv_o = \int_0^i P dt.$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сталих сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчній, коли сили діють по одній прямій, або векторній, коли сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$mv - mv_0 = \Sigma(P_t t).$$

3.9.2. Теорема про зміну кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічну енергію поділяють на кінетичну і потенціальну.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називають енергію, яку має будь-яка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = mv^2 / 2,$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди додатна.

Одиниці кінетичної енергії:

$$[K] = [mv^2] = [m] \cdot [v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кінетична енергія має **розмірність роботи**. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює теорема про зміну кінетичної енергії, яка формулюється так: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якомусь відрізку шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки на тому самому відрізку шляху.

Доведемо цю теорему для найзагальнішого випадку руху матеріальної точки, тобто для випадку криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 3.6).

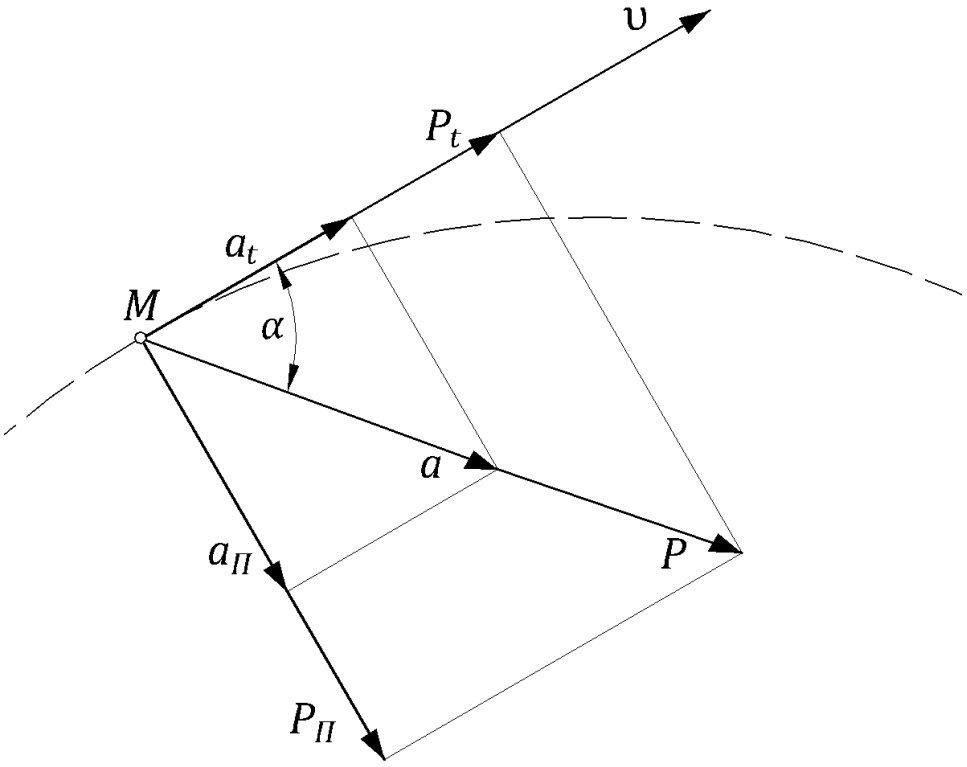


Рис. 3.6. До теореми про зміну кінетичної енергії

Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$ma = P,$$

де P – сила, яка діє на точку; a – повне прискорення точки; т – маса точки. Спроектуємо цю векторну рівність на напрям швидкості v точки:

$$ma\cos\alpha = P_t = P\cos\alpha.$$

Як відомо з кінематики,

$$a\cos\alpha = a_t = \frac{dv}{dt},$$

Тому

$$m\frac{dv}{dt} = P\cos\alpha.$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ds, дістанемо

$$m\frac{dv}{dt}ds = P\,cos\,ads.$$

Ліву частину рівності перетворимо так:

$$m\frac{dv}{dt}ds = mdv\frac{ds}{dt} = mvdv,$$

Тоді

$$mvdv = P\cos\alpha ds\,.$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності в межах для швидкості від v_0 до v і для шляху від 0 до s:

$$m\int_{v_\alpha}^{v} vdv = \int_0^s P\cos\alpha ds,$$

тоді

$$mv^2\,/\,2 - mv_0^2\,/\,2 = A,$$

де **A** – робота сили **P** на шляху **s**. Теорему доведено.

Для сповільненого руху ($v < v_0$) складова P_t , яка спричинює дотичне прискорення $\mathbf{a_t}$, матиме напрям, протилежний до вектора швидкості v, і тому робота сили **P** буде від'ємною. Складова $\mathbf{P_п}$, яка спричинює нормальне прискорення $a_п$, роботи не виконує, оскільки ця складова в кожний момент перпендикулярна до елементарного переміщення точки прикладання сили **P**. Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнюватиме алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$mv^2\,/\,2 - mv_0^2\,/\,2 = \Sigma A_{P_i},$$

3.9.3. Закон збереження механічної енергії

Енергію взаємодії тіл називають потенціальною. Потенціальну енергію мають, наприклад, натягнутий лук із стрілою або стиснута пружина. Будь-яка матеріальна точка, піднята на якусь висоту А, також має певну енергію, яку називають енергією положення; це теж потенціальна енергія. Мірою потенціальної енергії у цьому випадку є робота, яку виконує точка під час вільного падіння. Приймаючи висоту h малою порівняно з розмірами Землі, вважатимемо, силу тяжіння G сталою. Тоді потенціальну енергію П можна записати:

$$П = Gh.$$

Потенціальна енергія тіла, піднятого на певну висоту,– величина відносна, яка залежить від системи відліку, відносно якої обчислюють цю енергію. Нехай матеріальна точка масою т, падаючи під дією лише однієї сили тяжіння G, в положенні M_1 була на висоті h_1, мала швидкість і потенціальну енергію $П_1$ (рис. 3.7)

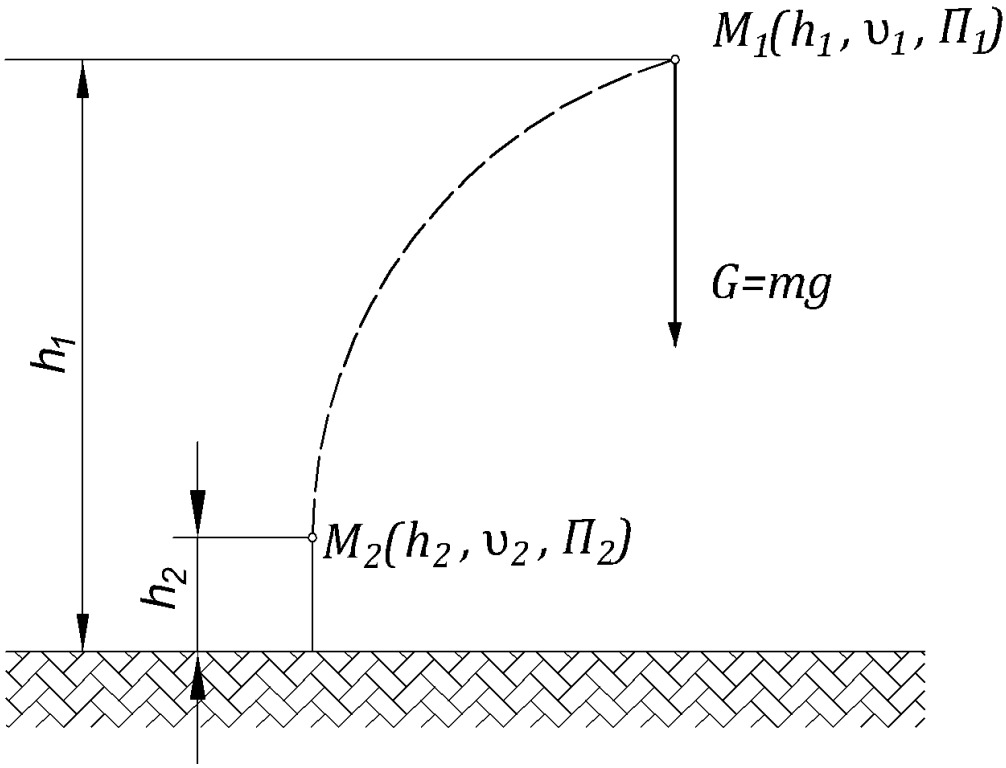


Рис. 3.7. До закону збереження енергії

У положенні M_2 точка була на висоті h_2, мала швидкість v_2 і потенціальну енергію $П_2$. Під час падіння точки виконувалась робота

$$A = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = П_1 - П_2.$$

Відповідно до теореми, доведеної у попередньому пункті, ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = mv_2^2 / 2 - mv_1^2 / 2 = K_2 - K_1,$$

Або

$$П_1 - П_2 = K_2 - K_1,$$

Отже

$$П_1 + K_1 = П_2 + K_2,$$

Або

$$П + K = const.$$

Ця рівність є математичним виразом закону збереження механічної енергії, який формулюється так: під час руху матеріальної точки під дією лише сили тяжіння сума потенціальної і кінетичної енергій є величина стала.

За законом збереження механічної енергії неважко довести, що якщо тіло кинути з поверхні Землі вертикально вгору, то його кінетична енергія внизу дорівнюватиме потенціальній енергії у найвищій точці. Цей закон дійсний для руху під дією будь-якої потенціальної сили; під дією непотенціальних сил (наприклад, сили тертя) механічна енергія переходить в інші види енергії.

Теорія відносності, створена А. Ейнштейном у XX ст., набула тепер широкого застосування у науці і техніці. Найважливішим висновком теорії відносності є **закон пропорційності енергії і маси тіла**, який математично записується так.

$$E = mc^2$$

де Е – повний запас енергії тіла (включаючи механічну, теплову, хімічну, електромагнітну, ядерну енергію, а також енергію частинок, що входять до складу атома); m — маса тіла; с – швидкість світла.

За наведеною рівністю, яка називається формулою Ейнштейна, неважко підрахувати, що одному граму маси відповідає 25 млн. кВт × год енергії (1 кВт • год = 3,6 • 10^6 Дж). Формула Ейнштейна має пряме відношення до відкриття і використання ядерної (атомної) енергії. Саме за допомогою цієї формули було виявлено існування величезних запасів нових видів енергії і знайдено шляхи її використання.

3.10. Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які утворюють не тіло:

$$K = \Sigma\left(m_i v_i^2\right)2.$$

Обчислимо кінетичне енергію твердого тіла для трьох випадків руху.

1. Тіло рухається поступально. Через те що в поступальному русі всі точки тіла мають однакові швидкості, запишемо

$$K_{пост} = \Sigma(m_i v_i^2)2 = (v^2 / 2)\Sigma m_i, \quad \text{або} \quad K_{пост} = mv^2 / 2.$$

Тому для випадку поступального руху твердого тіла його кінетична енергія обчислюється за тією самою формулою, що й кінетична енергія матеріальної точки.

2. Тіло обертається навколо нерухомої осі.

Тоді

$$K_{об} = \Sigma\left(m_i v_i^2\right)2 = \Sigma\left[m_i\left(\omega r_i\right)^2\right] / 2 = (\omega^2, 2)\Sigma\left(m_i r_i^2\right),$$

або

$$K_{об} = J\omega^2 / 2.$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

3. Тіло рухається плоскопаралельно. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух твердого тіла в кожний момент часу можна вважати простим обертальним рухом навколо миттєвої осі (метод миттєвих центрів

швидкостей). Припустимо, що швидкість v_C центра ваги відома, тоді миттєва кутова швидкість

$$\omega = v_C / OC,$$

де ОС — відстань центра ваги С тіла від миттєвої осі обертання О. Момент інерції $\mathbf{J_0}$ відносно миттєвої осі обертання обчислюють за формулою

$$J_o = J_C + m \cdot OC^2,$$

де J_c — момент інерції відносно центральної осі, або центральний момент інерції. Кінетичну енергію тіла, яка рухається плоскопаралельно, визначають так:

$$K_{ПП} = \frac{J_{\omega^2}}{2} = (J_C + m \cdot OC^2)\frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{mOC^2}{2} \cdot \frac{v_C^2}{OC^2},$$

або

$$K_{ПП} = mv_C^2 / 2 + J_C\omega^2 / 2.$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій у поступальному русі разом з центром ваги і обертальному русі навколо центральної осі, перпендикулярної до основної площини.

Сформулюємо тепер теорему’ про зміну кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл при деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх зовнішніх (активних і реактивних) і внутрішніх сил, які діяли на систему під час її переміщення:

$$\Sigma K - \Sigma K_o = \Sigma A.$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю. Якщо в’язі вважати ідеально гладенькими, то сума робіт реакцій цих в’язів також дорівнюватиме нулю.

ЧАСТИНА 2. ОПІР МАТЕРІПЛІВ

1. Початкові поняття

Опір матеріалів як наука виник в епоху Відродження, коли розвиток техніки, торгівлі, мореплавства, військової справи вимагав наукових обґрунтувань, потрібних для будівництва великих морських суден, мостів, гідротехнічних споруд та інших складних конструкцій. Засновником цієї науки вважають італійського вченого Галілея (1564–1642). Досвід показує, що всі частини конструкцій під дією навантажень деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри, а іноді руйнуються.

Опір матеріалів – це наука про міцність і стійкість проти деформації матеріалів і елементів машин та споруд.

Міцністю називають здатність матеріалу конструкцій і їх елементів чинити опір дії зовнішніх сил не руйнуючись (далі поняття міцності буде уточнено). В опорі матеріалів розглядають методи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість.

Розрахунки на міцність дають змогу визначити розміри і форму деталей, що витримують задане навантаження, при найменшій витраті матеріалу.

Під жорсткістю розуміють здатність тіла або конструкції протидіяти деформації. Розрахунки на жорсткість гарантують, що зміни форми і розмірів конструкцій і їх елементів не перевищать допустимих норм.

Під стійкістю розуміють здатність конструкції протидіяти зусиллям, які намагаються вивести її з початкового стану рівноваги.

Розрахунки на стійкість запобігають можливості раптової втрати стійкості і викривлення довгих або тонких деталей. Прикладом втрати стійкості може бути раптове викривлення довгого прямолінійного стержня від стискання вздовж осі.

На практиці здебільшого доводиться мати справу з конструкціями складної форми, але їх можна уявити складеними з окремих простих елементів, наприклад, брусів, пластин, оболонок і масивів. Основним розрахунковим

елементом в опорі матеріалів є брус, тобто тіло, поперечні розміри якого малі порівняно з довжиною. Бруси бувають прямолінійні й криволінійні, сталого і змінного перерізу. Залежно від їх призначення в конструкції бруси називають колонами, балками, стержнями.

Плоский переріз, перпендикулярний до осі бруса, називають поперечним; переріз, паралельний осі бруса (прямолінійного),– поздовжнім, інші плоскі перерізи – похилими. Крім розрахунку брусів опір матеріалів займається розрахунком пластин і оболонок, тобто тіл, які мають малу товщину порівняно з іншими розмірами (наприклад, резервуари, труби, обшивки кораблів та літаків) Тіла, в яких всі три виміри однакового порядку, називають масивами (наприклад, фундаменти, станини верстатів).

У результаті деформації під дією зовнішніх сил всередині тіла виникають сили пружності , які протидіють деформації і намагаються повернути частинки тіла в початкове положення. Сили пружності виникають внаслідок дії внутрішніх сил молекулярної взаємодії.

В опорі матеріалів вивчають деформації тіл і внутрішні сили, що виникають під час деформації. Після припинення дії зовнішніх сил збуджена цими силами деформація може повністю або частково зникнути. Здатність матеріалу усувати деформацію після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю. Деформацію, яка зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають пружною; деформацію, яка не зникає після припинення дії зовнішніх сил, називають залишковою або пластичною.

Здатність матеріалу до значних залишкових деформацій без руйнування називають пластичністю, а самі матеріали називають пластичними. До таких матеріалів належать маловуглецева сталь, алюміній, мідь, латунь та ін.

Підкреслимо, що значні залишкові деформації здебільшого спричинюють порушення нормальної роботи конструкції і тому їх вважають порушенням міцності (як і руйнування).

Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. На відміну від пластичних, крихкі матеріали руйнуються без помітних залишкових

деформацій. До крихких матеріалів належать чавун, тверді сплави, скло, цегла та ін.

Наука про опір матеріалів ґрунтується на законах теоретичної механіки, в якій тіла вважають абсолютно жорсткими, тобто не здатними до деформації. Користуючись розглянутим у теоретичній механіці принципом твердннення, в опорі матеріалів для визначення реакцій в'язів і діючих у перерізах деталей внутрішніх сил застосовуватимемо до деформованих тіл умови рівноваги статики. Проте для розрахунків на міцність та жорсткість деякі положення теоретичної механіки виявляються непридатними, зокрема:

1) зовнішні сили, які діють на тіло, не можна замінити їх рівнодіючою або еквівалентною системою сил;

2) силу не можна переносити вздовж лінії її дії;

3) пару сил не можна пересувати в площині дії пари.

Ці правила мають виняток. Так, наприклад, сили, прикладені до невеликої поверхні тіла, як і в теоретичній механіці, вважатимемо зосередженими, тобто прикладеними до однієї точки; розподілені реактивні сили, прикладені до затиснутого кінця балки, як і раніше, замінюватимемо реактивною силою і реактивним моментом. Такі заміни не вносять суттєвих змін в умови деформації тіла. Це положення має назву принципу пом'якшених граничних умов або принципу Сен-Венана, за ім'ям французького вченого Сен-Венана (1797–1886).

Принцип Сен-Венана можна сформулювати так: у точках тіла, достатньо віддалених від місць прикладання зовнішніх сил, величина внутрішніх сил дуже мало залежить від конкретного способу прикладення сил. Надалі, вивчаючи окремі види деформацій, на підставі принципу Сен-Венана не будемо цікавитися конкретними способами прикладання зовнішніх сил і вважатимемо, що в місці їх прикладання внутрішні сили змінюються стрибкоподібно. Принцип Сен-Веннана широко використовується в розрахунках елементів, що зазнають згин, кручення, стиск, складний напружений стан тощо.

2. Основні гіпотези і припущення

Конструкційні матеріали, з яких виготовляють деталі машин і споруд, не є, точно кажучи, неперервними, однорідними в усіх точках і ізотропними (такими, що мають однакові властивості в усіх напрямах).

У процесі виробництва заготовок і виготовлення з них деталей у матеріалі виникають різні поверхневі і внутрішні дефекти, які важко врахувати, наприклад, раковини, тріщини і неоднорідності структури влитих деталях, волосовини в штампованих деталях, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю охолодження литих і кованих деталей, нерівномірністю висихання і неоднорідністю деревини, нерівномірністю тверднення і неоднорідністю бетону і т. д.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають ряд гіпотез і припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. У результаті об’єктом вивчення в опорі матеріалів стає не саме реальне тіло, а його наближена модель.

Експериментальна перевірка висновків, добутих на основі наведених далі гіпотез і припущень, показує, що ці висновки цілком придатні для використання в практиці інженерних розрахунків. Розглянемо основні гіпотези і припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1.Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль. Згідно з цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури), то в усіх його точках внутрішні зусилля дорівнюють нулю. Отже, сили взаємодії між частинками ненавантаженого тіла до уваги не беруть.

2.Припущення про однорідність матеріалу. Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має однакові властивості.

3.Припущення про неперервність матеріалу. Згідно з цим припущенням, матеріал будь-якого тіла має неперервну будову і є суцільним середовищем.

Припущення про неперервну будову матеріалу дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики (диференціальне і інтегральне числення).

4.Припущення про ізотропність матеріалу. Це припущення передбачає, що матеріал тіла має однакові властивості в усіх напрямах. Багато матеріалів складається з кристалів, в яких фізико-механічні властивості в різних напрямах суттєво відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямах вирівнюються.

Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів і лише наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямах, називають анізотропними, наприклад, деревина.

5.Припущення про ідеальну пружність. Це припущення передбачає, що в певних межах навантаження матеріал виявляє ідеальну пружність, тобто після зняття навантаження деформації повністю зникають.

Розглянемо тепер гіпотези і припущення, пов’язані з деформаціями елементів конструкцій. Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно лінійною і кутовою деформацією . Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають переміщенням.

1. Припущення про малість переміщень, або принцип початкових розмірів. За цим припущенням деформації тіла і пов’язані з ними переміщення точок і перерізів дуже малі порівняно з розмірами тіла. На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують.

2.Припущення про лінійну деформацію тіл. Згідно з цим припущенням, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричинюють ці переміщення.

3.Гіпотез плоских перерізів, або гіпотеза Бернуллі. Згідно з цією гіпотезою, плоскі поперечні перерізи, зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації плоскими і нормальними до осі. Цю гіпотезу вперше висловив

швейцарський вчений Якоб Бернуллі (1654–1705); за нею вивчають більшість основних деформацій бруса. До основних гіпотез опору матеріалів належить також принцип незалежності дії сил, який буде розглянутий пізніше (аналогічний принцип розглянуто в динаміці).

3. Метод перерізів. Напруження

Для розрахунків деталей машин і споруд на міцність потрібно знати внутрішні сили пружності, які виникають у результаті дії прикладених до деталей зовнішніх сил. З теоретичної механіки вже відомий метод перерізів. Оскільки цей метод широко застосовують в опорі матеріалів для визначення внутрішніх сил, розглянемо його докладніше. Нагадаємо, шо всяке тіло, в тому числі деталь машини або споруди, можна вважати системою матеріальних точок.

У теоретичній механіці розглядалися незмінні системи; в опорі матеріалів розглянемо змінні (деформовані) системи матеріальних точок.

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

Очевидно, що за третім законом Ньютона (аксіома взаємодії) внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної і відкинутої частин тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої з двох частин розрізаного тіла, дістанемо одне й те саме значення внутрішніх сил, але зручніше розглядати ту частину тіла, для якої рівняння рівноваги будуть простіші. Згідно з прийнятим припущенням про неперервність матеріалу тіла, можна твердити, що внутрішні сили, які виникають у тілі, рівномірно або нерівномірно розподілені по перерізу.

Застосовуючи до залишеної частини тіла умови рівноваги, не можна знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу, але можна визначити

статичні еквіваленти цих сил. Оскільки основним розрахунковим об'єктом в опорі матеріалів є брус і здебільшого нас цікавитимуть внутрішні сили в його поперечному перерізі, то розглянемо, якими будуть статичні еквіваленти внутрішніх сил у поперечному перерізі бруса. Зробимо поперечний переріз бруса а–а, як на рис. 3.1, і розглянемо рівновагу його лівої частини. Якщо зовнішні сили, які діють на брус, лежать в одній площині, то в загальному випадку статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі а–а, будуть головний вектор R, прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент $M_{Зг}$, що зрівноважують плоску систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини бруса.

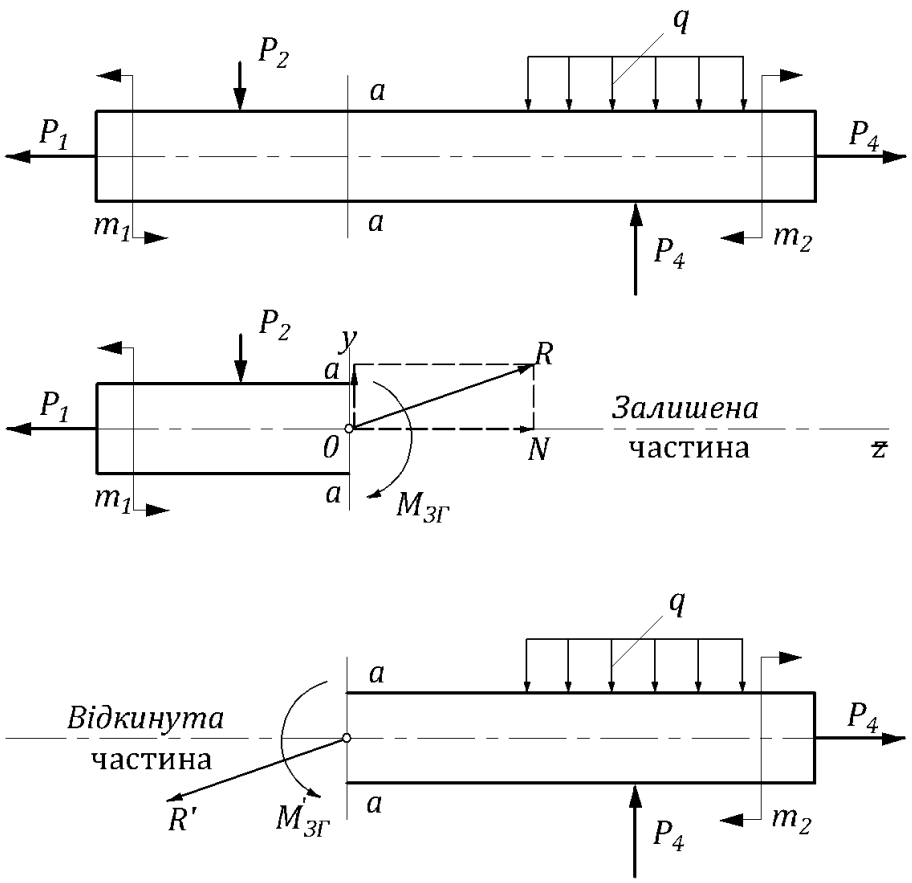


Рис. 3.1. Визначення внутрішніх зусиль

Розкладемо головний вектор **R** на складову **N** , напрямлену вздовж осі бруса, і складову Q, перпендикулярну до цієї осі, тобто що лежить у площині поперечного перерізу. Ці складові головного вектора разом з головним моментом називатимемо внутрішніми силовими факторами, які діють у перерізі

бруса. Складову N назвемо поздовжньою силою, складову Q – поперечною силою, пару сил $M_{3г}$ – згинаючим моментом. Для визначення трьох внутрішніх силових факторів статика дає три рівняння рівноваги залишеної частини бруса, а саме:

$$\Sigma Z = 0;\ \Sigma Y = 0;\ \Sigma M = 0;$$

розкриваючи які, маємо:

$$N + \Sigma P_{iz} = 0; \quad Q + \Sigma P_{iy} = 0; \quad M_3 + \Sigma M_0(P_i) = 0,$$

де ΣP_{iz}; ΣP_{iy} – алгебраїчні суми проекцій на осі z і y зовнішніх сил, прикладених до розглядуваної частини бруса, а $\Sigma M_0(P_i)$ – алгебраїчна сума моментів цих сил відносно центра ваги перерізу (вісь z завжди спрямовуватимемо по осі бруса)

4. Напруження і деформації розтягнення і стиску.

В машинобудуванні і будівництві часто зустрічаються конструкції, що працюють на стиск або розтягнення. На рис. 4.1 показані приклади колон, які працюють на стиск (слід відмітити, що в загальному колони сприймають так званий позацентровий стиск, про що буде сказано нижче) .



Рис. 4.1. Приклад конструкцій, що сприймають стискаючі зусилля: а) дерев'яні колони; б) – металеві колони

На рис. 4.2 показано вантовий міст, ванти якого сприймають зусилля розтягнення.



Рис. 4.2. Ванти сприймають зусилля розтягнення

Розтягненням або стиском називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки поздовжня сила. Бруси з прямолінійною віссю (прямі бруси), які зазнають розтягу або стиску, часто називають стержнями.

Розглянемо невагомий, затиснутий лівим кінцем прямий брус, вздовж осі якого діють активні сили P і 2P (рис. 4.3). Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, називатимемо ділянками. Зображений па рис. 4.3 брус складається з двох ділянок. Застосувавши метод перерізів, визначимо поздовжні сили N_1 і N_2 на ділянках. Зробимо поперечний переріз 1–1 лівої ділянки бруса.

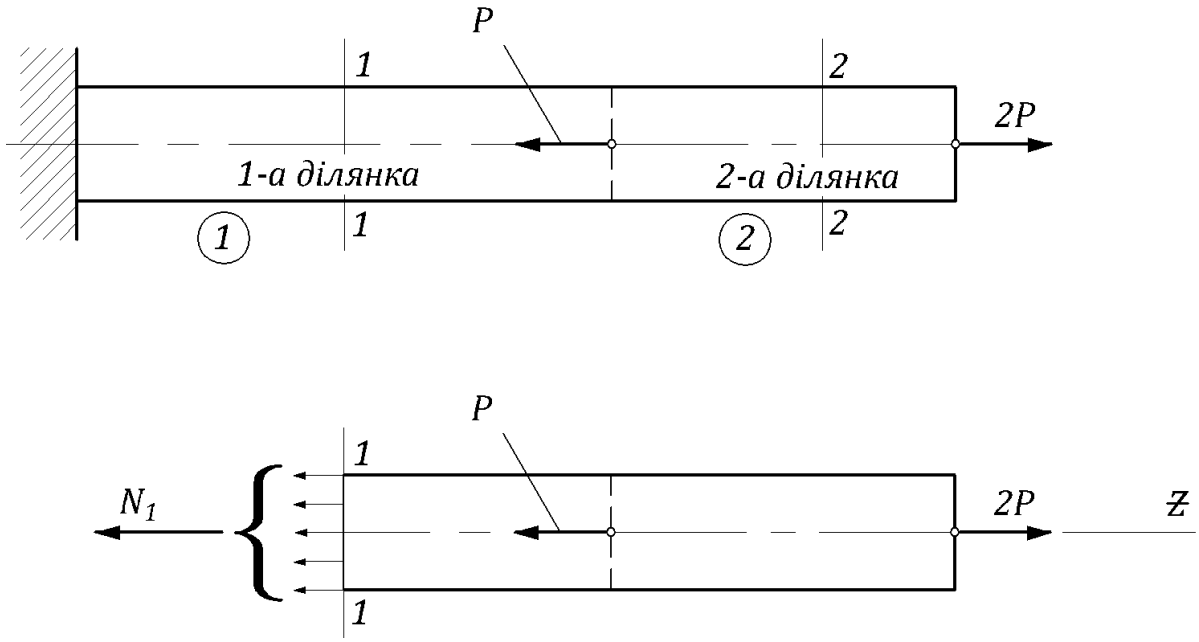


Рис. 4.3. Визначення поздовжніх зусиль в брусі

В усіх точках бруса діятимуть внутрішні розподілені сили, рівнодіюча яких визначиться з умови рівноваги однієї з частин бруса (наприклад, з права від перерізу):

$$\Sigma Z = 0; \quad 2P - P - N_1 = 0, \text{ звідки } N_1 = 2P - P = P. .$$

Отже, для рівноваги залишеної частини бруса в перерізі 1–1 треба прикласти тільки силу N_1, напрямлену вздовж осі, тобто поздовжню силу.

5. Закон Гука для розтягу і стиску

Напруження і деформації при розтягненні і стиску пов’язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім’ям англійського фізика Роберта Гука (1635–1703), що встановив цей закон. Закон Гука для розтягу і стиску справедливий лише у певних межах навантаження і формулюється так: нормальні напруження прямо пропорційні відносному видовженню або укороченню.

Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або списку, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

6. Діаграма розтягу маловуглецевої сталі

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини E і v, потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків проектованих деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу.

Розглянемо докладно діаграму, добуту в процесі найбільш поширеного і важливого механічного випробування, а саме випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад, сталі СтЗ) при статичному навантаженні.

У процесі цього випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між розтягуючою силою і абсолютним видовженням, тобто в координатах (P, Δl). Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму в координатах «напруження – відносне видовження» (σ, ε). Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами. Діаграму розтягу маловуглецевої сталі подано на рис. 6.1. Ця діаграма має такі характерні точки. Точка A відповідає границі пропорційності. Границею пропорційності $\sigma_{пц}$ називають таке найбільше напруження, до якого деформації практично залишаються пружними. Точка C відповідає границі текучості. Границею текучості $\sigma_т$ називають таке напруження, при якому у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі СтЗ $\sigma_т$ = 240 МПа).

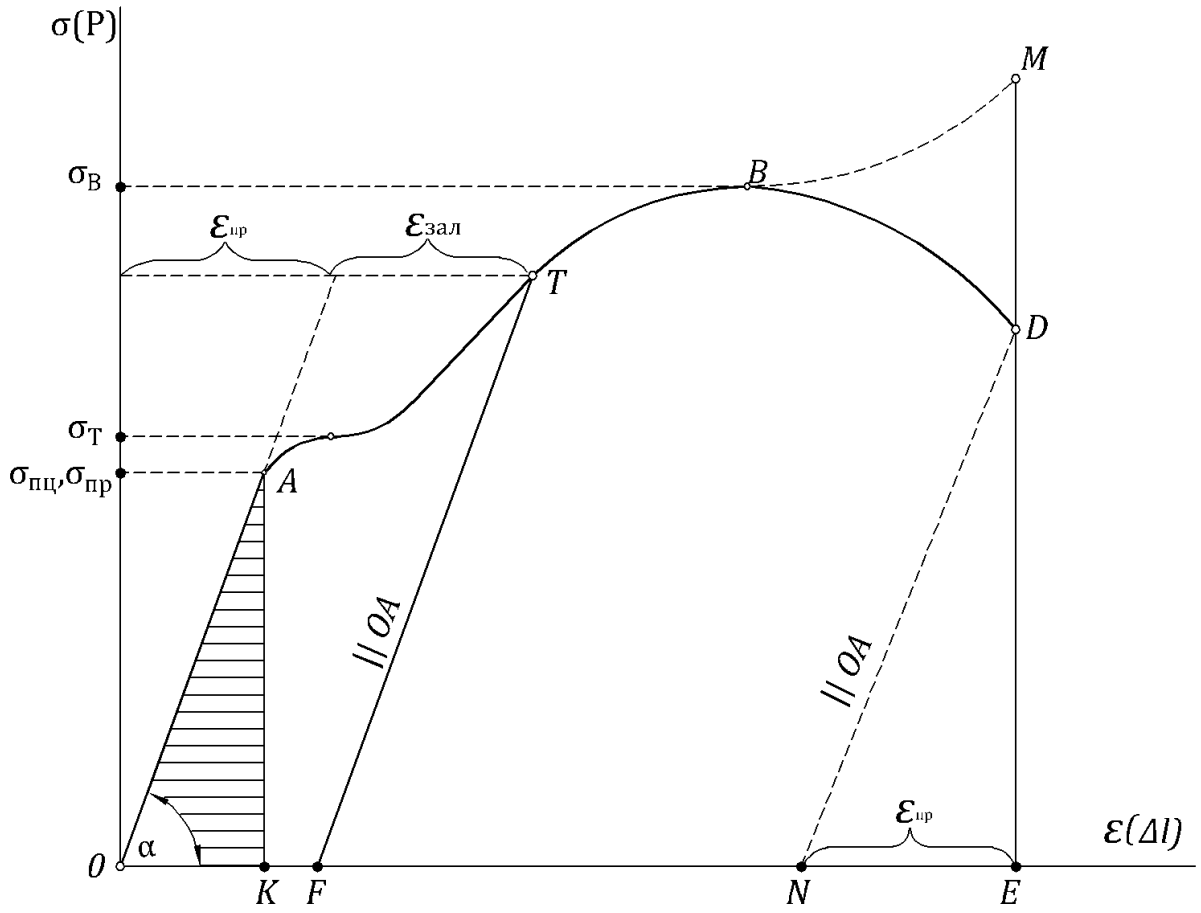


Рис. 6.1. Діаграма деформування м’якої сталі

Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній появляється сітка ліній Людерса–Чернова, нахилених до осі під кутом 45°.

Ці лінії вперше в 1859 р. описали німецький металург Людерс і незалежно від нього в 1884 р. металург Д.К.Чернов (1839–1921), який запропонував використовувати їх для експериментального вивчення напружень у складних деталях.

Границя текучості – це основна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів.

Точка В відповідає тимчасовому опору або границі міцності. Тимчасовим опором $\sigma_{тм}$ називають умовне напруження, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі СтЗ $\sigma_{тм} \approx 400$ МПа). Коли деформація досягає

тимчасового опору, то на розтягуваному зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка (рис. 6.2). В означенні тимчасового опору йдеться про умовну напругу, оскільки в перерізах шийки напруження будуть більшими (на рис. 6.2 видно що в місті руйнування переріз менший ніж початковий).

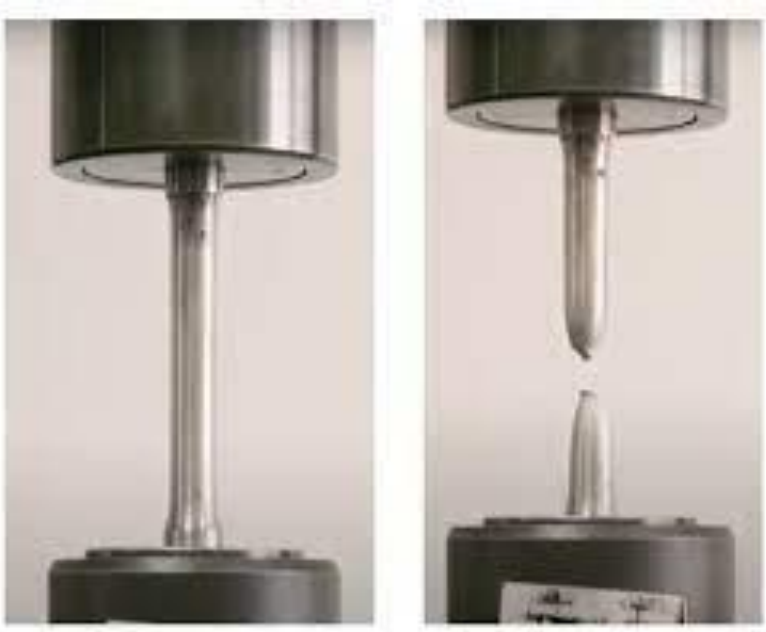


Рис. 6.2. Загальний вигляд шийки при руйнуванні стального стрижня

Границею міцності $\sigma_{тм}$ називають тимчасовий опір зразка, який руйнується без утворення шийки. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінки міцності крихких матеріалів.

Точка D відповідає напрузі, яка виникає у .зразку в момент розриву усіх поперечних перерізах, крім перерізу шийки.

Точка M відповідає напрузі, яка виникає у найменшому поперечному перерізі шийки в момент розриву. Це напруження можна назвати напруженням розриву.

7. Діаграма стику бетону

Бетон є матеріалом, якій найбільш розповсюджений в будівництві. Бетон дуже добре чинить опір стискаючим напруженням, але його міцність на розтягнення доволі низька. Тому в будівництві застосовують композитний матеріал – залізобетон. Сутність залізобетону полягає в тому, що стискаючі

напруження сприймаються бетоном, а розтягуючи – металевою арматурою. Після появи тріщин в нижній зоні балки все розтягуючи зусилля сприймає сталева арматура, а бетон сприймає стискаюче зусилля (рис. 7.1).

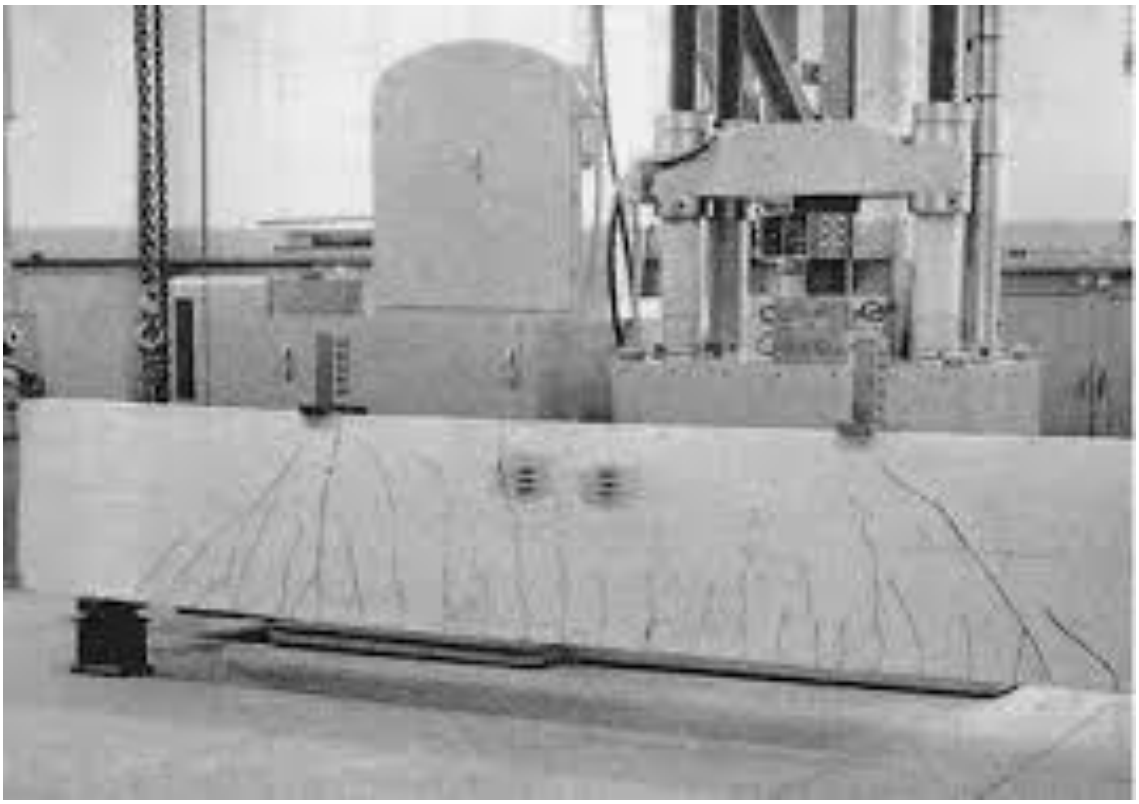


Рис. 7.1. Загальний вигляд залізобетонної балки після випробування

Через те, що бетон має доволі низьку міцність на розтягнення і в залізобетонних конструкціях бетон сприймає стискаючи зусилля, інженера цікавить робота бетону саме при стиску.

Діаграму стиску бетону отримують аналогічно діаграмі розтягнення сталі. Для цього випробовують бетонні призми розміром 150x150x600 мм, які піддають стиску в лабораторному пресі. В результаті отримують залежність між напруженнями стиску і деформаціями скорочення. Типова діаграма стиску бетону показана на рис. 7.2 і взята з Державних будівельних норма України [ДБН].

Напруження f_{cm} є максимальними напруженнями для бетону даного класу міцності. Ці напруження відповідають деформаціям ε_{c1}. Вважається, що пружно бетон працює лише до напружень 0.3 f_{cm}, тому формально пружним матеріалом,

що підкоряється закону Гука, бетон можна вважати лише в цих межах. Однак, доволі часто при розрахунках залізобетонних елементів вважають бетон пружним матеріалом.

Після досягнення максимуму напружень при так званому жорсткому режимі випробування деформації продовжують збільшуватись, а напруження при цьому зменшуються і діаграма має так звану низхідну гілку в межах деформацій ε_{c1} і ε_{cu1}

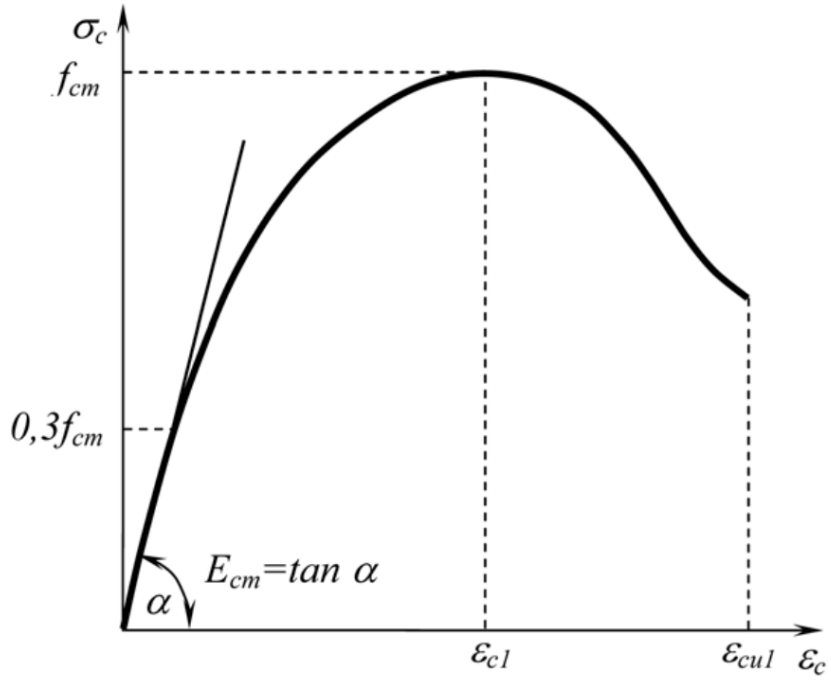


Рис. 7.2. Діаграма стиску бетону

Арматура в залізобетонних конструкціях може бути як із м’якої сталі з діаграмою, яка показана на рис. 6.1, так і з високоміцної сталі, діаграма якої немає так званої ділянки текучості. Така діаграма має вигляд, показаний на рис. 7.3.

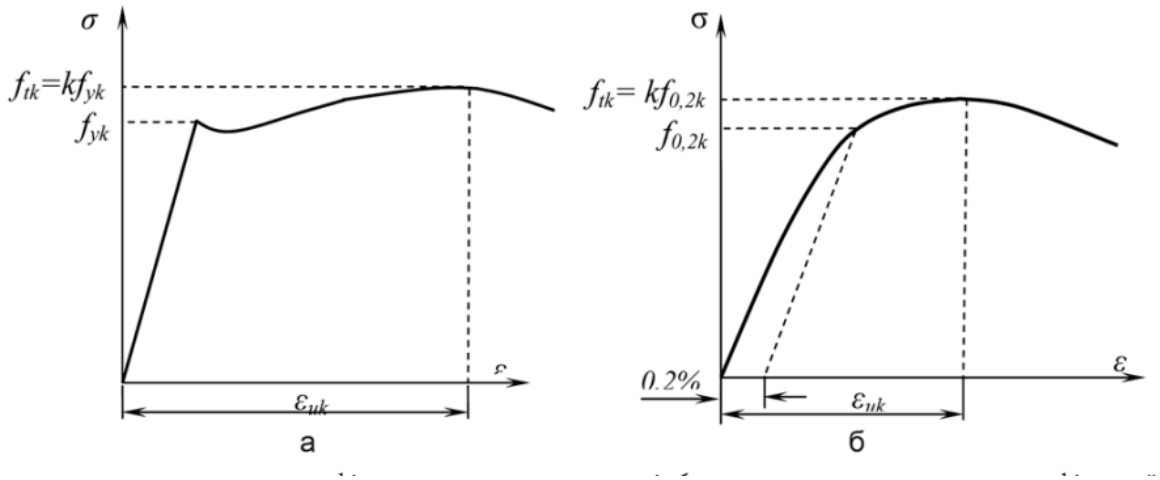


Рис. 7.3. Діаграма розтягнення арматури зі сталі високої міцності [ДБН]

8. Потенціальна енергія деформації

У випадку статичного розтягу (або стиску) зразка розтягуюча (або стискаюча) сила P, яка повільно зростає від нуля до якогось значення, видовжує (або скорочує) зразок на величину Δl і при цьому виконує роботу A. Ця робота акумулюється у деформованому зразку як потенціальна енергія деформації U, причому, нехтуючи незначними втратами енергії (наприклад, тепловими), можна вважати, що

$$A = U.$$

Якщо діаграма розтягу побудована в координатах (P, Δl), то, як відомо з теоретичної механіки, площа діаграми виражає роботу деформації. До границі пропорційності робота виражається площею трикутника OAK. (див. рис. 6.1). Отже, потенціальна енергія пружної деформації стержня, що має довжину l і сталий поперечний переріз F при однаковій в усіх перерізах поздовжній силі N = P, дорівнюватиме

$$U = A = P\Delta l / 2 = N^2 l / (2EF).$$

Повна робота, яка витрачається на руйнування зразка, виражається площею фігури OABDN діаграми розтягу (див. рис. 6.1); площа трикутника NDE відповідає роботі пружної деформації, що зникає під час розриву зразка. Питомою потенціальною енергією деформації називають роботу деформації, яка припадає на одиницю об'єму бруса:

$$u = A / V = A / (Fl) = N^2 l / (2EF) : Fl = \sigma^2 / (2E).$$

Коли одночасно діє кілька розтягуючих або стискаючих сил і брус має ступінчасто змінні розміри поперечного перерізу, його поділяють на окремі ділянки, що відрізняються величиною напруження; потенціальну енергію деформації всього бруса визначають як суму потенціальних енергій окремих ділянок:

$$U = \Sigma U_i = \Sigma \sigma_i^2 V_i / (2E),$$

Σ_i – нормальні напруження в поперечних перерізах на кожній ділянці, V_i – об’єм кожної ділянки бруса.

Потенціальну енергію деформації виражають в одиницях роботи джоулях (Дж), питому потенціальну енергію – у джоулях на кубічний метр (Дж/м^3) Аналізуючи формули потенціальної енергії деформації, можна зробити такі висновки:

1. Потенціальна енергія деформації – величина завжди додатна, оскільки в її вирази входять квадрати напружень або поздовжніх сил.

2. З цієї причини для обчислення потенціальної енергії деформації не можна застосовувати принцип незалежності дії сил (з математики відомо, що квадрат суми не дорівнює сумі квадратів доданків).

9. Напруження і деформації зсуву

Зсувом називають такий вид деформації, за якої у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила.

Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рис. 9.1). Розглянемо брус площею поперечного перерізу F, перпендикулярно до осі якого прикладено дві однакові, але протилежно напрямлені сили P, лінії дії їх паралельні і проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили Q застосуємо метод перерізів (рис. 9.1).

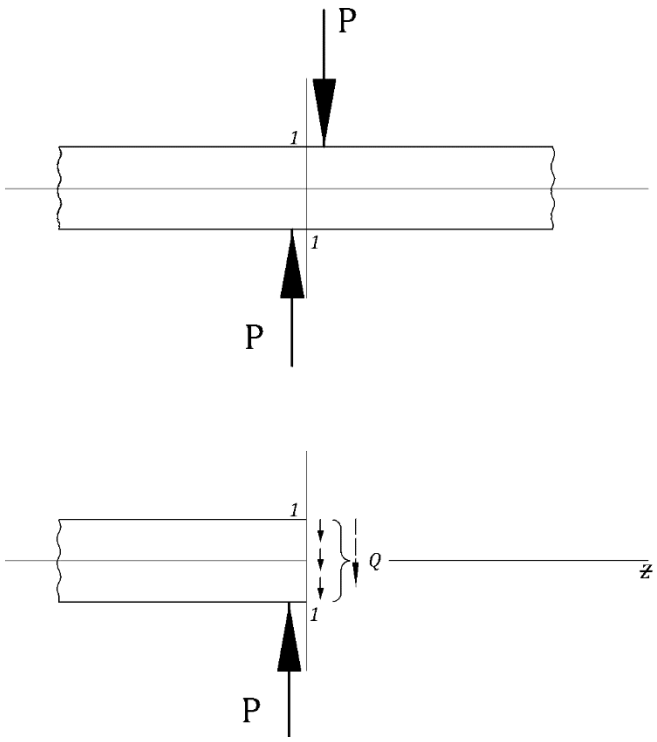


Рис. 9.1. До визначення поперечної сили при зсуві

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодіючу яких визначимо з умови рівноваги залишеної частини бруса:

$$\Sigma Y = 0; \quad P - Q = 0,$$

звідки визначимо поперечну силу Q:

$$Q = P.$$

Поперечна сила – це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруження. Припускаємо, що ці напруження розподілені по перерізу рівномірно і, отже, їх можна обчислити за формулою

$$\tau = Q / F.$$

Очевидно, що при зсуві форма перерізу на величину напружень не впливає.

Примітка. Викладений у цьому пункті розрахунок дотичних напружень при зсуві – наближений, оскільки лінії дії сил P і Q (рис. 9.1) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, ці сили не утворюють врівноваженої системи, це

– пара сил. Проте момент цієї пари невеликий (мале плече) і відповідними їй напруженнями можна знехтувати.

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що найбільше напруження (робоче напруження) τ, яке виникає в ній, не повинна бути більшим від допустимого напруження [τ]. Розрахункова формула для зсуву

$$\tau = Q / F \leq [\tau].$$

її читають так: дотичне напруження при зсуві, обчислене за формулою $\tau = Q / F$, не повинне бути більшим від допустимого [τ].

За цією формулою роблять проектний і перевірний розрахунки і визначають допустиме навантаження. При розрахунках на зсув для обчислення робочого напруження τ враховують кількість площ, що піддаються зсуву. Так, наприклад, для болтового з'єднання, показаного на рис. 9.2 мається дві площини зрізу, тому зсуваючою силою для однієї площі буде сила F.

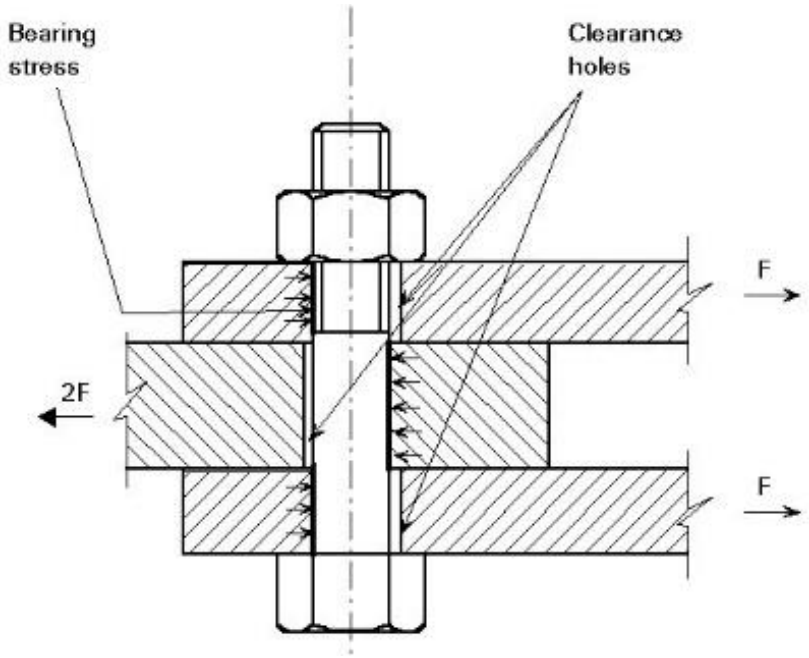


Рис. 9.2. Схема роботи болта на зсув

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій). Допустиме напруження на зріз для пластичних матеріалів

вибирають залежно від границі текучості. У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок і т. п. приймають

$$[\tau_c] = (0,25 \div 0,35)\sigma_c.$$

Для деревини допустимі напруження на сколювання при врубуванні коливаються в межах від 0,5 до 1,4МПа і залежать від сорту деревини і напряму врубування, відносно напряму волокон. У розрахунках на зріз для випадків, коли з'єднання роблять кількома однаковими деталями (болтами, заклепками і т.д.), приймають, що всі вони навантажені однаково. Розрахунки з'єднань на зріз звичайно супроводжуються перевіркою міцності цих з 'єднань на зминання.

9.1. Деформація зсуву і закон Гука

Для встановлення параметрів, які характеризують деформацію зсуву, розглянемо елемент бруса, що має вигляд паралелепіпеда abcd, на грані якого діятимуть тільки дотичні напруження τ, а протилежну грань паралелепіпеда вважатимемо жорстко закріпленою (рис. 9.3). Деформація зсуву в цьому елементі полягає у перекошуванні прямих кутів паралелепіпеда внаслідок поступального переміщення грані bc відносно перерізу, який вважатимемо нерухомим. Деформацію зсуву характеризують кутом γ і називають кутом зсуву або відносним зсувом (оскільки цей параметр не залежить від відстані h, на якій виникає зсув. Величину bb_1 на яку зміщується рухома грань відносно нерухомої, називають абсолютним зсувом.

Відносний зсув виражають у радіанах. Напруження і деформації при зсуві зв'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука для зсуву. Закон Гука для зсуву справедливий лише в певних межах навантаження і формулюється так: дотичне напруження прямо пропорційне відносному зсуву. Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\tau = G\gamma.$$

Коефіцієнт пропорційності G характеризує жорсткість матеріалу (його здатність протидіяти пружним деформаціям) при зсуві; його називають

модулем зсуву або модулем пружності другого роду. Модуль пружності і напруження виражають в однакових одиницях:

$$[G] = [\tau] / [\gamma] \equiv \text{Па}.$$

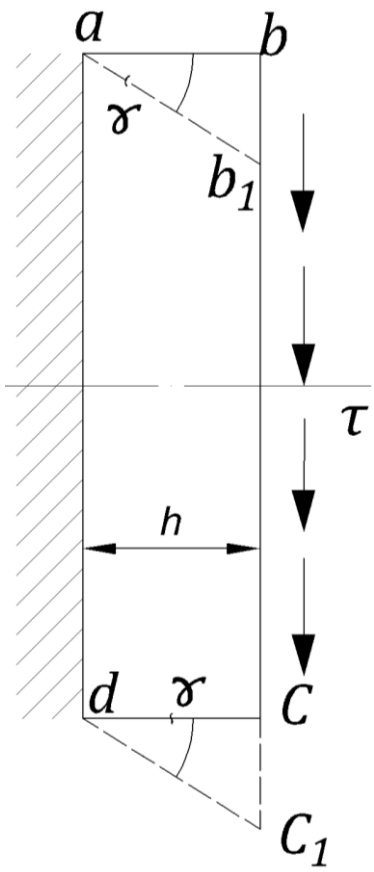


Рис. 9.3. Деформація при зсуві

10. Геометричні характеристики плоских перерізів

При деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Досі вивчалися деформації, у яких напруження залежали тільки від площі поперечного перерізу. Але для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур. Розглянемо їх.

10.1. Статичний момент площі

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на їх відстані від цієї осі.

Статичний момент площі позначимо S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_F y dF,\ S_y = \int_F x dF.$$

У теоретичній механіці було виведено формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$x_C = \frac{\Sigma(F_i x_i)}{\Sigma F_i}, \quad y_C = \frac{\Sigma(F_i y_i)}{\Sigma F_i}.$$

Оскільки у цих формулах під F_t можна розуміти площу dF елементарної площадки, то в границі, коли dF прямує до нуля, вирази, які стоять у чисельниках правих частин формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей y і x, а ΣF_j – це площа F усієї фігури. Отже,

$$S_y = \int_F x dF = x_C F,$$
$$S_x = \int_F y dF = y_C F.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі

$$[S] = [x_C][F] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від’ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, дорівнює нулю.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі під F_t можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під x_i і y_i – координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття). Звідси випливає, що для визначення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати метод розбиття, тобто визначати статичний момент всієї фігури як алгебраїчну суму статичних моментів окремих її частин:

$$S = \Sigma S_i,$$

де S_i – статичний момент площі кожної частини фігури. Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напружень згину.

10.2. Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площині суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис.10.1). Полярний момент інерції позначатимемо J_p:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF.$$

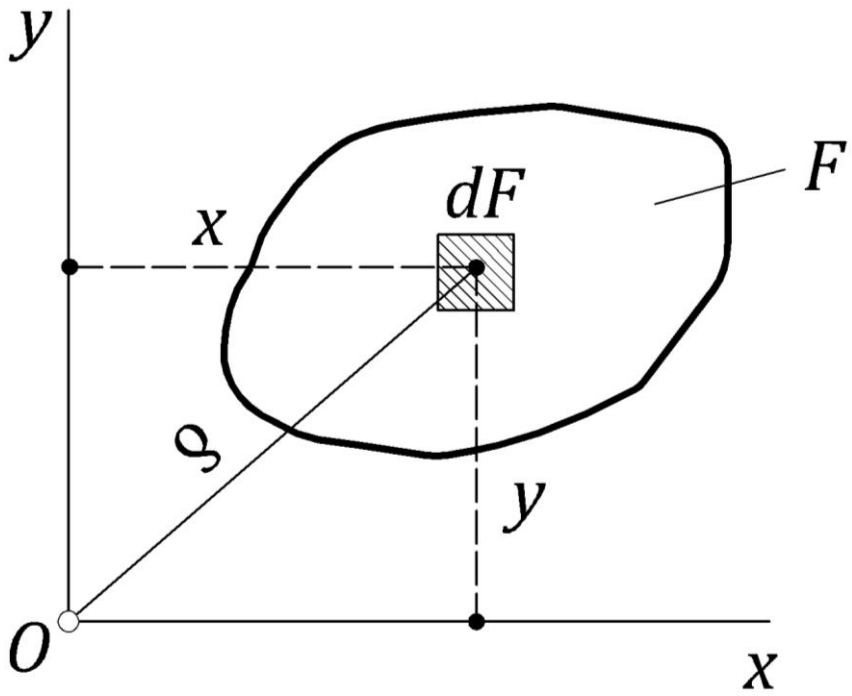


Рис. 10.1. До визначення полярного момента інерції.

Одиниця полярного моменту інерції

$$[J_\rho] = [\rho^2][F] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Полярний момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює нулю.

Оскільки поняття полярного моменту інерції буде потрібне для вивчення деформацій кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів

інерції круглого суцільного і кільцевого перерізів, приймаючи за полюс центри цих фігур.

1. Круг діаметром d (рис. 10.2)

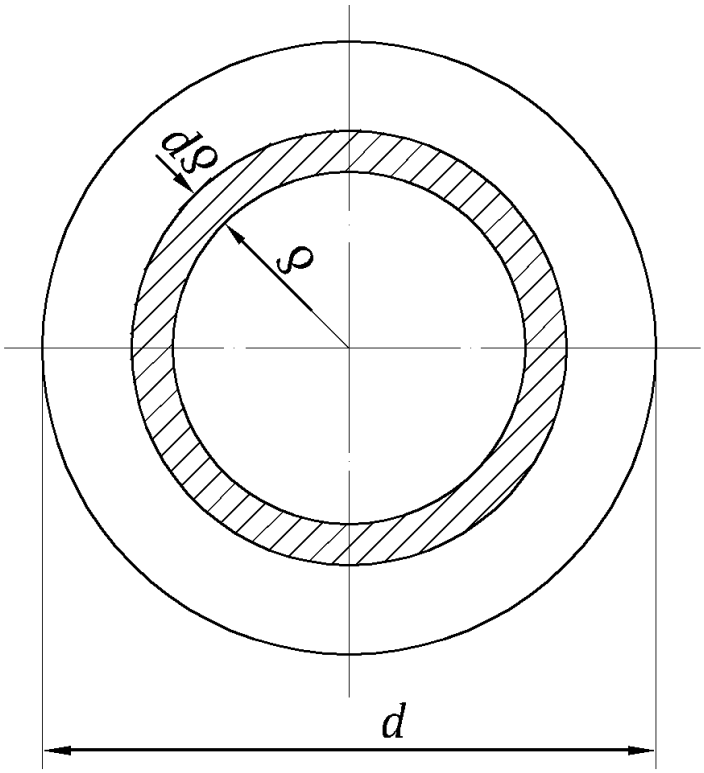


Рис. 10.2. До визначення полярного моменту інерції круга

Нескінченно малу площадку dF виділимо у вигляді кільця шириною $d\rho$, що знаходиться на змінній відстані ρ від полюса; тоді $dF = 2\pi\rho d\rho$.

Обчислимо полярний момент інерції:

$$dF = 2\pi\rho J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4.$$

2. Кільце, що має розміри $D \times d$.

$$J_p = \int p^2 dF = \int_{d/2}^{D/2} p^2 2\pi p dp = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} p^3 dp = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4);$$

$$J_p = (\pi / 32)(D^4 - d^4) \approx 0{,}1(D^4 - d^4).$$

Полярний момент інерції кільцевого перерізу можна обчислити як різницю полярних моментів інерції великого і малого кругів.

10.3. Осьовий момент інерції

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взяту по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі. Осьовий момент інерції позначатимемо J з індексом, що відповідає осі:

$$J_x = \int_F y^2 dF, J_y = \int_F x^2 dF.$$

Очевидно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях: $[J] = м^4$

Осьовий момент інерції – величина завжди додатна і не дорівнює пилю. Якщо додати моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x і y (див. рис. 10.1), то в результаті отримаємо:

$$J_x + J_y = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F \left(y^2 + x^2\right) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p,$$

$$J_x + J_y = J_\rho.$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

Через те що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігуру. Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину. Обчислимо осьові моменти інерції деяких простих фігур.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 10.3).

Нескінченно малу площадку dF виділимо у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy, тоді dF = bdy:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = bh^3 / 12,$$

$$J_x = bh^3 / 12.$$

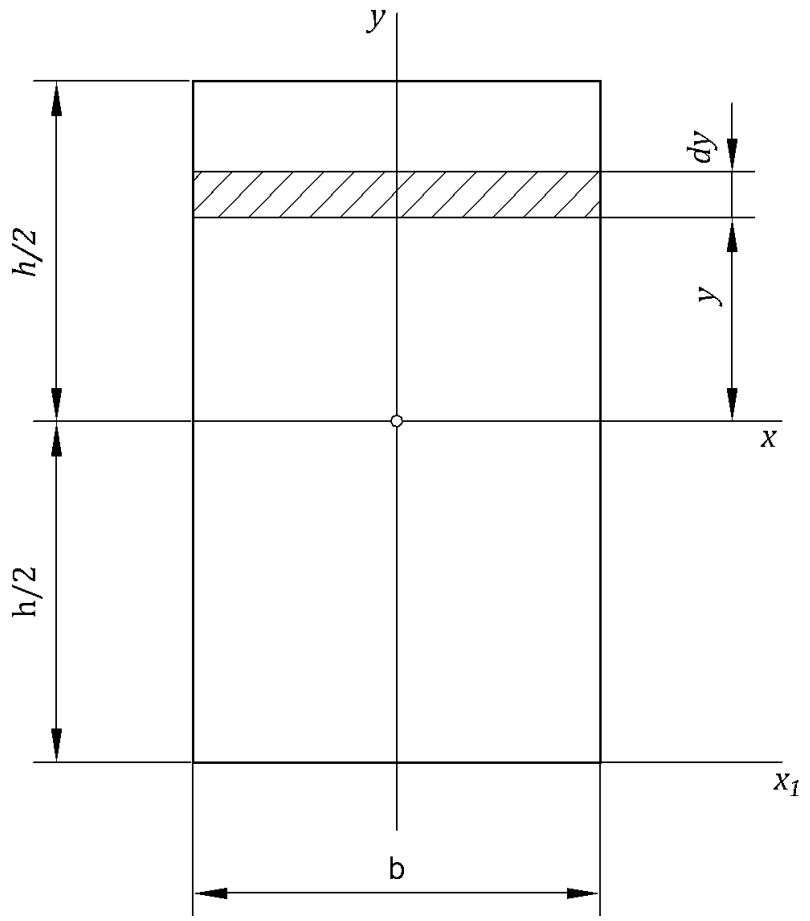


Рис.10.3. До визначення осьового моменту інерції для прямокутника

Для квадрата із стороною a: Jx=a^4/12

2. Круг діаметром d відносно осей x і y. Внаслідок симетрії для круга J_x = J_y. Оскільки

$$J_x + J_y = J_p = \pi d^4 / 32,$$

то

$$J_x = J_y = J_\rho / 2 = \pi d^4 / 64 \approx 0.05 d^4.$$

3. Кільце розміром $D \times d.$ відносно осей x і y\

$$J_x = J_y = (\pi / 64)(D^4 - d^4) \approx 0.05(D^4 - d^4).$$

10.4. Момент інерції при паралельному перенесенні осей

Осі, які проходять через центр ваги фігури називають центральними. Момент інерції відносно центральної осі називають центральним моментом інерції.

Момент інерції відносно будь якої осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельній даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями. Таким чином, момент інерції відносно осі, яка не проходить через центр ваги виявляється більшим, ніж центральний момент інерції.

Так, момент інерції відносно нижньої грані прямокутника (див. рис. 10.3) буде складати: $J_{x1}=J_x+a^2F=bh^3/12+bh\cdot(h/2)^2=bh^3/3$, що в чотири рази більше центрального моменту інерції.

Цей факт використовують для збільшення ефективності роботи матеріалу. Так при однаковій кількості матеріалу двотавровий переріз має набагато більший момент інерції, ніж суцільний прямокутник тому, що полички двотавра віднесені від центру ваги майже на всю висоту перерізу. Тому в сталевих, дерев'яних, залізобетонних конструкціях часто застосовують двотаврові і таврові балки. На рис. 10.4. показаний поперечний переріз сталевої двотаврової прокатної балки, яка має при цій же самій вазі момент інерції, на багато більший, ніж момент інерції прямокутного перерізу.

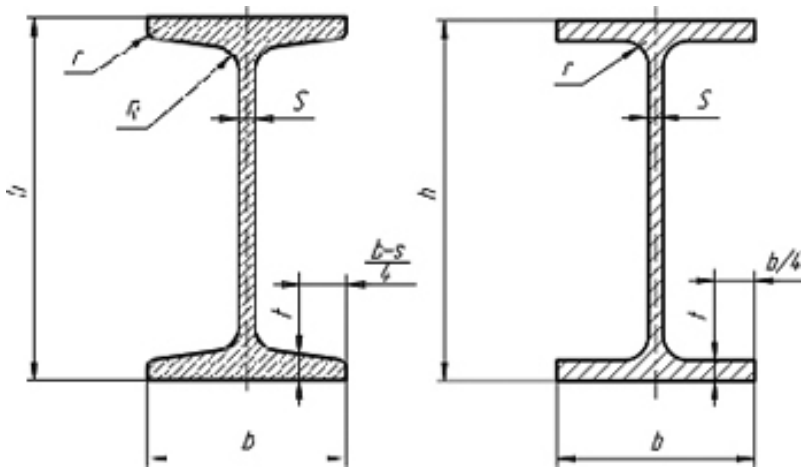


Рис. 10.4. Переріз сталевої прокатної балки. а) – з ухилом полок; б) – без ухилу в полках

На рис.10.5 показаний приклад як підвищують ефективність роботи дерев'яних балок шляхом утворення двотаврового перерізу, що суттєво збільшує момент інерції перерізу і жорсткість на згин



Рис. 10.5. Двотаврові дерев’яні балки

11. Кручення

11.1. Поняття про деформацію кручення циліндра.

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь, якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Моменти цих пар називають обертаючими (якщо брус обертається) і крутними (якщо брус не обертається). Як правило кручення супроводжується зі згином, але сумарну дію згину і кручення для пружних елементів можна розглядати як сума окремо кручення і окремо згину. На рис. 11.1 показані приклади елементів, які зазнають деформації кручення. На рис. 11.1,а це колінчастий вал двигуна внутрішнього згоряння; на рис. 11.1,б – крайня балка будівлі або споруди, з якою жорстко скріплена плита перекриття. Причому колінчастий вал розраховують на міцність і деформативність як елемент круглого поперечного перерізу, а бортову балку – як елемент прямокутного поперечного перерізу. На відміну від деформації згину робота на кручення елементів круглого і прямокутного поперечного перерізу суттєво

відрізняється. Тому далі розрахунок на кручення елементів круглого і прямокутного поперечного перерізу розглядається окремо.

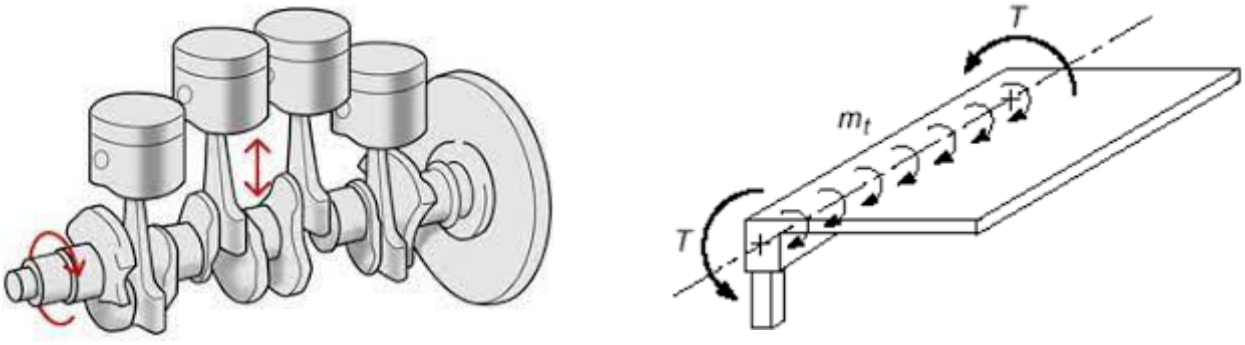


Рис. 11.1. Елементи, що зазнають деформації кручення

Вали мають зазвичай круглий, або кільцевий переріз. Розглянемо спочатку кручення круглого циліндра. Виготовимо з гуми (для більшої наочності) прямий круговий циліндричний брус і жорстко затиснемо один його кінець; нанесемо на його поверхню сітку ліній, що складається з твірних і кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил, щоб вона діяла в площині, перпендикулярній до осі, тобто піддамо брус деформації кручення (рис. 11.2).

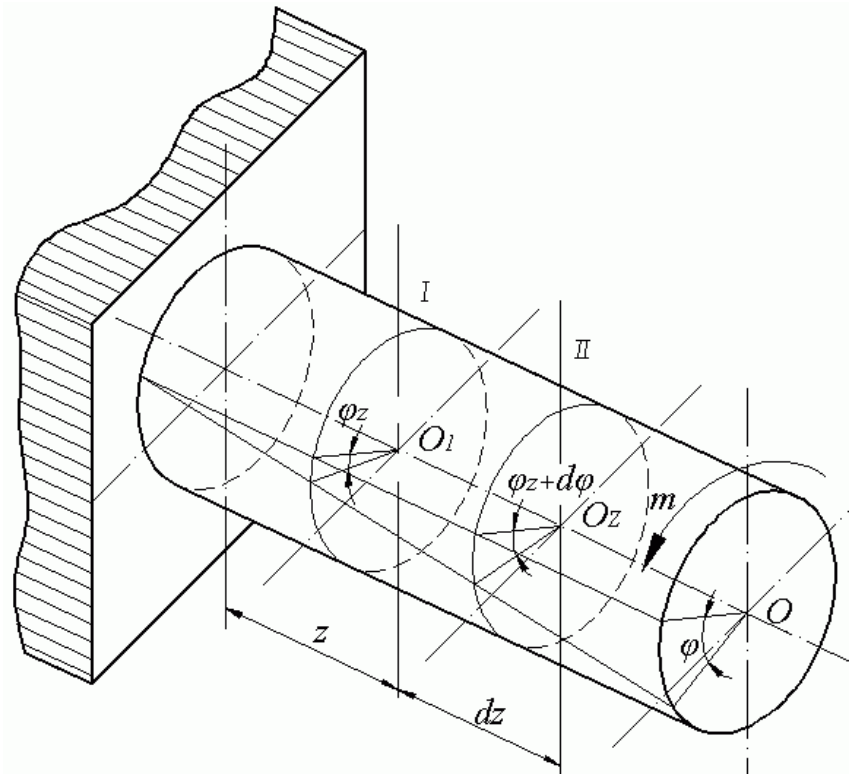


Рис. 11.2. Кручення круглого циліндра

При цьому можна побачити, що вісь циліндра Z, яку називають віссю кручення, залишиться прямолінійною; діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться, тобто коло I, коло II та інші будуть мати початковий вигляд, а відстань між цими колами також залишиться такою, яка була до навантаження крутним моментом. Вільний кінець циліндра повернеться відносно затисненого на кут φ.

З цього можна зробити висновок, що для кручення круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів, а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими. Оскільки в поперечних перерізах бруса немає поздовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. З цього випливає, що деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно одного навколо осі кручення, причому кути їх повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу (див. рис. 11.2). Кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. Кут φ повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.

Відносним кутом закручування Θ називають відношення кута закручування φ_z до відстані z даного перерізу від закріплення (див. рис. 11.2). Якщо брус довжиною l має сталий переріз і навантажений крутним моментом на кінці (тобто складається з однієї ділянки), то:

$$\theta = \frac{\varphi}{Z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const}$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки, можна побачити, що ця клітинка при деформації перекошується. Подібне спостерігалося під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що при крученні також виникає деформація зсуву, але не за рахунок поступального, а в результаті обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого (наприклад, на рис. 11.2 перерізу II відносно перерізу I). Отже, при крученні у поперечних перерізах

виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. Крутний момент є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

11.2. Напруження і деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі. Вважатимемо, що для кручення справедлива гіпотеза про не натискання волокон.

Знаючи, що під час кручення відбувається деформація зсуву, природно вважати, що в точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруження τ, перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці точки з віссю кручення. Існування нормальних напружень у поздовжньому перерізі виключається, оскільки справедлива гіпотеза про не натискання волокон; нормальні напруження у поперечному перерізі не виникають, бо немає поздовжньої сили.

Оскільки радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу волокон прямо пропорційна їх відстані ρ від осі кручення. Відносний зсув перерізу

$$\gamma_\rho = \rho\varphi / l = \varphi_0\rho.$$

де φ_0 – відносний кут закручування.

Застосуємо формулу закону Гука для зсуву:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi_0\rho$$

Коли ρ=0, то τ=0, тобто на осі кручення дотичні напруження дорівнюють нулю. Коли ρ=r, то $\tau=\tau_{max}$, тобто дотичні напруги досягають максимальних значень у волокон, що найбільше віддалені від осі кручення:

$$\tau_{max} = G\varphi_0 r.$$

Оскільки відносний кут закручування φ_0 – величина стала для даного циліндричного бруса, то дотичні напруження при крученні прямо пропорційні

відстані точок перерізу від осі кручення. Епюра розподілу напружень вздовж радіуса перерізу має вигляд трикутника (рис.11.3). Якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий по довжині крутний момент, то дотичні напруження у даному волокні будуть по всій довжині циліндра однакові.

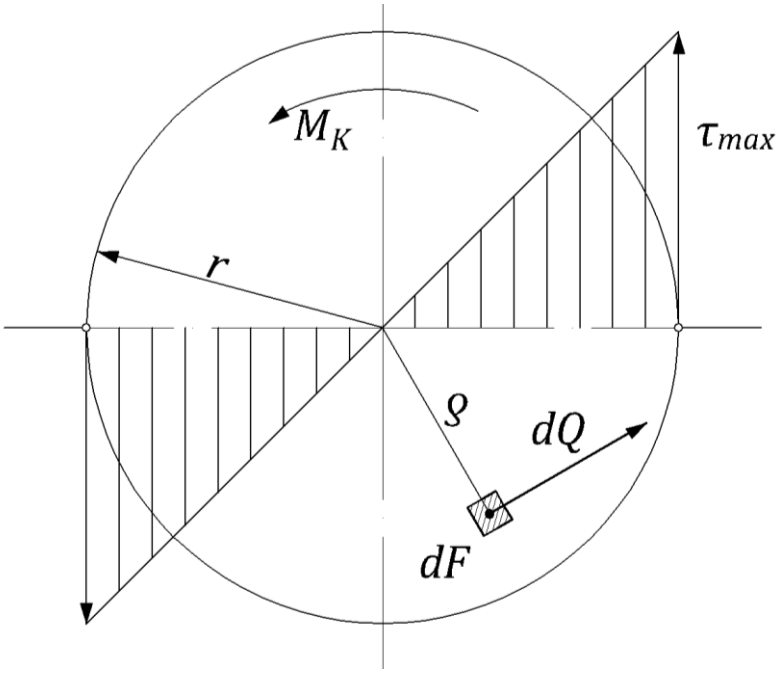


Рис. 11.3. Розподіл дотичних напружень по круговому перерізу

Перейдемо до виведення формул для визначення кута закручування і напружень у поперечному перерізі залежно від крутного моменту.

Розріжемо брус поперечною площиною, що знаходиться на відстані z від закріплення, і розглянемо його переріз (рис. 11.3). Виділимо в перерізі нескінченно малу площадку dF на відстані ρ від осі кручення. Сила dQ, яка діє на цю площадку, буде перпендикулярна до радіуса і дорівнюватиме

$$dQ = \tau_0 dF.$$

Визначимо момент внутрішніх сил відносно осі кручення, тобто крутний момент:

$$M_к = \int_F dQ_0 = \int_F \tau_0 dF\rho = \int_F G\varphi_0 \rho dF\rho = G\varphi_0 \int_F \rho^2 dF = G\varphi_0 J_\rho,$$

звідки знайдемо відносний кут закручування:

$$\varphi_0 = M_к / (GJ_p), \text{ рад.}$$

Повний кут закручування циліндра довжиною l

$$\Phi = M_к l / (GJ_p), \text{ рад.}$$

Добуток GJ_p, що стоїть у знаменнику, називають жорсткістю перерізу при крученні.

Таким чином, установлено, що повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Оскільки для виведення останньої формули застосовано закон Гука, то формула дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

11.3. Розрахункові формули на міцність і жорсткість при крученні

Умова міцності бруса при крученні полягає у тому, що найбільше дотичне напруження, яке виникає у ньому, не повинне перевищувати допустиме. Розрахункова формула па міцність для кручення має вигляд

$$\tau = M_к / W_p \le | \tau_к |$$

і читається так: дотичне напруження у небезпечному перерізі, обчислене за формулою $\tau = M_к / W_p$, не повинне перевищувати допустиме $[\tau_k]$. Допустиме напруження кручення вибирають залежно від допустимого напруження розтягу $[Б_р]$, а саме:

для сталей

$$[\tau_к] = (0,55 \div 0,60)[\sigma_p],$$

для чавунів

$$[\tau_к] = (1 \div 1,2)[\sigma_p].$$

для бетону

$$[\tau_k] \approx 2[\sigma_p]$$

Крім міцності до валів ставлять вимогу жорсткості, яка полягає у тому, що кут закручування одного метра довжини валу не повинен перевищувати певної величини, щоб не сталося, наприклад, пружинення валів або втрат точності ходових гвинтів токарно-гвинторізних верстатів тощо. Допустимий кут

закручування одного метра довжини вала задають в градусах і позначають $[\varphi^{\circ}_{o}]$; розрахункова формула на жорсткість для кручення має вигляд

$$\varphi^{\circ}_{0} = \frac{180^{\circ} M_{K}}{\pi G J_{p}} \leq [\varphi^{\circ}_{0}].$$

Величини допустимих кутів закручування залежать від призначення вала, їх звичайно беруть у таких межах: $[\varphi^{\circ}_{0}] = 0,25 \div 1$ град/м.

За допомогою наведених формул виконують три види розрахунків конструкцій на міцність і жорсткість для кручення – проектний розрахунок, перевірний розрахунок і визначення допустимого навантаження.

Наочним прикладом розрахунку на міцність і жорсткість при крученні може слугувати циліндрична гвинтова пружина. Вона працює на стиск вздовж осі, а витки пружини закручуються моментом Mk=PD/2, де P – стискаюча пружину сила, а D – діаметр пружини (рис. 11.4). Тобто від зовнішнього навантаження P на пружину в її витках з'являються дотичні напруження від кручення. Знаючи навантаження, діаметр витка і діаметр пружини, а також марку сталі, з якої вона виготовлена, за формулами кручення неважко розрахувати як міцність пружини, так і її деформації.

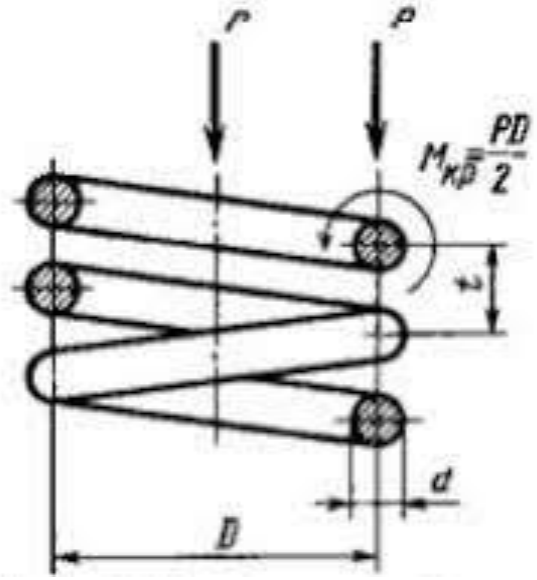


Рис. 11.4. Схема дії крутного моменту у витках пружини

11.4. Жорсткість і міцність при крученні елементів прямокутного поперечного перерізу

В інженерній практиці часто зустрічаються стрижні прямокутного, таврового, двотаврового та інших поперечних перерізів, в яких формули, наведені вище для круглих перерізів, треба застосовувати з деякими застереженнями. Основна відмінність кручення елемента некруглого поперечного перерізу полягає в тому, що поперечні перерізи при цьому не залишаються плоскими, а викривляються. Так, на рис. 11.5. показано деформований стан елемента квадратного поперечного перерізу, який закручується двома протилежно напрямленими крутними моментами.

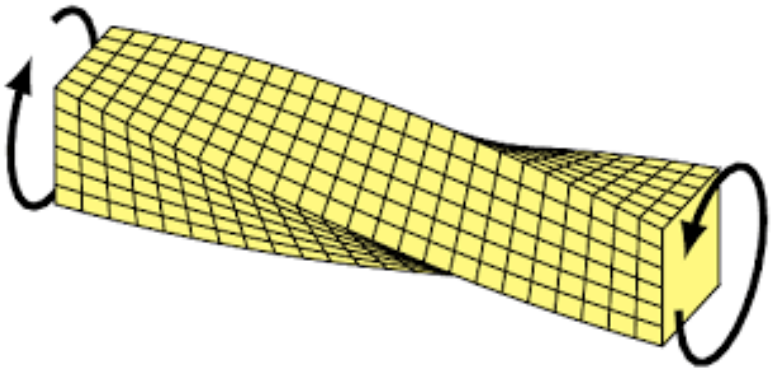


Рис. 11.5. Викривлення поперечних перерізів при крученні стрижня квадратного поперечного перерізу

Точні розрахунки стрижнів не круглого поперечного перерізу виконують методами теорії пружності, але існують формули, за якими можна розраховувати дотичні напруження і кути закручування таких стрижнів.

Дотичні напруження в стрижні прямокутного поперечного перерізу розподіляються не за законом прямої лінії, як в стрижні круглого поперечного перерізу. Крім того, максимальні напруження на короткій і довгій стороні не однакові. На довгій стороні прямокутного поперечного перерізу з’являються більші напруження, ніж на короткій (рис. 11.6).

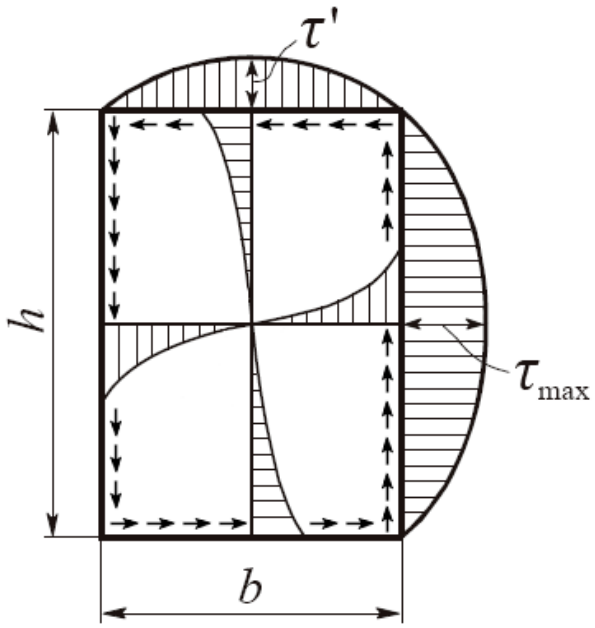


Рис. 11.6. Розподіл дотичних напружень при крученні стрижня прямокутного поперечного перерізу

Максимальні дотичні напруження і повний кут закручування стрижня довжиною в одиницю визначаються за формулами, аналогічними формулам, наведеним для круглих стрижнів, але складові формул мають дещо умовний сенс:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad \varphi = \frac{M_t l}{G J_t}$$

Як бачимо, формули мають аналогічний вигляд, що і при крученні круглих елементів. Але момент опору при крученні w_t і момент інерції при крученні J_t – це величини, що залежать не тільки від розмірів поперечного перерізу стрижня, а й від співвідношення цих розмірів. В цьому полягає корінна різниця від геометричних характеристик круглих перерізів.

В теорії пружності виведені формули для визначення w_t і J_t. Коротко їх можна записати наступним чином:

$$W_t = \alpha \cdot b^2 \cdot h \qquad J_t = \beta \cdot h \cdot b^3$$

де b та h – відповідно менша і більша сторони прямокутного поперечного перерізу (див. рис. 11.6); α та β коефіцієнти, що залежать від співвідношення h/b і наведені в таблиці 11.1.

Таблиця 11.1. Значення коефіцієнтів α та β для стрижня прямокутного поперечного перерізу

h/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

Слід мати на увазі, що максимальні дотичні напруження діють на довшій стороні прямокутного поперечного перерізу. На коротшій стороні перерізу дотичні напруження менші за напруження на довшій стороні. Крім того, вони зосереджені на малій відстані від короткої сторони.

11.5. Головні напруження при крученні. Тріщини при крученні

При крученні стрижнів з крихких матеріалів вони руйнуються за спіральною тріщиною. При цьому кут нахилу тріщини становить 45^0 (рис. 11.7).

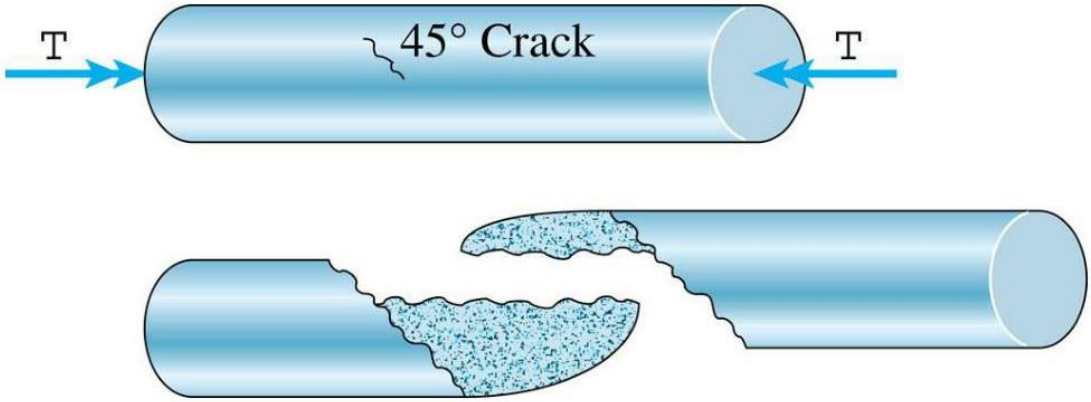


Рис. 11.7. Вид руйнування при крученні крихкого матеріалу

Це пов’язано з фактом, що крихкі матеріали (наприклад, бетон, камінь, цегла) мають малу міцність на розтягнення. Можна задати питання: якщо при крученні з’являються тільки дотичні напруженні зсуву і немає нормальних напружень, то звідки беруться ці розтягуючи напруження? Для пояснення цього факту розглянемо рис. 11.8. При крученні, як було сказано вище, з’являються тільки дотичні напруження. За законом парності дотичних напружень в

елементарному елементі розмірами aхa модулі напружень τ_1 та τ_2 рівні, але вони діють в взаємно перпендикулярних напрямках (рис 11.8, а).

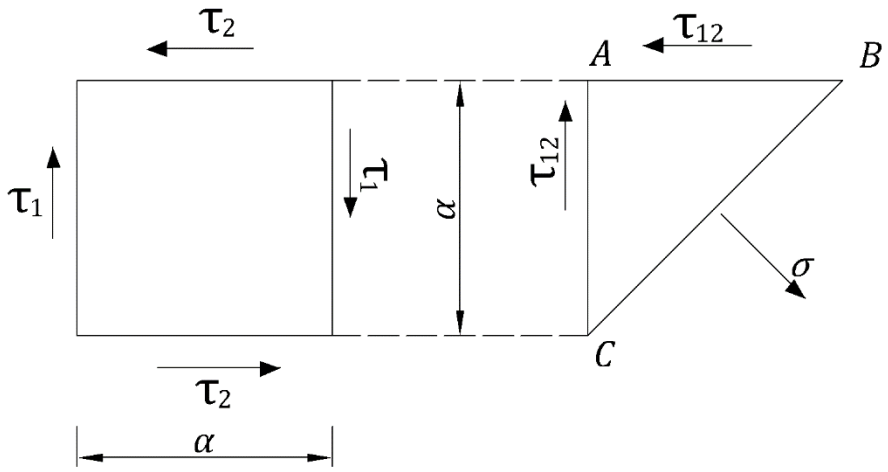


Рис. 11.8. Головні напруження при крученні

Векторна сума цих напружень дає нормальне напруження σ, яке діє на похилій площині (див рис. 11.8, б). Як видно з рисунка, величина цих напружень дорівнює величині дотичних напружень Ці напруження називають головними напруженнями. Саме в результаті дії цих напружень і з'являються тріщини в елементі, що закручується. А тому, що головні напруження діють на площадках, розташованих під кутом 45^0, тріщина виявляється спіральною і крихкий матеріал руйнується за спиральною тріщиною (див. рис. 11.7).

Крихкі матеріали руйнуються одразу після утворення спіральної тріщини. Тому в залізобетонних конструкціях для запобігання руйнування влаштовують армування. Причому при крученні залізобетонних стрижнів слід армувати їх як поздовжньою арматурою, так і замкненою арматурою по периметру перерізу. Таку арматуру називають ще хомутами. Після утворення тріщин залізобетонний стрижень прямокутного поперечного перерізу вважають коробчастим з товщиною ребер t_{ef}, яка визначається розрахунком. Нерівномірно розподілені дотичні напруження суцільного перерізу (рис. 11.9, а) замінюються рівномірно розподіленими по всьому периметру умовного коробчастого перерізу (рис. 11.9, б). Тим самим суттєво спрощується розрахунок без невеличкої втрати точності [Мак-Грегор].

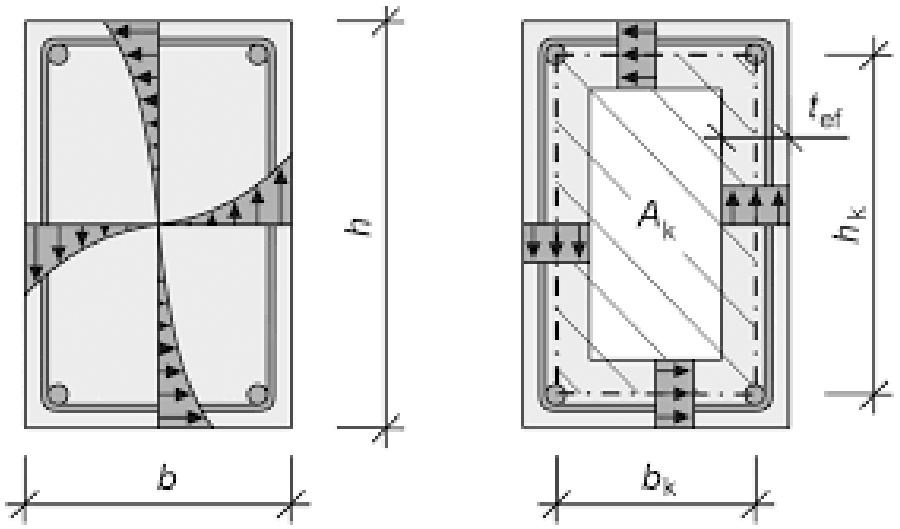


Рис. 11.9. До розрахунку залізобетонного стрижня на кручення

Стрижні з дерева, метала при крученні розраховують ще і при напруженнях, що перевищують межу міцності на розтягнення. При цьому вважається, що матеріал поводить себе як пластичний. Такі розрахунки виходять за рамки даного посібника і читач може ознайомитись з ними у спеціальній літературі.

12. Згин.

12.1. Загальні відомості про згин.

Згинальна конструкції є найбільш розповсюдженими в машинобудуванні, будівництві, інших галузях техніки. Вони можуть бути виготовлені з металу, дерева, залізобетону, інших композитних матеріалів.

Опір матеріалів розглядає згинальний елемент, який називають балкою. Балкою називають лінійний елемент, довжина якого значно перевищує за значенням і ширину, і висоту перерізу (означення балки відоме з теоретичної механіки). Балка - це елемент несучих конструкцій з різними умовами спирання і працює переважно на згин, хоча бувають балки, що працюють на згин зі стиском, згин з крученням тощо. Балка може мати різні види перерізів прямокутні, таврові, двотаврові, коробчасті та інші.

Як правило, горизонтально розташована балка сприймає вертикальне поперечне навантаження, але в окремих випадках необхідно враховувати вплив

і ймовірних горизонтальних поперечних сил (наприклад, вітрове навантаження або з урахуванням можливого землетрусу). Навантажена балка, у свою чергу, впливає на опори, якими можуть бути колони, підвіси, стіни або інші балки (перекладини). Потім навантаження передається далі і в результаті, як правило, сприймається конструктивними елементами, що працюють на стиск, - опорами.

Міцні якості балки залежать від кількох її характеристик: площа та форма її поперечного перерізу; довжина (проліт) балки; матеріал балки; спосіб її закріплення (жорстке закладення або шарнірні опори).

У сучасних спорудах використовуються, як правило, сталеві, залізобетонні чи дерев'яні балки. Одним з найпоширеніших типів поперечного перерізу сталевої балки є двотавровий переріз. Двотаврові балки використовують при зведенні каркасів будівель та мостів. Також застосовують таврові балки, швелери, балки з порожнім профілем (зокрема, труби), балки з кутовим профілем перерізу. Сталева балка може бути прокатною або звареною.

Приклади застосування балок в будівництві показані на рис. 12.1, а, в мостобудуванні – на рис. 12.1, б





Рис. 12.1. Приклади застосування балок

12.1. Чистий згин прямого бруса

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинаючий, момент. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною і протилежні за

знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі конструкцій. Надалі майже завжди розглядатимемо такі бруси, в яких є хоча б одна площина симетрії і з нею збігається площина дії навантажень. У цьому випадку деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил і згин називають прямим, на відміну від косого згину, де балка згинається в двох площинах.

Якщо на бокову поверхню призматичного гумового бруса прямокутного поперечного перерізу нанести сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній (рис. 12.2), то після прикладення моментів на торцях можна побачити, що після деформації вертикальні прямі лінії повернуться одна на зустріч одній, однак ці лінії залишаться прямим. Верхня частина призми стане коротшою, а нижня – довшою.

Таким чином можна констатувати, що для чистого згину дійсна гіпотеза плоских перерізів. Волокна, які лежать на нижній грані розтягуються, а волокна на верхній грані – стискаються. На межі між ними лежить нейтральний шар волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини. Приймаючи дійсною гіпотезу про нетатискання волокон, можна стверджувати, що при чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження розтягнення і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.

12.2. Згинальний момент і поперечна сила

Як відомо з теоретичної механіки, опорні реакції балок визначають, складаючи для всієї балки і розв'язуючи рівняння рівноваги статики. Пам'ятатимемо, що при визначенні внутрішніх сил реакції в’язів враховують поряд з активними зовнішніми силами, які діють на балку. Для визначення внутрішніх силових факторів застосуємо метод перерізів, причому зображатимемо балку тільки однією лінією – віссю, до якої прикладено активні і реактивні сили. Розглянемо два випадки:

1. До балки прикладено дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил. Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу можна побачити, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинаючий

момент M_{zg}, який дорівнює зовнішньому моменту. Таким чином, розглянутий випадок є випадком чистого згину.

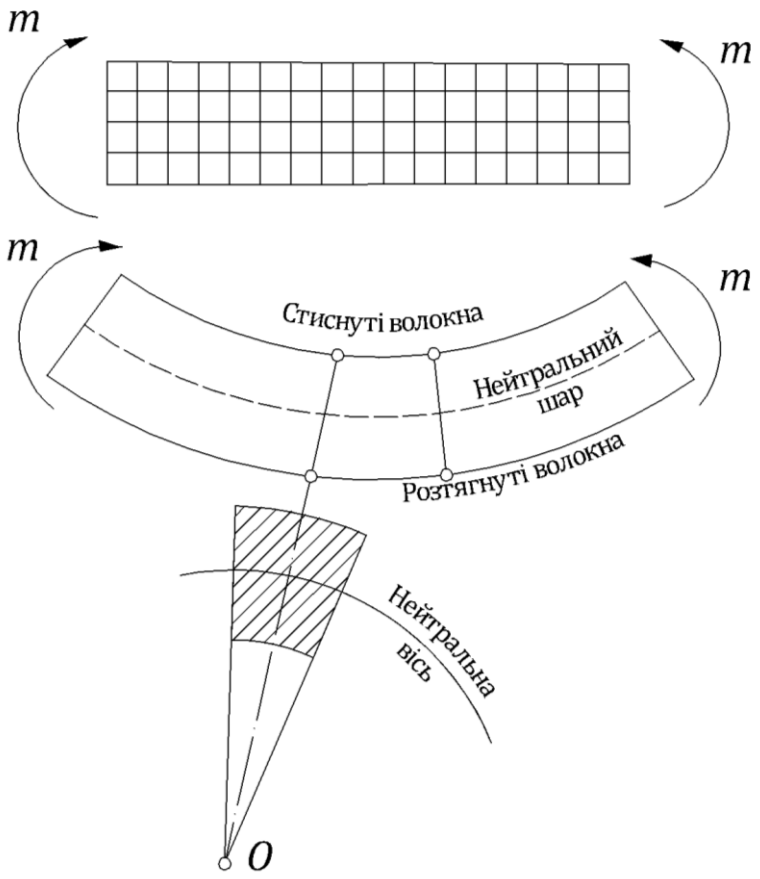


Рис. 12.2. Деформації бруса при чистому згині

Згинаючий момент є результуючим моментом відносно нейтральної осі внутрішніх нормальних сил, які діють у поперечному перерізі балки. Звернемо увагу на те, що згинаючий момент має різний напрям для лівої і правої частин балки. Це вказує на непридатність правила знаків статики для визначення знака згинаючого моменту.

2. До балки прикладено активні і реактивні сили, перпендикулярні до осі (див. рис. 12.3). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва і справа від будь-якого перерізу (наприклад, від перерізу на відстані b від опори A на рис. 12.3), можна побачити, що в поперечних перерізах повинні діяти не тільки згинаючий момент M_{zg}, а й поперечна сила Q. З цього випливає, що в розглянутому випадку в точках поперечних перерізів діють не тільки нормальні

напруження, які відповідають згинальному моменту, а й дотичні напруження, які відповідають поперечній силі.

Поперечна сила – це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі балки.

Звернемо увагу на те, що поперечна сила має протилежний напрям для лівої і правої частин балки, що вказує на непридатність правила знаків статики для визначення знака поперечної сили. Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинальний момент і поперечна сила, називають поперечним.

Неважко побачити, що в загальному випадку при поперечному згині згинальний момент і поперечна сила в різних перерізах можуть мати неоднакові значення. Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи сил, алгебраїчна сума моментів усіх активних і реактивних сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю, тому сума моментів зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють на балку справа від перерізу.

Таким чином, згинальний момент в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системі паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю, сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перерізу.

Таким чином, поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

12.3. Диференціальні залежності при згині

Між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких

лежить теорема Журавського. Цю теорему формулюють так: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинаючого моменту по абсцисі перерізу балки.

Розглянемо балку, зображену на рис.12.3. Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, а вісь Z напрямимо вправо (надалі ця обставина матиме важливе значення). На одній з ділянок балки проведемо переріз з поточною координатою Z і запишемо рівняння згинаючого моменту:

$$M_{\text{зг}} = R_A z + m - P_1(z-a) + q(z-b)^2 / 2.$$

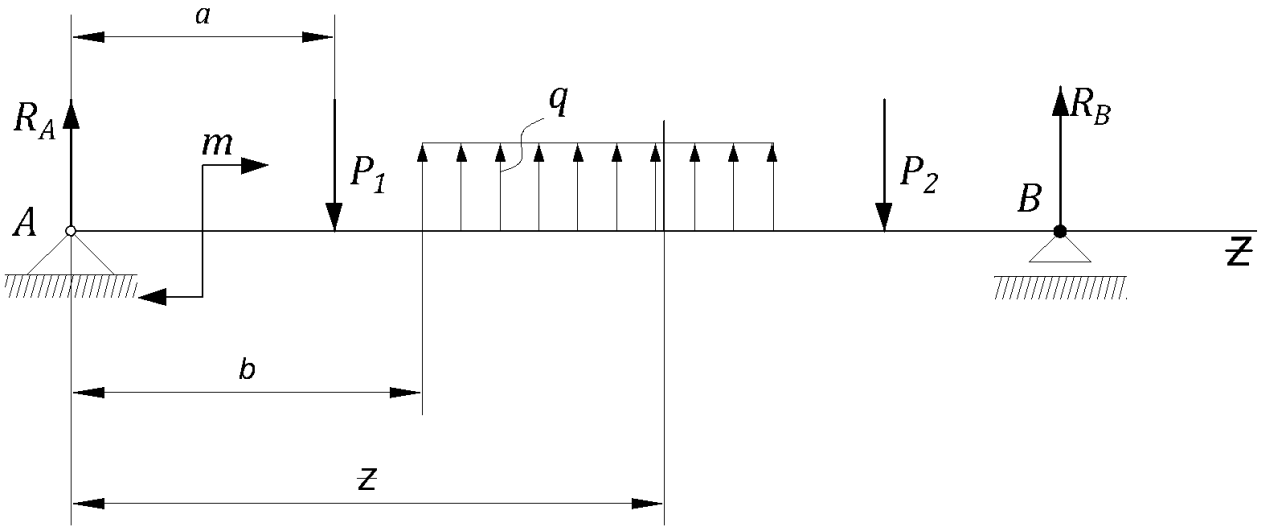


Рис. 12.3. Схема до виводу диференціальних залежностей при згині

Продиференціювавши цей вираз за координатою Z, матимемо:

$$\frac{dM_{\text{зг}}}{dz} = R_A - P_1 + q(z-b).$$

Вираз, який стоїть у правій частині цієї рівності,– це поперечна сила Q в перерізі Z. Таким чином,

$$\frac{dM_{\text{зг}}}{dz} = Q$$

Теорему Журавського доведено

Якщо рівняння згинаючих моментів (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, то матимемо

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q,$$

тобто друга похідна від згинаючого моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження. Як відомо з вищої математики, за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вгнутість кривої; відповідне правило слід використовувати для побудови епюр (графіків) згинальних моментів і поперечних сил.

12.4. Нормальні напруження при чистому згині

В поперечних перерізах балки при чистому згині з'являються тільки нормальні напруження розтягу та стиску. Для з'ясування розподілу цих напружень по поперечному перерізу розглянемо ділянку балки під впливом чистого згину (рис. 12.4).

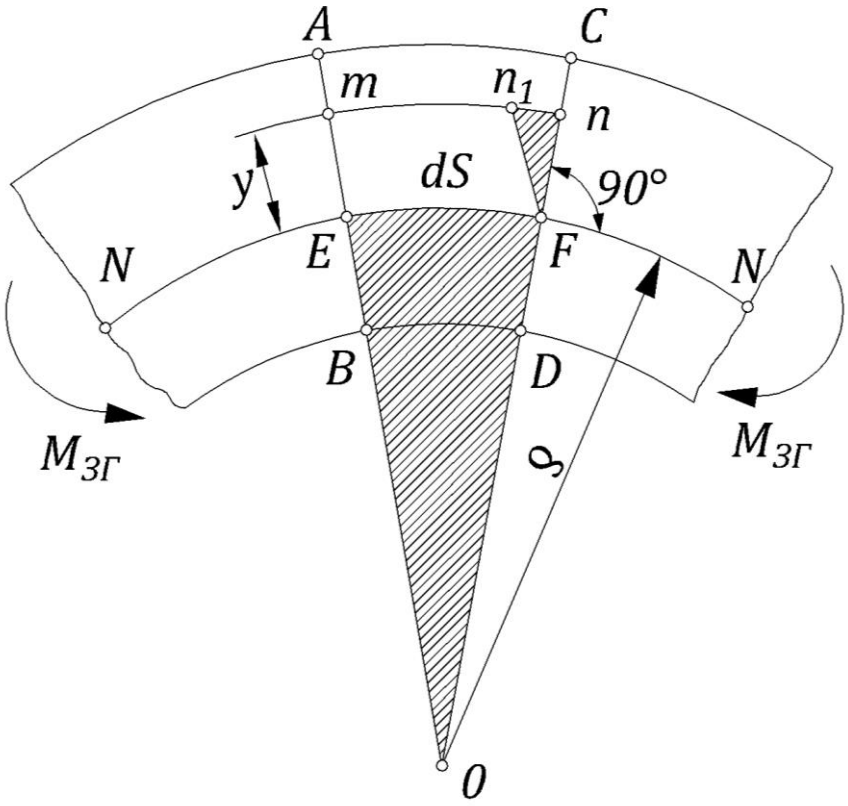


Рис. 12.4. До визначення розподілу нормальних напружень при згині

Радіус кривизни нейтрального шару позначимо через ρ. Розглянемо шар волокон mn, який знаходиться на відстані **y** від нейтрального шару **NN**. Це волокно в результаті деформації згину подовжиться на величину nn_1. Через

малість відстані ds трикутники, що заштриховані, будемо вважати прямолінійними. Ці трикутники подібні: трикутник OEF подібний трикутнику Fnn_1.

З подібності цих трикутників маємо рівність $nn_1/ds=y/\rho$.

Через те, що ліва частина цієї рівності є відносним подовженням, тобто $nn_1/ds=\varepsilon$, то $y/\rho=\varepsilon$.

Застосувавши закон Гука $\sigma=E\varepsilon$, отримаємо: $\Sigma=Ey/\rho$.

З цієї формули видно, що нормальні напруження при згині розподілені по висоті перерізу нерівномірно. З формули також видно, що закон розподілення – це закон прямої лінії. Тому максимальні напруження будуть на верхній і нижній гранях елемента, а на лінії нейтрального шару вони дорівнюватимуть нулю.

Для отримання формули, яка пов’язує нормальні напруження із згинальним моментом, використаємо метод перерізів і розглянемо рівновагу частини балки, яка показана на рис. 12.5.

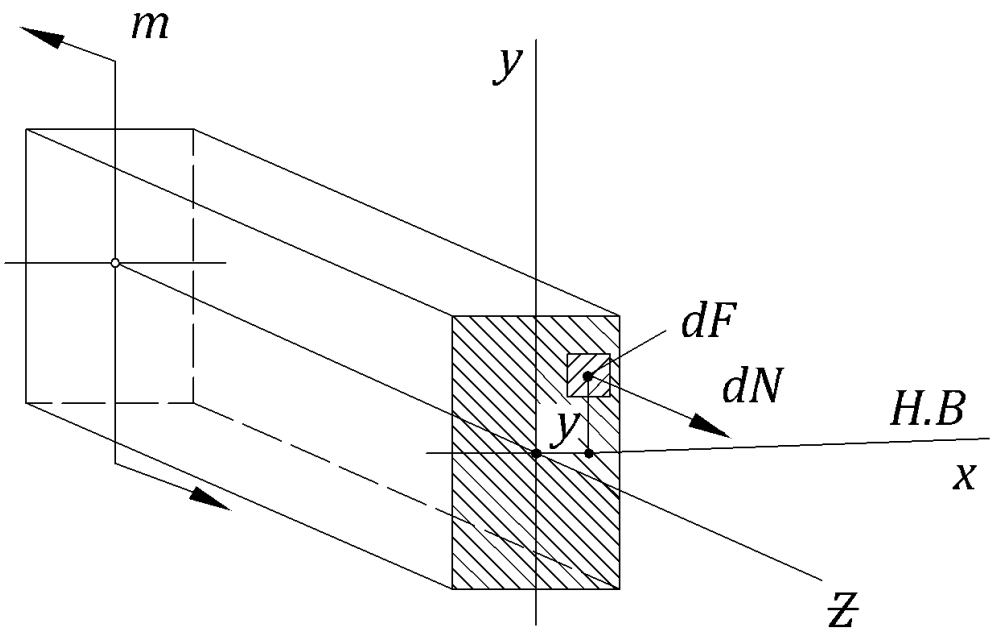


Рис. 12.5. Визначення залежності нормальних напружень від моменту

В поперечному перерізі виділимо нескінченно малу площадку dF, в межах якої будемо вважати нормальні напруження σ постійними. Тоді нормальна сила dN, яка діє на площадку dF, дорівнюватиме dN=σdF.

Складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum Z = 0 \text{ або } \int_A dN = 0$$

$$\sum M_x = 0 \text{ або } -ь + \int_F ydN = 0$$

Маючи на увазі, що m=Mzg, а також закон Гука, кінцево будемо мати:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = \frac{Ey}{EI/M_{zg}} = \frac{M_{zg}y}{I}$$

Максимальне значення нормального напруження буде в волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zg}y_{max}}{I} = \frac{M_{zg}}{I/y_{max}} = \frac{M_{zg}}{W}$$

де I – момент інерції перерізу; $W=I/y_{max}$ – так званий момент опору при згині, тобто відношення моменту інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна. Одиниця моменту опору при згині – $м^3$.

Оскільки момент опору при згині W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то чим більше W, тим менші розрахункові напруження.

Визначимо моменти опору при згині найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутник b × h (рис. 12.6):

$$W_{пр} = \frac{J}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти плазом, то $W_{пр}^{I} = hb^2/6$, тоді

$$\frac{W_{пр}}{W'_{пр}} = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1.$$

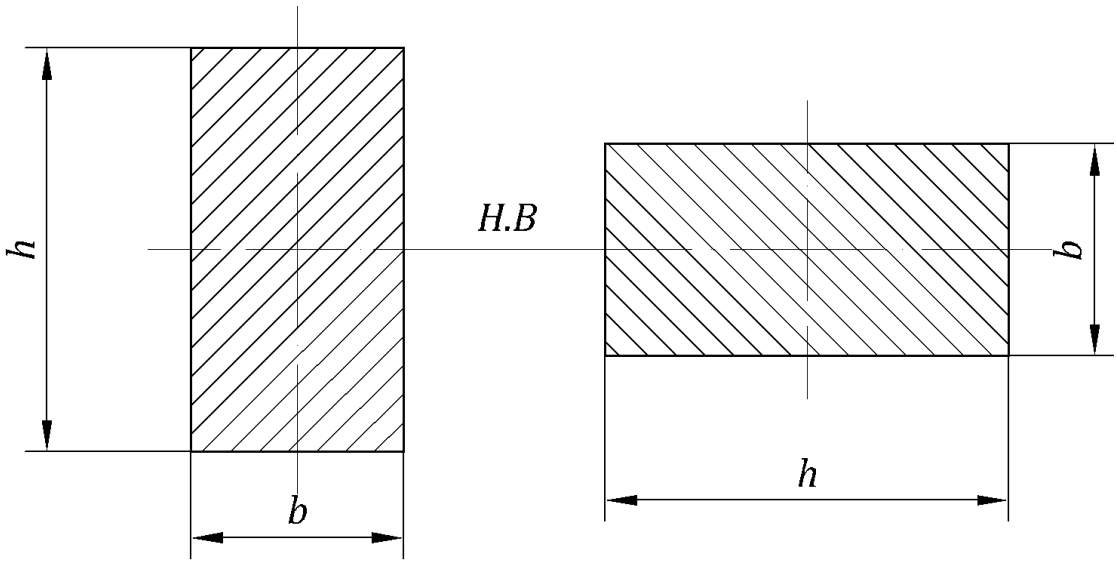


Рис. 12.6. Визначення моменту інерції при згині для прямокутного поперечного перерізу

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруження в прямокутній балці, яку покладено плазом, будуть більшими, ніж у тій самій балці, коли її найбільший габаритний розмір h вертикальний (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині).

Із сказаного випливає правило: для забезпечення максимальної міцності вісь, відносно якої момент інерції максимальний, повинна бути нейтральною,

2. Круг діаметром d:

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3.$$

3. Кільце розміром D × d:

$$W = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4); \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0{,}1\frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Момент опору кільцевого перерізу неможна обчислювати як різницю моментів опорів великого і малого кругів. Неважко підрахувати, що при однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу, момент опору кільцевого перерізу більший від моменту опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розміщувати далі від нейтральної осі. Тому в

машинобудуванні рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного й інших перерізів. Моменти інерції, моменти опору й інші відомості про прокатні фасонні профілі стандартних розмірів подано у різних довідниках [Писаренко].

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, чавун, бетон), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруження розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розмішувати так, щоб менші напруження були в зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон.

12.5. Розрахункова формула на міцність при згині

Умова міцності балки при згині полягає в тому, що максимальне нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати допустиме значення.

Вважаючи, що гіпотеза про не натискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруження в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що і у випадку чистого згину. Питання, що стосуються перевірки міцності балки на дотичні напруження і розрахунку балок на жорсткість розглядатимуться нижче.

Розрахункова формула на міцність при згині має вигляд

$$\sigma = M_{\text{зг max}} / W \le [\sigma];$$

її читають так: нормальне напруження в небезпечному перерізі, обчислене за формулою $\sigma = M_{\text{зг max}} / W$, неповинне перевищувати допустиме. Допустиме нормальне напруження при згині беруть таким самим, як для розтягу і стиску.

Однак існує багато матеріалів, де допустимі напруження при згині суттєво відрізняються від напружень при розтягненні або стиску. Так, наприклад, на рис. 12.7 показані дані для міцності при розтягу, згині і стиску згідно з нормами

проектування дерев'яних конструкцій [ДБН-дерево] для деревини різних класів міцності.

Як бачимо, допустимі напруження для згину суттєво відрізняються від напружень розтягу для деревини.

КЛАСИ МІЦНОСТІ ДЕРЕВИНИ

Таблиця Б.1 – Характеристичні значення міцності, жорсткості та густини для хвойної деревини

№ з/п	Класи міцності	C14	C16	C18	C20	C22	C24	C27	C30	C35	C40	C45	C50
Значення міцності, Н/мм^2													
1	Згин $f_{m,k}$[a]	14	16	18	20	22	24	27	30	35	40	45	50
2	Розтяг вздовж $f_{t,0,k}$[a]	8	10	11	12	13	14	16	18	21	24	27	30
3	Розтяг впоперек $f_{t,90,k}$	0,4											
4	Стиск вздовж $f_{c,0,k}$[a]	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	29
5	Стиск впоперек $f_{c,90,k}$	2,0	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2
6	Сколювання та кручення $f_{v,k}$[c]	2,0											
Значення жорсткості, Н/мм^2													
7	Модуль пружності вздовж $E_{0,mean}$[a,b]	7000	8000	9000	95000	10000	11000	11500	12000	13000	14000	15000	16000
8	Модуль пружності впоперек $E_{90,mean}$[b]	230	270	300	320	330	370	380	400	430	470	500	530
9	Модуль зсуву G_{mean}[b,c]	440	500	560	590	630	690	720	750	810	880	940	1000
Значення густини, кг/м^3													
10	Густина ρ_k	290	310	320	330	340	350	370	380	400	420	440	460

Рис. 12.7. Міцність деревини в залежності від класів [ДБН]

12.6. Дотичні напруження при згині

В поперечних перерізах балки при поперечному згині з'являються не тільки нормальні, а й дотичні напруження, які викликають деформацію зсуву. В

силу закону парності дотичних напружень такі ж самі дотичні напруження виникають і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару.

Наявність дотичних напружень в поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев’яних балках при поперечному згині поздовжніх тріщин (рис. 12.8).



Рис. 12.8. Поздовжня тріщина в дерев’яній балці

Розглянемо балку прямокутного поперечного перерізу $b_x h$ (рис12.9).

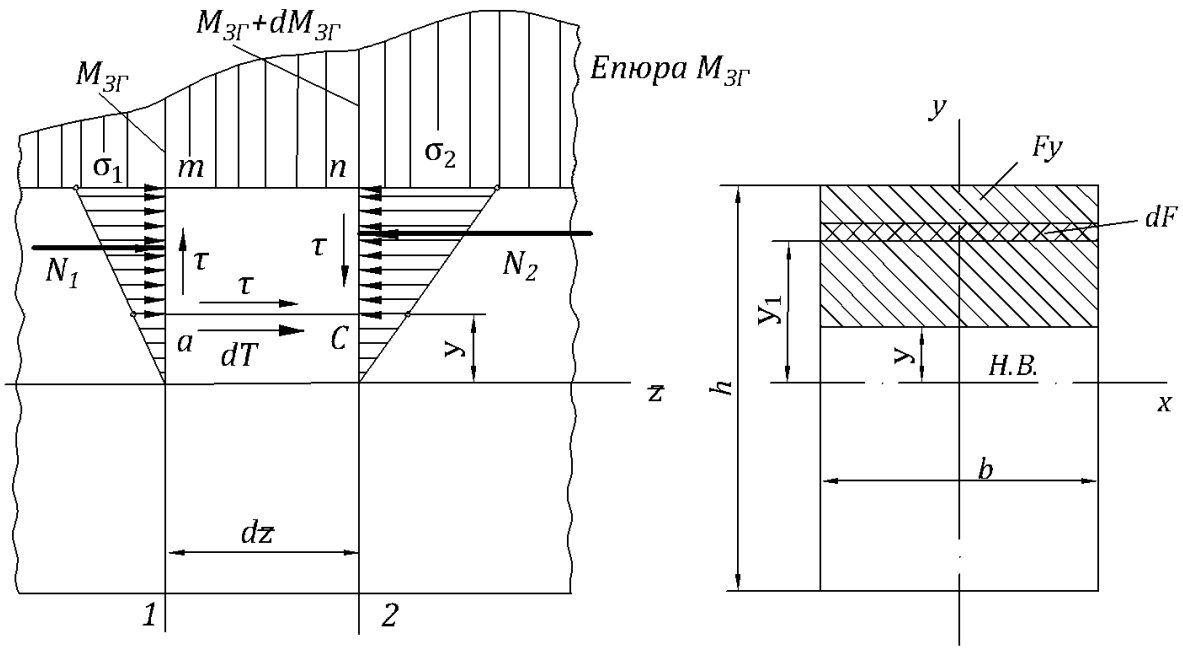


Рис. 12.9. Схема до визначення дотичних напружень при згині

Нехай в поперечному перерізі 1 діє згинальний момент Mzg, а в перерізі 2, який розташований на відстані dz –згинальний момент Mzg+dMzg.

З розгляду рівноваги елементарного паралелепіпеда **amnc** Д.І Журавським була виведена формула для дотичного напруження (тут ми приводимо без виводу формулу):

$$\tau = \frac{dM}{dz}\frac{S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$$

де S – статичний момент заштрихованої на рис. 12.9 ділянки відносно нейтральної осі; I – момент інерції поперечного перерізу.

Таким чином, формула Журавського читається наступним чином: дотичні напруження в поперечному перерізі балки рівні додатку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка розташована вище розглянутого шару волокон, поділеному на момент інерції I всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглянутого шару волокон.

Закон розподілення дотичних напружень для балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 12.10) буде виглядати:

$$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{6Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \cdot h^3}$$

При y=0, $$\tau = \tau_{max} = \frac{3Q}{2 \cdot b \cdot h}$$

Тобто закон розподілення дотичних напружень по висоті перерізу – це квадратна парабола з нульовими значеннями на гранях перерізу і з максимумом на рівні нейтрального шару.

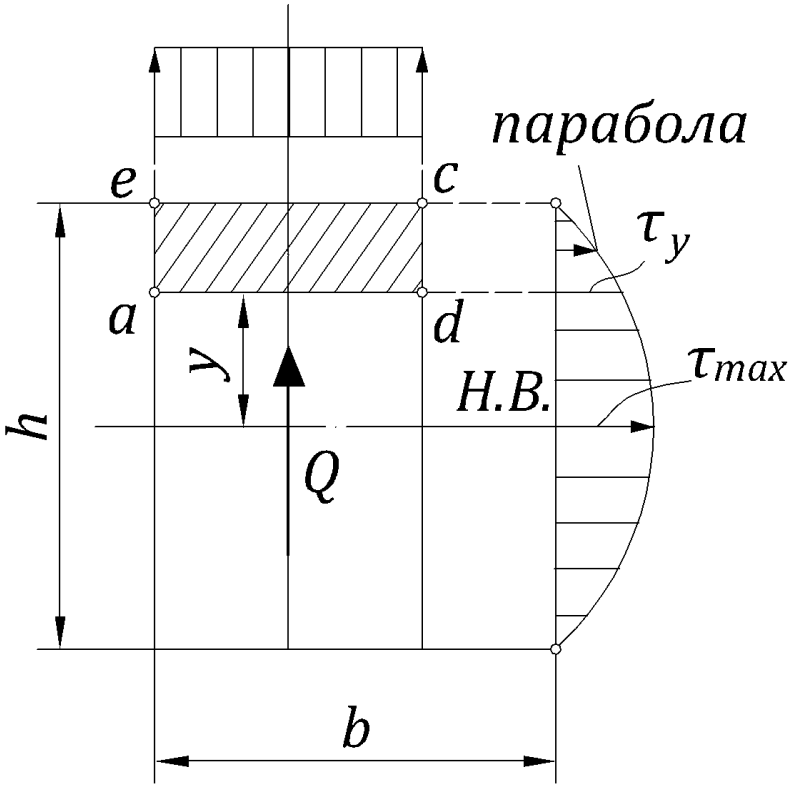


Рис12.10. Розподілення дотичних напружень по поперечному перерізу

13. Складний напружений стан при згині

13.1. Згин з розтягом або з стиском.

Розглянемо брус довжиною l сталого поперечного перерізу, затиснутий одним кінцем і навантажений на вільному кінці довільно напрямленою силою P, яку прикладено в центрі ваги перерізу (рис.13.1).

Розкладемо силу P на складові P_x , P_y і P_z. У результаті дії цих складових виникають одночасно деформації розтягу і поперечного згину в двох взаємно перпендикулярних площинах (дотичними напруженнями згину надалі нехтуватимемо).

Застосуємо принцип незалежності дії сил і визначимо максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі (закріпленні):

$$\sigma_{\text{р}} = P_z / F, \quad \sigma_{1\text{зг}} = \pm P_y l / W_x, \quad \sigma_{2\text{зг}} = \pm P_x l / W_y.$$

Максимальні сумарні напруження виникнуть в точці А і будуть напруженнями розтягу

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = P_z / F + P_y l / W_x + P_x l / W_y.$$

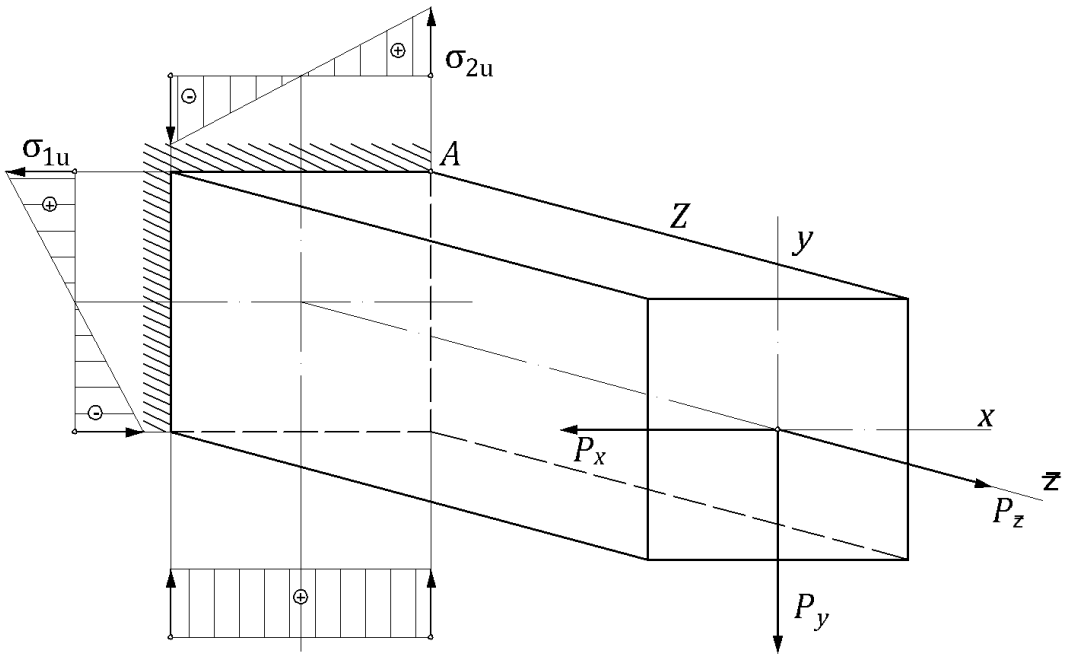


Рис. 13.1. До визначення напружень при згині з розтягом

13.2. Позацентровий стиск.

Позацентровим стиском називають такий вид деформації, коли стискаюча сила паралельна осі бруса, але точка її прикладання не збігається з центром ваги перерізу (вивчену раніше деформацію можна назвати центральним стиском).

Розглянемо брус прямокутного перерізу b × h (рис.13.2), до якого на відстані e від осі прикладено паралельну їй силу P. У центрі ваги перерізу

вздовж осі прикладемо дві протилежно напрямлені сили, які за модулем дорівнюють силі Р. Утворену систему трьох сил розглядатимемо як силу Р, прикладену в центрі ваги, і пару сил з моментом т=Ре. Користуючись принципом незалежності дії сил, позацентровий стиск розглядатимемо як поєднання центрального стиску і чистого згину, причому відповідні нормальні напруження визначатимемо за формулами

$$\sigma_{\text{с}} = -P / F, \quad \sigma_{\text{зг}} = \pm M_{\text{зг}} / W,$$

а сумарні напруження – за формулою

$$\sigma = \sigma_{\text{с}} + \sigma_{\text{зг}} = -P / F \pm M_{\text{зг}} / W,$$

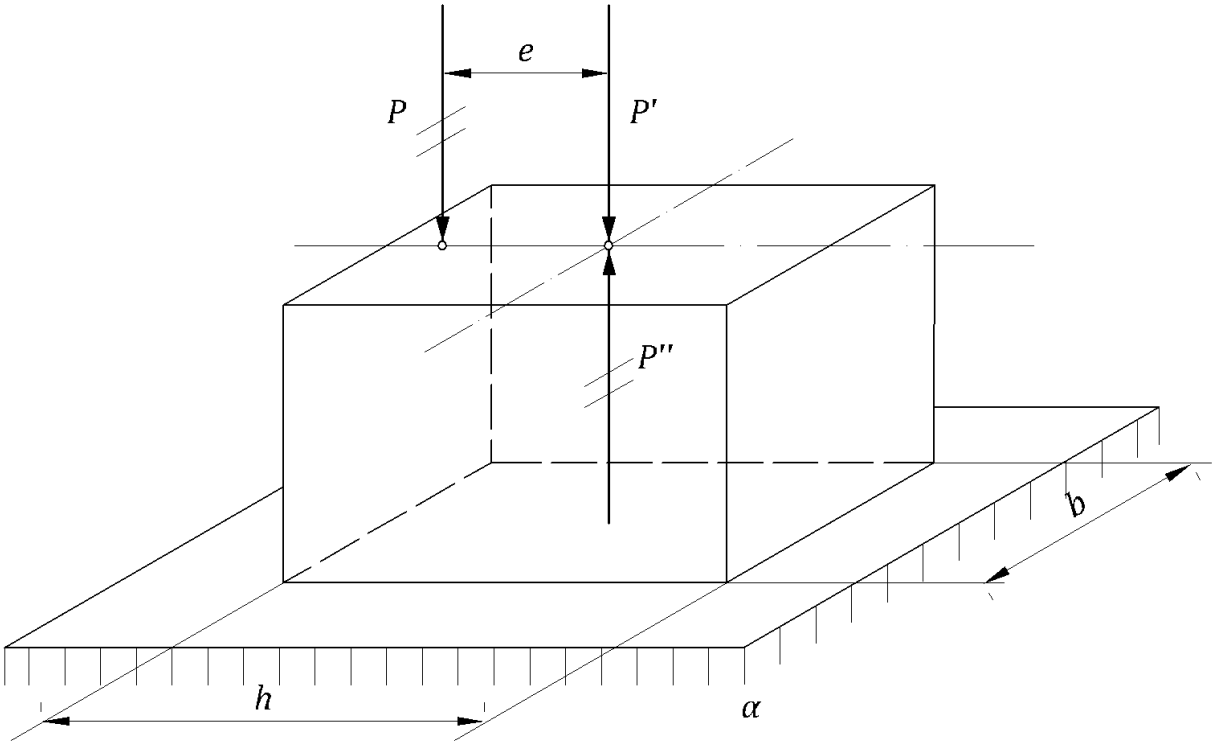


Рис. 13.2. До визначення напружень при позацентровому стиску

Максимальні сумарні напруження будуть напруженнями стиску:

$$\sigma_{\max} = -P / F - P_e / W.$$

Щоб у брусі не виникали напруження розтягу (недопустимі, наприклад, у цегляній або кам’яній кладці), має виконуватися нерівність

$$\sigma_c \geq \sigma_{\text{зг}} \text{ або } \text{, звідки } e \leq W / F.$$

$\sigma \geq [\sigma]$ або $\frac{P}{F} \geq Pe/W$ звідки матимемо: $e \leq W/F$

У випадку позацентрового розтягу використовують такі ж формули, але з урахуванням знаків напружень.

13.3. Згин з крученням

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які звичайно бувають прямими брусами круглого або кільцевого перерізу. Найчастіше елементи, що зазнають згин з крученням, зустрічаються в будівництві. Це крайні балки каркасів будівель, багато деталей машин працюють на згин з крученням.

Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки крутний і згинаючий моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

Максимальні нормальні і дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами

$$\sigma = M_{zg}/W \quad \tau = M_t/W_t$$

причому для круглих валів $W_t = 2W$.

У випадку одночасного згину і кручення небезпечними будуть точки небезпечного поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності, дістанемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(M_{зг}/W)^2 + 4(M_W/W_p)^2} =$$
$$= \sqrt{(M_{зг}/W)^2 + 4[M_s/(2W)]^2} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_к^2}/W \ .$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом.

$$M_{екв} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_к^2},$$

тоді розрахункова формула для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{екв} = M_{екв}/W \leq [\sigma]$$

Металеві вали звичайно виготовляють з матеріалу, в якого напруження:

$$[\sigma_р] = [\sigma_с] = -[\sigma]$$

За цією формулою круглі вали розраховують як на згин, але не за згинаючим, а за еквівалентним моментом.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(M_{зг} / W)^2 + 3\left[M_к / (2W)\right]^2} = \sqrt{M_{зг}^2 + /0,75M_к^2 / W},$$

тобто за енергетичною теорією міцності

$$M_{екв} = \sqrt{M_{зг}^2 + 0.75M_к^2}.$$

13.4. Кручення з розтягом або стиском

Одночасних деформацій кручення і розтягу зазнають, наприклад, болти і кріпильні гвинти, а деформацій кручення і стиску – гвинти домкратів і гвинтових пресів, свердла і шпинделі свердлильних верстатів. Ці деталі звичайно виготовляють з матеріалів, для яких $[\sigma_р] = [\sigma_с] = -[\sigma]$.

Нормальні і максимальні дотичні напруження в цих випадках обчислюють за формулами

$$\sigma = N / F, \quad \tau = M_К / W_Р.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{екв} = \sqrt{(N / F)^2 + 4(M_N / W_р)^2} \le [\sigma].$$

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{екв} = \sqrt{(N / F)^2 + 43(M_N / W_р)^2} \le [\sigma].$$

13.5. Деформації при крученні та крученні зі згином

Вище було показано, як розраховувати елементи, що зазнають кручення зі згином, на міцність. Однак, в розрахунках машинобудування, будівництва часто вельми важливим є розрахунок деформативності елементів, що зазнають кручення. Для елементів з сталі, дерева, інших матеріалів, які при нормативних навантаженнях працюють практично пружно, кути повороту визначаються за

формулами, що наведені в п. 11.3-11.4. Однак для елементів, що працюють з тріщинами (як правило це композитні елементи, так, як залізобетон тощо) формули визначення переміщень і кутів повороту суцільних матеріалів не придатні. Для таких елементів існують різні наближені, а також експериментально-теоретичні методи розрахунку. Так, наприклад, залізобетонний елемент з тріщинами розраховують методом представлення прямокутного перерізу коробчастим (див. рис. 11.9). Ця методика, яка включає в себе і експериментальні, і теоретичні дослідження [Мак-Грегор] доволі непогано визначає кути повороту залізобетонних елементів з тріщинами. Але і ця методика теж має свої недоліки. При роботі на згин з крученням в залізобетонних елементах в основному виникають тільки нормальні тріщини. Аналогія коробчастого перерізу (див. рис. 11.9) в таких випадках не може бути прийнята тому, що за наявності нормальної тріщини дотичні напруження по периметру коробчастого перерізу не можуть бути так розподілені.

Для розрахунку таких елементів при крученні застосовують інженерну методику визначення жорсткості і кутів закручування [Наші статті]. На рис. 13.3 показаний поперечний переріз залізобетонного елемента з нормальною тріщиною.

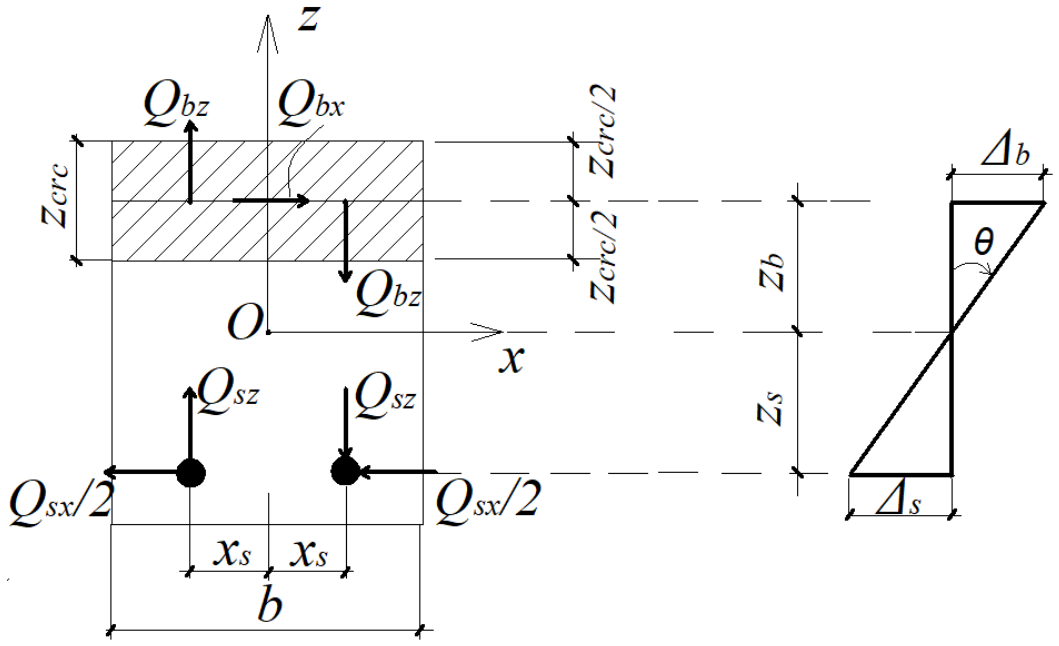


Рис. 13.3. До визначення крутильної жорсткості прямокутного елемента з тріщиною

Заштрихована частина на рис. 13.3 – це частина бетону, що залишилася (нижня частина перерізу – це нормальна тріщина) висоту Zcrc називають висотою стиснутої зони. Зовнішній крутний момент сприймають пари сил Qsz-Qbz та Qbx-Qsx.

З врахуванням цих сил повний момент, що сприймається перерізом в тріщині, дорівнює (тут наводимо формулу без виводу):

$$M = \theta\left(GJ_b + 2 \cdot GJ_s + G_b A_{crc} Z_b^2 + 2 \cdot G_b \cdot \sum_{i=1}^{n} A_{b,i} X_i^2 + 2 \cdot G_{s_ekv} k_{nag} A_s (Z_s^2 + + X_s^2) \right)$$

Де прийняті позначення:θ – відносний кут закручування; GJb, GJs – крутильна жорсткість відповідно бетону заштрихованої на рис. 13.3 частини і крутильна жорсткість арматурних стрижнів; $\sum_{i=1}^{n} A_{b,i} X_i^2$ – момент інерції заштрихованої частини відносно центру ваги; останній доданок цього виразу – момент інерції арматурних стрижнів відносно центру ваги.

Таким чином жорсткість елемента з нормальною тріщиною залежить від діаметру та кількості арматури, її розташування в поперечному перерізі, фізико-механічних характеристик бетону та арматури, а також від розмірів поперечного перерізу.

14. Поздовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, тобто така, при якій малим збурюючим діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми.

Навантаження, при яких втрачається стійкість, називають критичними, а відповідні стани – критичними станами. Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок

і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості:

1) виникнення якісно нових форм рівноваги;

2) зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стержня. При невеликих значеннях стискаючої сили прямолінійна форма – єдина і притому стійка форма рівноваги (рис. 14.1, а); малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини. При критичному значенні стискаючої сили $P_{кр}$ прямолінійна форма стає нестійкою і після малих збурень стержень набирає нової (стійкої) форми рівноваги, якій відповідає зігнута вісь (рис. 14.1,б).

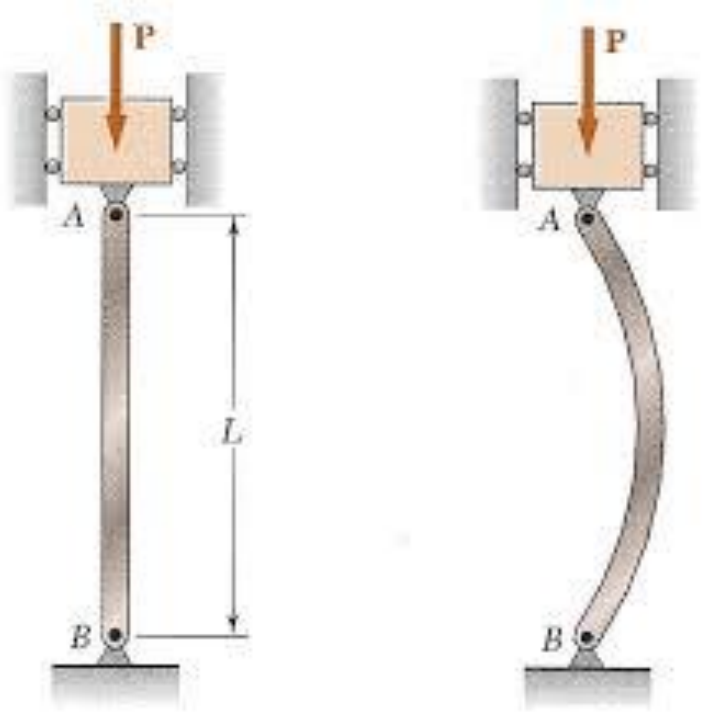


Рис. 14.1. Схема втрати стійкості стиснутого стрижня

Критичною силою називається найбільше значення стискаючої сили, прикладеної центрально, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня є стійкою.

Згин, пов’язаний з втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається поздовжнім згином.

Розглянемо тонкий стальний стержень, довжина якого значно більша за поперечні розміри, що стискається силою P , трохи більшою за $P_{кр}$ (рис.14.2). Застосовуючи метод перерізів, упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори – поздовжня сила N=P і згинаючий момент $M_{зг}$· Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску і поперечного згину.

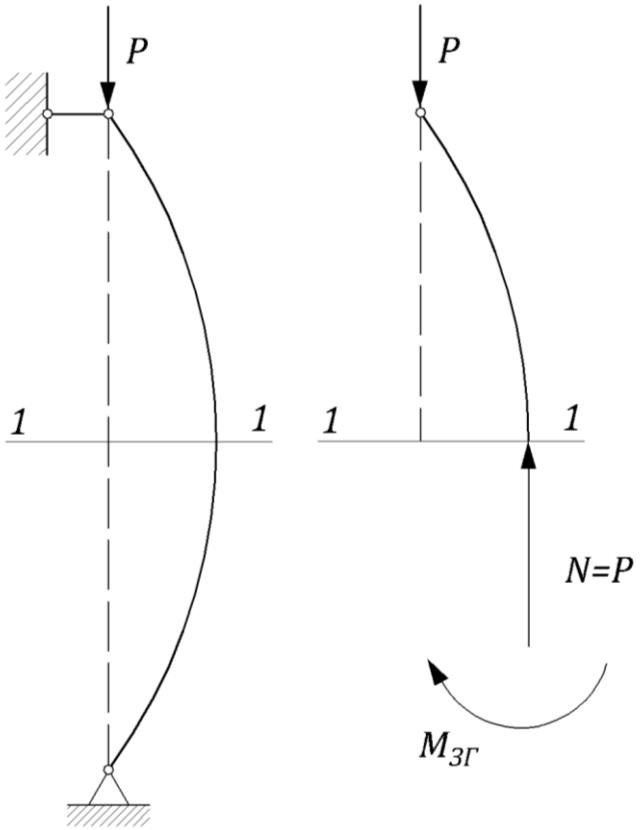


Рис. 14.2. Розрахункова схема для поздовжнього згину

Якщо стискаючі сили хоч трохи перевищують критичне значення, то додаткові напруження згину досягають досить значних величин і безпосередньо загрожують міцності конструкції. Тому критичний стан, який безпосередньо передує руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв’язку з цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції і дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила P , яка діє на стержень, була менша за критичну $P_{кр}$· Позначимо допустиму стискаючу силу [P], тоді:

$$[P] = P_{кр} / [n_{ст}],$$

де $n_{ст}$ – допустимий коефіцієнт запасу стійкості. Очевидно, що стійкість стержня достатня, якщо $[n_{ст}] > 1$. Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно для сталей $[n_{ст}] = 1,8 \div 3$; для чавунів $[n_{ст}] = 5 \div 5,5$; для дерева $[n_{ст}] = 2,8 \div 3,2$.

Для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили $P_{кр}$.

Вперше стійкість стиснених стержнів дослідив швейцарець Леонард Ейлер (1707 – 1783). Л.Ейлер вивів формулу для визначення величини критичної сили $P_{кр}$. Наведемо формулу Ейлера без виведення:

$$P_{кр} = \pi^2 E J_{min} / l_{зв}^2.$$

Тут Е – модуль пружності першого роду; J_{min} – найменший з осьових моментів інерції перерізу, оскільки стержень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку; $l_{зв}$ – зведена довжина стержня:

$$l_{зв} = \mu l,$$

де l – довжина стержня, а μ – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стержня; його інакше називають коефіцієнтом кріплення.

14.1. Розрахунки на стійкість

Залежно від мети розрізнюють три види розрахунків на стійкість;

1) перевірний розрахунок, коли визначають коефіцієнт запасу стійкості $n_{ст}$ і порівнюють знайдене значення з допустимим $[n_{ст}]$:

$$n_{ст} = P_{кр} / P \geq [n_{ст}],$$

Де P – діюче навантаження;

2) визначення допустимого навантаження [P]:

$$[P] = P_{\text{кр}} / [n_{\text{ст}}];$$

3) проектний розрахунок, коли визначають потрібне значення мінімального моменту інерції поперечного перерізу стержня:

$$J_{\min} \geq P[n_{\text{ст}}](\mu l)^2 / (\pi^2 E),$$

після чого знаходять гнучкість і порівнюють з граничною.

Розрахунок стиснених стержнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи будівельні конструкції, часто застосовують таку формулу:

$$[P] = \varphi[\sigma_{\text{ск}}]F.$$

Тут $[\sigma_{\text{ск}}]$ – основне допустиме напруження на стиск, а φ – коефіцієнт поздовжнього згину. Величина φ залежить від гнучкості стержня, його матеріалу; її визначають для сталей з таблиць, наведених в довідниках і нормативних документах [ДБН_метал].

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стержнів на стиск є кільцеві і коробчасті тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стержнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стержнями дає економію матеріалу до 20–40 %.

15. Статично невизначені задачі опору матеріалів

15.1. Основні понятті розрахунку статично невизначених систем

Усі попередні задачі можна було вирішувати за допомогою рівнянь рівноваги. Для визначення внутрішніх зусиль було достатньо скласти умови рівноваги і з цих рівнянь визначити величини згинальних, крутних моментів, поперечних сил, а потім і напружень. Але більшість задач механіки мають такі схеми, де для визначення внутрішніх зусиль недостатньо рівнянь рівноваги. При цьому виявляється, що, наприклад, кількість невідомих опорних реакції значно більше, ніж рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи.

Такі задачі називають статично невизначеними, тобто задачі, в яких недостатньо тільки статичних рівнянь рівноваги.

Найпростіший приклад статично невизначеної балки приведено на рис. 15.1.

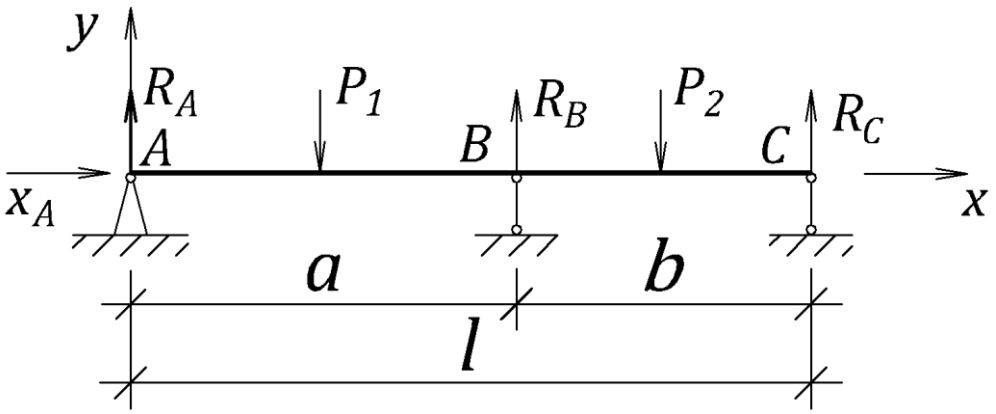


Рис. 15.1. Один раз статично невизначена балка

Це двох прольотна балка, яка має одну шарнірно нерухому і дві шарнірно рухомі опори. Всього невідомих реакцій чотири: X_A, R_A, R_B та R_C (Сили P_1 та P_2 – це задане зовнішнє навантаження). А рівнянь рівноваги можна скласти лише три (див. розділ 1). Це рівняння проекцій на вісь X, рівняння проекцій на вісь Y і рівняння моментів відносно однієї з опор.

З курсу математики відомо, що для визначення чотирьох невідомих треба скласти чотири рівняння, скласти систему. В результаті рішення цієї системи будуть визначені чотири невідомих (в нашому випадку значення чотирьох реакцій). Тому треба скласти ще одне рівняння, щоб мати можливість визначити всі реакції.

Балка, показана на рис. 15.1 називається один раз статично невизначеною, одна в’язь є «зайвою», а зусилля в неї називається «зайвим зусиллям». За числом зайвих в’язів невідомих зусиль установлюють ступінь статичної невизначеності системи.

Статична невизначеність може бути наслідком не тільки введення додаткових зовнішніх в’язів (як на рис 15.1), а й умов утворення системи. Так, наприклад, якщо б ліва опора А на цьому рисунку була не шарнірною, а

затисненою, то на цій опорі було б три невідомих реакцій: X_A, R_A і момент M_A і вся система була б два рази статично невизначеною системою.

Сучасні програмні комплекси (наприклад, комплекс українського виробництва «LIRA-SAPR») можуть розраховувати системи, в яких десятки і навіть сотні тисяч невідомих. Це може бути багатоповерхова будівля, сучасний міст, складна деталь автомобіля або автомобіль в цілому тощо.

Для визначення невідомих в статично невизначених стержневих системах існує метод сил, метод переміщень та змішаний метод. Окрім того існують чисельні методи: метод скінчених елементів (МСЕ) [Зенкевич-англ,], метод граничних елементів, різні чисельно-аналітичні методи [Азіз-Докт]. Ці методи вивчаються в спеціальних курсах. Тут ми розглянемо основи методу сил, як методу, який найбільш зустрічається при розрахунках стрижневих та балкових систем.

Метод сил полягає в тому, що задана статично невизначена система звільняється від зайвих в'язів, а їх дія замінюється силами і моментами. Величина цих сил і моментів в подальшому підбирається так, щоб переміщення відповідали тим обмеженням, які накладаються на систему з відкинутми в'язями.

Таким чином , при вказаному способі рішення невідомими виявляються сили. Звідси і назва «метод сил». На відміну від методу сил в методі переміщень за невідомі величини приймаються не сили, а переміщення.

Так, для визначення реакцій в балці по рис. 15.1 слід відкинути одну в'язь (наприклад, в'язь В), замінити дію цієї в'язі невідомою силою y_B (рис.15.2).

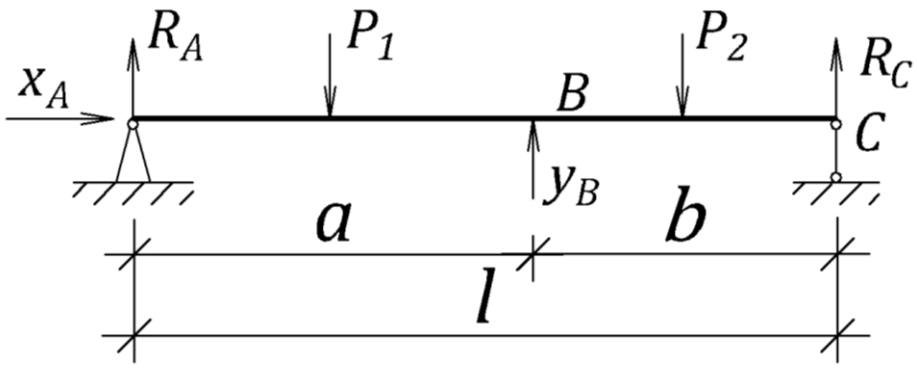


Рис. 15.2. Основна схема методу сил

Система, показана на рис. 15.2 називається основною системою методу сил. Ця система вже є статично визначеною і реакції X_A, R_A і R_C можуть бути визначені (умовно вважаємо, що невідома сила y_B є відомою). Визначивши з умов рівноваги реакції X_A, R_A і R_C, за відомим методом опору матеріалів визначаємо переміщення в точці В. Це переміщення буде функцією реакцій відстаней a та b, координат місць розташування сил P_1, P_2 та їх величин, згинальної жорсткості балки EI, а також величини y_B. Зважаючи на те, що сили P_1, P_2, розміри і жорсткість балки задані по умовам задачі, невідомою величиною в цьому виразі буде лише y_A. Далі слід прирівняти цей вираз нулю і ми складемо одне рівняння з одним невідомим, в результаті рішення якого отримаємо значення невідомої сили y_A. Прирівнювання цього виразу нулю означає, що насправді в точці В не може бути ніякого переміщення, бо там стоїть нерухома опора, яка не дозволяє точці В переміщатись по вертикалі.

При будь якої кількості зайвих невідомих задача методу сил вирішується аналогічно. Тобто відкидаються всі зайві в’язі, складаються вирази для визначення переміщень по напрямку дії відкиданих в’язей і складається система рівнянь для визначення невідомих сил. Нижче наведено авторський метод розрахунку складеної двошарової балки чисельно-аналітичним методом сил.

15.2. Розрахунок складених балок чисельно-аналітичним методом сил

Застосування чисельно-аналітичного методу сил розглянемо на прикладі методики авторів для розрахунку двошарової складеної балки. Складеною балкою називають балку, що складається з двох балок, зв’язаних між собою в’язями. Це може бути металева балка, скріплена болтами, дерев’яна балка з дерев’яними шпонками або металевими гвинтами, балка, зв’язана накладками тощо. Передумовою великого розповсюдження металевих складених стрижнів є обмеження сортаменту метала, яка викликає необхідність з’єднання декількох елементів для отримання більш потужних та вигідних перерізів.

Якщо складений стрижень працює на згин, то його називають складеною балкою.

На рис. 15.3 показана дерев’яна складена балка, окремі балки якої (верхня і нижня балки) з’єднуються різними типами в’язей; похилі дерев’яні шпонки; горизонтальні дерев’яні шпонки; вбудовані клини.

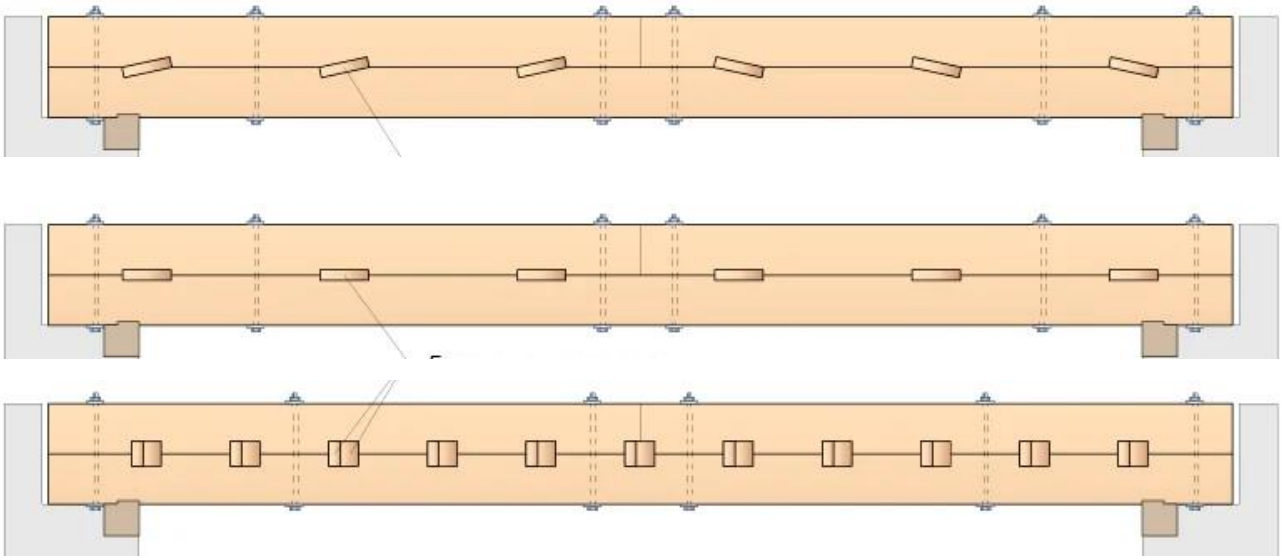


Рис. 15.3. Дерев’яна складена балка

Якщо в прокатній двотавровій балці вирізати отвори (рис. 15.4), то її розрахунок теж слід поводити як складеної балки.

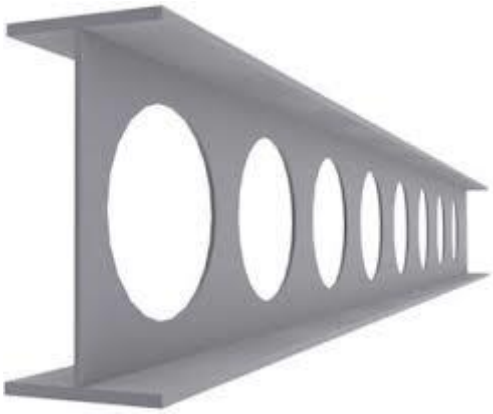


Рис. 15.4. Прокатна балка з вирізаними отворами

Приклад застосування складених балок в покритті будівлі наведено на рис. 15.5.



Рис. 15.5. Приклад використання металевих перфорованих балок

Вище було показано, що момент інерції при згині залежить від ширини перерізу в першому степені, а від висоти – в третьому. Тому, наприклад, при застосуванні дерев'яних балок якщо треба збільшити жорсткість слід збільшувати не ширину, а висоту перерізу. Якщо дві дерев'яні балки однакової висоти h покласти одну на одну без влаштування в'язів, то їх сумарна жорсткість просто подвоїться також, як би ці балки положили рядом. А якщо об'єднати їх в'язями, то їх жорсткість збільшиться в вісім разів. Але це за умови, що в'язі, які скріплюють балки є абсолютно жорсткими. Якщо в'язі мають якусь кінцеву жорсткість, то нижня грань верхньої балки буде зсуватися відносно верхньої грані нижньої балки (рис. 15.6).

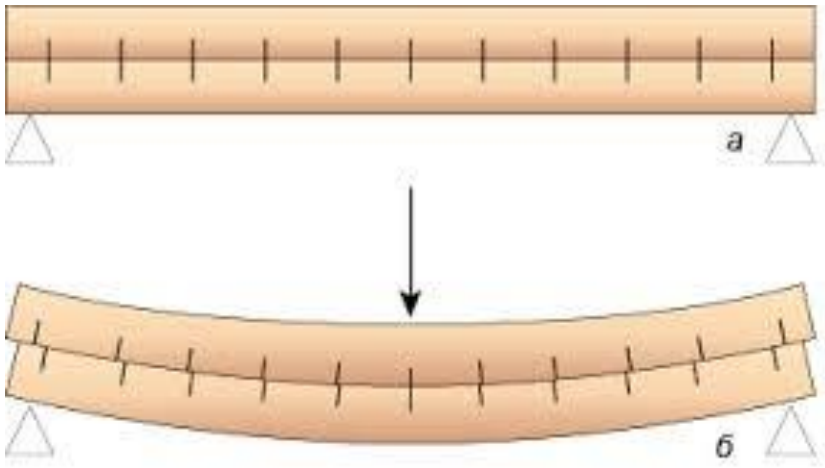


Рис. 15.6. Деформація в'язів в дерев'яній складеній балці

Але цей зсув все одно буде меншим, ніж покладені одна на одну балки без в'язей.

Таким чином деформації складеної балки є проміжними між монолітною і балкою без в'язів. Тому розрахунок складених балок проводять з врахуванням піддатливості в'язей, не залежно з якого матеріалу зроблена балка і з якого в1язі.

Для розрахунку складеної балки застосуємо метод сил у вигляді, запропонованому в [Азіз-докт]. В загальному випадку між двома балками з'являються дотичні сили T=T(x) і вертикальні сили S=S(x), де x – координата вздовж складеної балки (рис. 15.7).

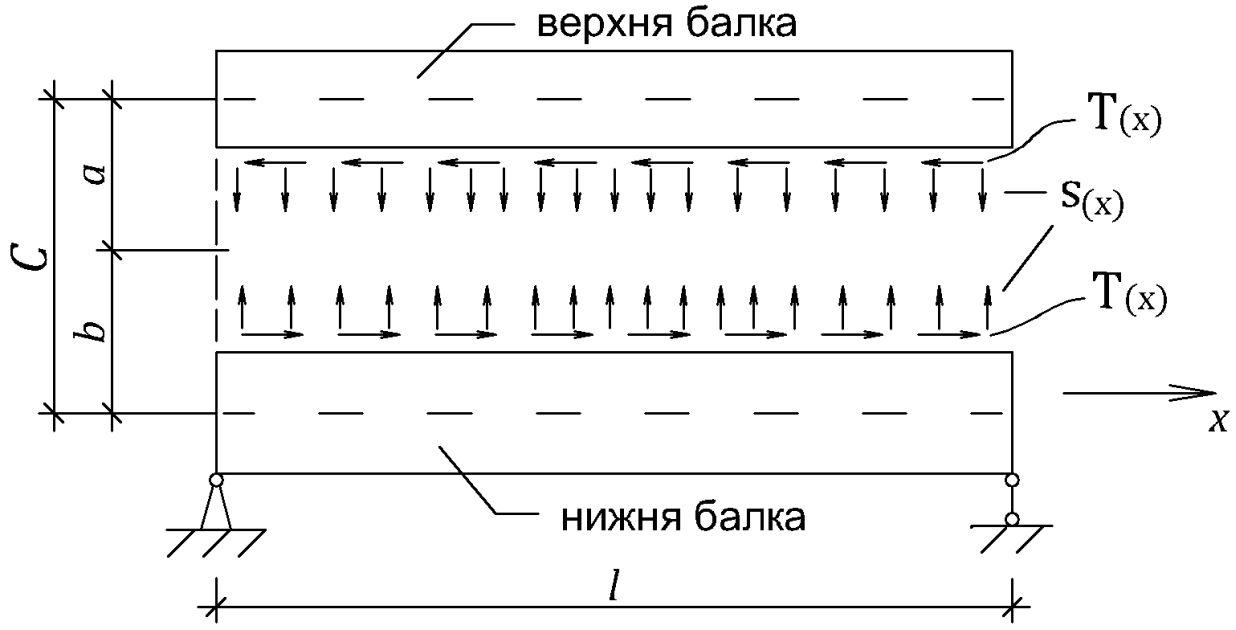


Рис. 15.7. Зусилля в складеному стрижні

В більшості випадків вертикальні зусилля S можна не враховувати, а визначати тільки дотичні зусилля. В такому випадку в [Азіз-докт] розглянуте диференціальне рівняння, отримане в [ТСС_Ржан] для визначення дотичних сил T між двома балками:

$$\frac{T^{II}}{\xi} = \gamma \cdot T + \Delta, \qquad (15.1)$$

де T=T(x) – сумарні зсуваючи зусилля між двома балками, пов'язані з погонними зсуваючими зусиллями τ(x) залежністю

$$T(x) = \int_0^x \tau(\xi) d \cdot \xi ;$$

$$\Delta = \frac{\boldsymbol{C}}{\sum \boldsymbol{EI}} \boldsymbol{M^0}$$

C – відстань між центрами ваги двох балок по висоті перерізу;

$\sum EI = EI_1 + EI_2$ – сума згинальної жорсткості верхнього та нижнього стрижня (балки)

M^0 – сумарний згинальний момент системи, який дорівнює сумі згинальних моменті в перерізі кожної балки;

$\gamma = \frac{1}{EF_1} + \frac{1}{EF_2} + \frac{C^2}{\Sigma EJ}$ - параметр, який залежить від осьових та згинальних жорсткостей балок;

ξ – коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву, який визначається в кожному окремому випадку. Так, наприклад, для складеної балки, яка зроблена за допомогою заклепок, коефіцієнт в'язей зсуву визначається за формулою:

$$\boldsymbol{\xi = E_z \pi d^2 n / (4ce)}$$

де E_z - модуль пружності заклепочного з'єднання, який згідно з експериментальними даними [методичка ТСС-Азіз] складає 100-120 Н/см^2;

d – діаметр заклепок; e – крок розташування заклепок; n – кількість рядів заклепок по ширині балки; C – відстань між центрами ваги двох балок по висоті перерізу.

Якщо складена балка зроблена за допомогою поперечних планок (рис. 15.8), то коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву ξ визначається за формулою (в разі рівної жорсткості верхньої та нижньої балок):

$$\boldsymbol{\xi = \frac{24E}{BC^2 \left(\frac{2C}{J_p} + B/J_s \right)}}$$

де B – відстань між планками; J_p, J_s – відповідно момент інерції планок та балок.

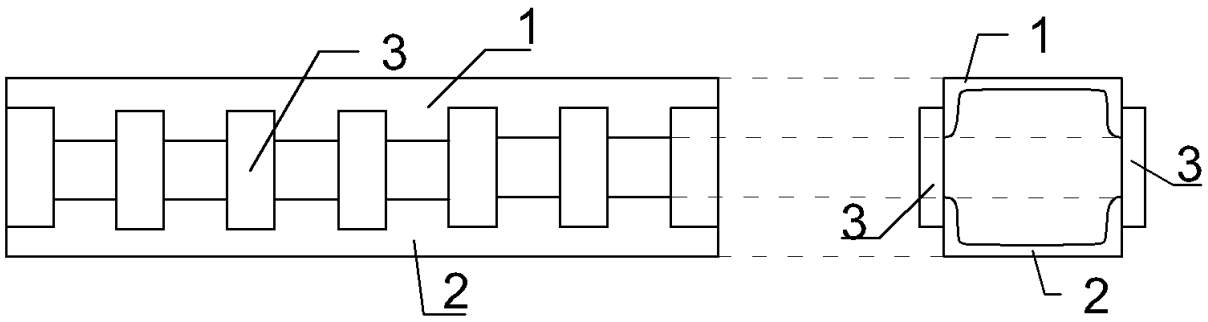


Рис. 15.8. Металева складена балка. 1, 2 – прокатний швелер; 3 – з'єднувальні планки (в'язі) з листового металу

В [ТСС_Ржан] наведено рішення рівняння (15.1) у вигляді гіперболічних функцій. Це при чисельній реалізації може призвести до помилок, тому що значення гіперболічного синуса і косинуса може бути багато розрядним числом. Крім того, якщо складена балка складається з трьох і більше балок, то замкнене рішення не можливе. Тому краще прийняти рішення з застосуванням тригонометричних рядів Фур'є [Азіз-докт].

У випадку, коли зсуву торців складових балок одна відносно другої ніщо не опирається (більшість практичних випадків, в т. ч за рис. 15.3. 15.4, 15.8), граничні умови для T(x) будуть мати вид T(0)=T(L)=0. Тоді рішення рівняння (15.1) буде мати вигляд:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot Sin(\alpha \cdot x)$$

де α=π·n/L; Tn – коефіцієнт Фур'є, який підлягає визначенню.

Підставляючи вираз для T(x) в (15.1), отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів Фур'є, рішення якого дає значення:

$$T_n = -M_n \cdot \frac{C}{\Sigma EJ} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \xi \cdot \gamma)}$$

Величину T_n слід визначити m разів, де m – верхня межа сумування виразу для T(x). Цей ряд доволі швидко збігається і часто достатньо 3-5 членів, щоб отримати достатню точність.

У випадку, коли складена балка опирається з так званою підрізкою (рис. 15.9), слід визначати не тільки дотичні сили між двома балками, а й вертикальні (див. рис.15.7).

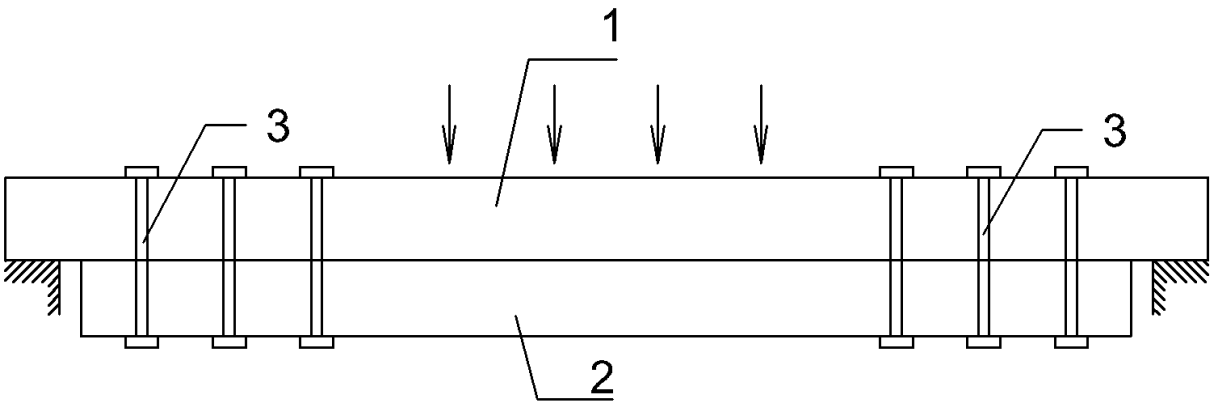


Рис. 15.9. Балка з підрізкою. 1, 2 – верхня та нижня дерев'яна балки; 3 болти (в'язі), що з'єднають балки в єдине ціле

В цьому випадку слід використовувати систему диференціальних рівнянь. Застосувавши такій же самий підхід з використанням розкладення в ряди Фур'є, отримаємо вирази для визначення невідомих (приводимо тут без виводу, який наведено в [Азіз-докт]):

$$T_n\left[-\alpha^6-\xi\cdot g\alpha^4-k\eta\alpha^2+\xi\eta\left(i^2-gk\right)\right]=B_1M_{1,n}+B_2M_{2,n}$$

$$S_n=-T_n\left(\alpha^4/\xi/i+g\alpha^2/i\right)-\left(2/l/\alpha/i\right)\left(q_1a/EJ_1+q_2b/EJ_2\right)\left[(-1)^n-1\right]$$

де позначено:

$$B_1=-\left(\xi\eta\cdot i+\xi\eta ka\right)/EJ_1$$

$$B_2=\left(\xi\eta\cdot i-\xi\eta kb\right)/EJ_2$$

G, I, k – параметри, що залежать від жорсткісних характеристик верхнього і нижнього стрижня;

η– коефіцієнт жорсткості вертикальних в'язей

Після визначення невідомих T_n і S_n дотичні сили T(x) і вертикальні сили S(x) визначаємо за формулами:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot Sin(\alpha \cdot x)$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot Sin(\alpha \cdot x)$$

За цими формулами доволі легко визначити зусилля, склавши програму в Excel, де варіюванням верхньої межі суми можна визначити скільки членів цих рядів достатньо для отримання потрібної точності.

Врахування вертикальних сил є доволі важливим. Так, наприклад, в схемі балки з підрізкою (див. рис. 15.9) біля опори з'являються великі розтягуючи зусилля, які можуть відірвати нижню балку від верхньої, що порушить їх сумісну роботу і призведе до повного руйнування.

Епюра вертикальних зусиль на рівні підрізки показана на рис. 15.10.

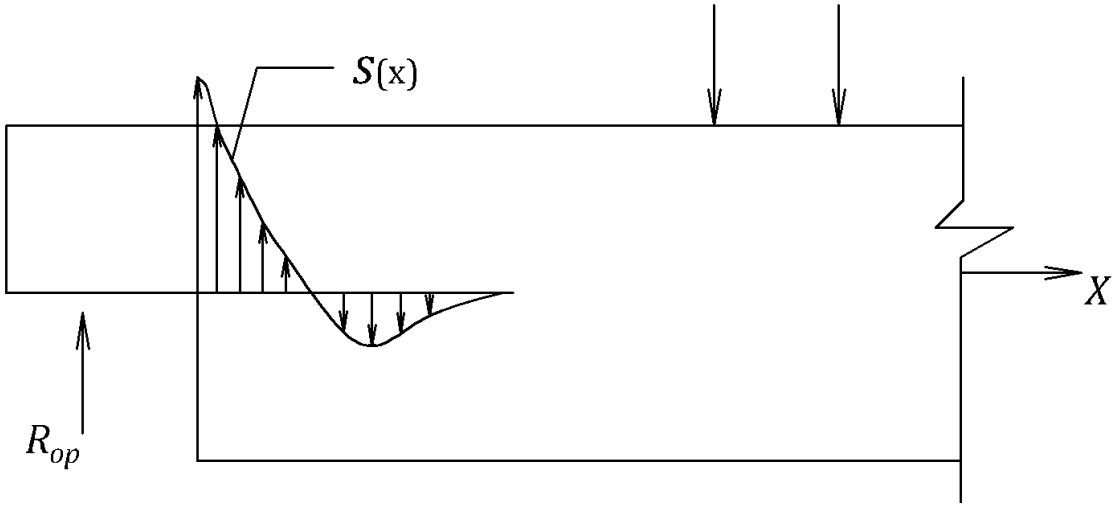


Рис. 15.10. Епюра вертикальних зусиль в підрізці

З рисунка видно, що біля опори з'являються розтягуючи вертикальні зусилля, які намагаються відірвати нижню частину складеної балки від верхньої. Тому для запобігання цього в балках встановлюють болти або інші в'язі, які здатні сприймати ці зусилля (лив. Рис. 15.9).