№ 6(47) 2025
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
серії: право, економіка, педагогіка, техніка, фізико-математичні науки

УДК 53.02:531.51:524.8

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-6(47)-1241-1258

Ільніцька Катерина Сергіївна кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, м. Умань, тел.: +380962935022, https://orcid.org/0000-0002-6179-5543

Решітник Юлія Володимирівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, м. Умань, тел.: +380971613746, https://orcid.org/0000-0002-7937-2880

ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ І ПРОЦЕСИ ЕВОЛЮЦІЇ КОСМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Анотація. У статті йде мова про роль і місце результатів наукових спостережень, виконаних методами традиційної наземної оптичної астрономії та астрофізичних досліджень, здійснених за межами атмосфери Землі, у формуванні сучасних уявлень про походження, структуру і еволюцію космічних об'єктів, зокрема зірок. Звертається увага на те, що еволюція космічних об'єктів супроводжується надзвичайно бурхливими процесами, під час перебігу яких виділяються гігантські кількості енергії. Деякі астрономічні об'єкти випромінюють енергію протягом багатьох мільйонів років, активність же інших триває кілька секунд, що кардинально змінює їхню структуру і фізичні характеристики.

Серед інших фундаментальних взаємодій між об'єктами матеріального світу, у статті основна увага приділяється гравітаційній взаємодії, тому що саме у природі і властивостях тяжіння криється «ключ» до розгадки таємниць грандіозних космічних процесів, у ході яких саме й виділяються ці гігантські кількості енергії та відбуваються перетворення небесних тіл у якісному і кількісному їх вимірах.

В окремих частинах статті порівнюються основні положення ньютонівської і ейнштейнівської теорій гравітації.

Це пов'язано з тим, що внаслідок багатьох бурхливих процесів, які відбуваються у Всесвіті, ймовірно, формуються «чорні діри» – об'єкти, що передбачаються як теорією всесвітнього тяжіння Ньютона, так і загальною теорією відносності Ейнштейна.

Після короткого опису загальновідомих властивостей тяжіння, основний зміст статті складають явища колапсу космічних об’єктів і виникнення чорних дір. Наводяться приклади, як спеціалісти із загальної теорії відносності розробляють моделі цих «таємничих» об’єктів, а астрофізики «шукають» у чорних дірах вихід із тих труднощів, які виникають у них за спроб побудувати теорії процесів, що відбуваються у глибинах Всесвіту. Зокрема, на якісному і кількісному рівнях обґрунтовується поняття гравітаційної енергії зв’язку масивних тіл; механізму виникнення внутрішнього тиску в зорях, який протидіє їх гравітаційному стисненню та забезпечує їм певну динамічну стійкість; розглядаються можливості моделювання явища колапсу астрономічних об’єктів сферично-симетричної і «майже» сферично-симетричної форми; використання аналізу величини червоного зміщення спектральних ліній у спектрах віддалених об’єктів Всесвіту, як одного з методів вивчення механізмів їх еволюції.

Ключові слова: теорія відносності, гравітація, енергія, космічний об’єкт, червоне зміщення, колапс, чорна діра.

Ilnitska Kateryna Serhiivna PhD in Pedagogy, Associate Professor, Associate Professor at the Physics and Natural Sciences Integrative Learning Technologies Department of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, tel. +380962935022, https://orcid.org/0000-0002-6179-5543.

Reshitnyk Yuliia Volodymyrivna PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Physics and Natural Sciences Integrative Learning Technologies Department of the Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, tel. +380971613746, https://orcid.org/0000-0002-7937-2880.

THEORY OF RELATIVITY AND THE EVOLUTION PROCESSES OF SPACE OBJECTS

Abstract. The article discusses the role and place of the results of scientific observations made by methods of traditional ground-based optical astronomy and astrophysical research carried out outside the Earth's atmosphere in the formation of modern ideas about the origin, structure and evolution of space objects, in particular stars. Attention is drawn to the fact that the evolution of space objects is accompanied by extremely turbulent processes, during the course of which gigantic amounts of energy are released. Some astronomical objects radiate energy for many millions of years, while the activity of others lasts for a few seconds, which radically changes their structure and physical characteristics.

Among other fundamental interactions between the objects of the material world, the article focuses on gravitational interaction, because it is precisely in the nature and properties of gravity that the "key" to unraveling the secrets of grandiose cosmic processes lies, during which these gigantic amounts of energy are released and transformations of celestial bodies in their qualitative and quantitative dimensions take place.

In some parts of the article, the main provisions of Newtonian and Einsteinian theories of gravity are compared. This is due to the fact that as a result of many turbulent processes occurring in the Universe, “black holes” are likely formed – objects predicted by both Newton’s law of universal gravitation and Einstein’s general theory of relativity.

After a brief description of the well-known properties of gravity, the main content of the article is the phenomena of the collapse of cosmic objects and the emergence of black holes. Examples are given of how specialists in the general theory of relativity develop models of these "mysterious" objects, and in black holes astrophysicists "look" for a way out of the difficulties they encounter when trying to build theories of processes occurring in the depths of the Universe. In particular, the concept of the gravitational binding energy of massive bodies, the mechanism of the emergence of internal pressure in stars, which counteracts their gravitational compression and provides them with a certain dynamic stability, is substantiated at the qualitative and quantitative levels, the possibilities of modeling the phenomenon of the collapse of astronomical objects of spherically symmetric and "almost" spherically symmetric shapes are considered; the use of analysis of the magnitude of the redshift of spectral lines in the spectra of distant objects in the Universe as one of the methods for studying the mechanisms of their evolution is considered.

Keywords: theory of relativity, gravitation, energy, space object, redshift, collapse, black hole.

Постановка проблеми. Одним з основних досягнень спеціальної теорії відносності було встановлення того факту, що у природі існує певна фундаментальна межа швидкості, яку не може перевищити жодна частинка, жодне фізичне збурення, які поширюються (рухаються) від точки до точки у просторі [7]. З цією граничною швидкістю поширюються у вакуумі світло і будь-яке інше електромагнітне збурення, що має характер хвилі. Швидкість світла відіграє важливу роль за порівняння результатів просторово-часових вимірювань різними *інерціальними спостерігачами* (спостерігачами, які рухаються вільно, без впливу на них зовнішніх сил).

Швидкість же поширення гравітаційної взаємодії, у рамках ньютонівської теорії тяжіння, очевидним чином перевершувала світловий бар’єр: передбачалося, що дія тяжіння передається на великі астрономічні відстані *миттєво*.

Виникла необхідність так видозмінити теорію Ньютона, щоб її можна було узгодити з фактом граничної швидкості світла, як того вимагає спеціальна теорія відносності.

Але тяжіння виявилося явищем такого роду, що воно взагалі не дозволяє ввести поняття інерціальних спостерігачів, адже сила тяжіння проникає всюди, і жоден спостерігач не захищений від її впливу. Будь-які (два) спостерігачі на поверхні Землі зазнають дії сили тяжіння. Дію цієї сили можна послабити, віддаляючись все далі від Землі, але ніколи не можна звести її дію до нуля. Це ж стосується тяжіння й інших космічних об'єктів.

Ейнштейн дав оригінальне і глибоке пояснення цій властивості тяжіння. Усвідомивши, що тяжіння нерозривно пов'язане з простором, він припустив, що воно у дійсності й описує деякі внутрішні властивості самого простору-часу, а саме – його геометрію [8].

Розгляд властивостей тяжіння у неевклідовій геометрії простору-часу є однією з основних проблем загальної теорії відносності, фрагменти якісного опису якої у застосуванні до еволюції космічних об'єктів й складають *проблематику* пропонованої статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основи загальної теорії відносності (ЗТВ) (або релятивістської теорії тяжіння) були сформульовані А.Ейнштейном у його працях, опублікованих, в основному, у період з 1907 по 1920 роки після створення спеціальної теорії відносності (СТВ) у 1905-1907 роках. У подальшому до її математичної інтерпретації у неевклідовій геометрії простору-часу (Ейнштейн обрав геометрію Рімана) долучилася низка й інших учених (Г. Мінковський, К. Шварцшильд, С. Чандрасекар, С. Гокінг, Р. Пенроуз та ін.).

ЗТВ виявила універсальність явища тяжіння, яке притаманне об'єктам як мікро-, так і макро-, і мегамасштабів. Це, у свою чергу, стимулювало, з одного боку, розвиток астрофізичних досліджень еволюції комічних об'єктів [2], їх колапсу та утворення чорних дір [9]; з іншого боку – стало поштовхом до створення теорії «Великого об'єднання» – об'єднання всіх чотирьох фундаментальних взаємодій включно з гравітаційною [4]. Остання до цього часу залишається глобальною фундаментальною проблемою астрофізиків і космологів світової наукової спільноти [10].

Розробці порівняно сучасних фізичних теорій і моделей колапсуючих космічних об'єктів і утворення чорних дір присвячено низку робіт Р. Прайса [13; 14], а також їх *математичних* моделей у згадуваних працях С. Чандрасекара [6], С. Гокінга [1], Р. Пенроуза [12] та ін.

Мета статті передбачає можливість застосування пропонованого методичного підходу до вивчення означених вище проблем (як навчального матеріалу) у загальному курсі фізики.

(Такі підходи стосовно стану розробки теорії «Великого об'єднання» були викладені нами у публікаціях [4; 5]; пропонована ж стаття стосується методики вивчення процесів еволюції космічних об'єктів зоряних масштабів).

Методи дослідження. Аналітичний підхід щодо опрацювання літературних джерел методами системного і порівняльного аналізу наявної у них інформації з метою узагальнення отриманих даних з досліджуваної тематики.

Виклад основного матеріалу. З механіки відомо, що згідно із законом всесвітнього тяжіння сила, з якою Земля притягує тіло, наприклад, масою 1 *кг*, дорівнює

$$F = G\frac{M_3 m}{R_3^2} = 9{,}81\ (H), \qquad (1)$$

де M_3 – маса Землі, $m = 1$ *кг* – маса тіла, R_3 – радіус Землі, G – гравітаційна стала.

Тому робота, яка виконується силою тяжіння над тілом такої маси за його падіння, наприклад, з висоти $h = 10$ *м*, дорівнює:

$$A = F \cdot h = 98{,}1\ (Дж). \qquad (2)$$

(Вважаємо, що на такому короткому шляху $F = const$).

Якщо ж деяка зовнішня сила піднімає тіло з поверхні Землі на висоту 10 *м*, то ця сила повинна виконати точно таку ж роботу: адже у процесі підняття тіла необхідно подолати силу тяжіння. На виконання цієї роботи витрачається певна енергія. Що ж відбулося з енергією у нашому випадку, тобто з тією енергією, яка була затрачена зовнішньою силою на підняття тіла? Закон збереження енергії вимагає, щоб ця витрата енергії була якимось чином компенсована.

Така компенсація дійсно відбувається. Вона полягає у тому, що тіло, яке підняте на певну висоту, набуває у процесі підняття *гравітаційної потенціальної енергії*.

Оцінимо загальний запас енергії Землі, який пов'язаний з її тяжінням, скориставшись попередніми розрахунками роботи, яка виконується за підняття тіла масою 1 *кг* на висоту 10 *м*.

Здійснимо уявний експеримент: визначимо яку роботу необхідно виконати, щоб підняти таку масу *необмежено високо*? З формули для роботи (2) випливає, що коли $h \to \infty$, то й робота буде нескінченно великою. Проте, як не дивно, правильна відповідь буде «скінченною» – робота визначатиметься цілком конкретним значенням.

Нехай сила тяжіння Землі f, що діє на одиничну масу ($m = 1$ *кг*) у *напрямку* до Землі на відстані r від центра Землі, згідно з формулою (1), дорівнює

$$f = G\frac{M_3 m}{r^2}. \quad (3)$$

Робота за підняття одиничної маси на малу висоту dr дорівнює

$$dA = f \cdot dr = G\frac{M_3(1\ кг)}{r^2}dr. \quad (4)$$

А щоб підняти тіло одиничної маси з поверхні Землі, на якій $r = R_3$, на необмежену висоту, необхідно виконати роботу

$$A = \int_{R_3}^{\infty} f dr = \int_{R_3}^{\infty} \frac{GM_3(1\ кг)}{r^2}dr = G\frac{M_3(1\ кг)}{R_3}. \quad (5)$$

Підставивши числові значення величин у (5) в одиницях СІ, отримаємо, що $A \approx 6{,}3 \cdot 10^7\ Дж$. Ця величина слугує мірою гравітаційного поля (його потенціалу) на поверхні Землі.

Величина роботи виявилася кінцевою внаслідок того, що по мірі віддалення від Землі сила її притягання зменшується у відповідності із законом обернених квадратів [3].

Тому з віддаленням від Землі необхідно буде виконувати все меншу роботу на рівних по довжині відрізках шляху. Так, для підняття уверх на чергові $10\ м$ тіла, яке знаходиться на висоті R_3 над поверхнею Землі, знадобиться лише $1/4$ тієї роботи, яка необхідна для підняття на ті ж $10\ м$ тіла, що знаходиться на самій поверхні Землі. На висоті $2R_3$ це відношення зменшується до $1/9$, на висоті $3R_3$ – до $1/16$ і т.д. І якщо скласти ці монотонно зменшувані кількості роботи на всьому шляху до нескінченності, то якраз й отримається наведений вище результат.

А тепер спробуємо відповісти на таке питання: якщо «відривати» від Землі послідовно по «кусочку» її маси і віддаляти ці кусочки з її поверхні на нескінченність до тих пір, аж поки вся Земля таким чином не зникне, то яку загальну роботу за цього нам необхідно буде виконати? Якщо брати кусочки по $1\ кг$, то спочатку, відносячи кожен кусочок необмежено далеко, ми будемо кожен раз виконувати роботу, рівну знайденій вище величині A (5). Але поступово і маса Землі M_3, і радіус її R_3 почнуть зменшуватися.

Тому кінцевий результат буде залежати від того, як змінюється відношення M_3/R_3 по мірі зменшення речовини Землі, тобто зрештою відповідь залежатиме від того, як розподілена речовина по об'єму Землі.

Якщо, наприклад, речовина розподілена *однорідно*, то загальна робота по розділенню Землі (згідно з теорією) обраховується за формулою

$$A_З = \frac{3}{5} G \frac{M_З^2}{R_З}. \qquad (6)$$

Точно невідомо, як розподілена щільність речовини всередині Землі, і тому не можна абсолютно точно обрахувати числовий множник у формулі (6). Коефіцієнт $3/5$, який отриманий за припущення однорідного розподілу густини, не зовсім точний, проте не так і далекий від дійсності. Звичайно, що поки мова йде лише стосовно оцінки *порядку величини*, то формула (6) для $A_З$ дає цілком прийнятну відповідь. Підставивши числові значення у (6), отримуємо: $A_З \approx 2{,}3 \cdot 10^{32}$ *Дж*. Настільки величезне значення $A_З$ наочно показує, яким міцним «вузлом» гравітаційні сили зв'язали воєдино нашу Землю [11, С. 46].

У загальному випадку будь-якого астрономічного об'єкта масою M і радіусом R формула $A = 3/5\left(GM^2/R\right)$ дає порядок величини його *гравітаційної енергії зв'язку*. Для деяких астрономічних об'єктів величину цієї енергії у джоулях подаємо у формі таблиці:

Місяць	$1{,}2 \cdot 10^{29}$
Земля	$2{,}3 \cdot 10^{32}$
Сонце	$2{,}4 \cdot 10^{41}$
Типовий білий карлик	$2{,}4 \cdot 10^{43}$
Типова нейтронна зірка	$1{,}0 \cdot 10^{46}$
Наша Галактика	$5{,}0 \cdot 10^{52}$.

Якщо об'єкт не сферичної форми, то грубу оцінку величини A можна отримати, замінивши R характерним лінійним розміром (як це зроблено у випадку Галактики).

Гравітаційна енергія зв'язку є одним із джерел енергії астрономічних систем. Дійсно, якщо будь-який об'єкт суттєво змінює свою форму або розміри, то змінюється і його гравітаційна енергія зв'язку.

Якщо об'єкт, наприклад, стискається удвічі, то його гравітаційна енергія зв'язку подвоюється.

Це означає, що у процесі стиснення сили тяжіння виконують додатну роботу, за чого частина гравітаційної енергії вивільняється у вигляді енергії інших форм (наприклад, теплоти).

У кінці XIX ст. Кельвіним в Англії і Гельмгольцом у Германії було висунуто гіпотезу, що саме тяжіння слугує джерелом енергії Сонця, підтримуючи його світіння. З наведеної вище таблиці видно, що за весь час стиснення Сонця,

від досить розрідженого стану до нинішнього, загалом виділилося $\sim 2{,}4 \cdot 10^{41}$ *Дж* енергії. Якщо припустити, що світність Сонця у минулому була такою ж як і нині – $4 \cdot 10^{26}$ *Дж*/*с*, то виходить, що Сонце не може існувати довше

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{41}\ Дж}{4 \cdot 10^{26}\ Дж/с} = 6 \cdot 10^{14}\ с \approx 20\ \text{мільйонів років}.$$

Згідно з відомими геологічними даними вік Землі оцінюється приблизно у 4,6 мільярдів років, але ж вона сформувалася після Сонця, а не навпаки. Цей простий підрахунок свідчить, що гіпотеза Кельвіна-Гельмгольца помилкова, тобто, механізм генерування енергії Сонцем має іншу природу.

Покажемо на прикладі Землі, наскільки великою може бути сила тяжіння, що створюється астрономічними об'єктами. Розрахунок з підняття тіла масою 1 *кг* з поверхні Землі на необмежену відстань показав, що для цього необхідно виконати роботу, рівну близько $6{,}3 \cdot 10^7$ *Дж*. Цю роботу можна розглядати й дещо інакше. Припустимо, що деяке тіло кинуте з поверхні Землі вертикально угору з швидкістю υ. Тіло починає підніматися і за цього його швидкість зменшується. Уповільнення відбувається тому, що, піднімаючись, тіло збільшує свою потенціальну енергію у полі сили тяжіння. Збільшення енергії відбувається за рахунок роботи, яку виконує тіло проти сили тяжіння, і цю роботу необхідно відняти від початкового запасу енергії тіла. Цей запас складала початкова кінетична енергія тіла

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (7)$$

Тож з підняттям тіла його швидкість зменшується і запас його кінетичної енергії теж зменшується. Щоб тіло могло віддалитися від поверхні Землі на нескінченність, його початкова кінетична енергія повинна бути не меншою, ніж робота з подолання сили тяжіння, тобто не меншою від $6{,}3 \cdot 10^7$ *Дж* на кожен кілограм маси тіла. З рівності кінетичної енергії тіла *К* і роботи *А* визначаємо швидкість тіла:

$$\upsilon^2/2 = GM_З/R_З, \quad \upsilon = 11{,}2\ (км/с). \qquad (8)$$

Цю швидкість називають *параболічною швидкістю* (інші назви: швидкість «звільнення», або швидкість «втечі» тіла з поверхні Землі) для Землі, або її *другою космічною швидкістю*.

Аналогічною формулою визначається параболічна швидкість для будь-якого сферично-симетричного астрономічного об'єкта. За заданого радіусу об'єкта, чим більше значення υ, тим більше й значення прискорення вільного

падіння, а отже, і сила тяжіння, яка діє на одиницю маси на поверхні об'єкта. Нижче у вигляді таблиці наводимо параболічні швидкості (у $км/с$) для деяких астрономічних об'єктів:

Місяць 2,4
Земля 11,2
Юпітер 61
Сонце 620
Типовий білий карлик 5000
Типова нейтронна зірка $1{,}3 \cdot 10^5$
Чорна діра $\sim 3 \cdot 10^5$ (швидкість світла).

Поряд з проявами сил тяжіння «зовні» астрономічних об'єктів, не менш важливою є їх роль всередині самих об'єктів. Скористаємося прикладом аналогії. Так, людина (водолаз), занурюючись глибоко у воду, відчуває як зростає тиск. На глибині 10 $м$ тиск уже удвічі більший, ніж на поверхні, де він просто дорівнює атмосферному тискові. Сила тяжіння повинна тягнути «стовп» води (наприклад, висотою 10 $м$) униз, якщо не існує якоїсь протидіючої сили. Виявляється, що така сила є – вона породжується тиском всередині води, а точніше, зростанням тиску зі збільшенням глибини. Атмосфера тисне *униз*, а вода під «дном» стовпа води – *уверх*. Оскільки сила тиску під дном стовпа повинна зрівноважувати не лише силу тиску атмосфери, а й вагу самого стовпа води, то тиск знизу повинен перевищувати атмосферний саме на вагу стовпа води з одиничною площею основи. Тому, чим глибше опускається водолаз, тим більшого тиску він зазнає.

Застосовуючи ці міркування до зірок типу Сонця, приходимо до висновку, що сила тяжіння (сила зовнішнього тиску) викликає у зірці величезний внутрішній тиск, який підтримує рівновагу зірки. Із розрахунків внутрішньої структури Сонця – з врахуванням його рівноваги у власному полі тяжіння – випливає, що тиск у центрі Сонця повинен складати біля $10^{16} Н/м^2$. Це приблизно у 10^{11} разів більше, ніж нормальний атмосферний тиск на поверхні Землі. Гігантська величина тиску, який необхідний для підтримання рівноваги зірок, дає певні уявлення щодо величини сил тяжіння масивних астрономічних об'єктів [11, С. 51].

Змоделюємо таку уявну ситуацію, наприклад, що внутрішній тиск у Сонці зник. Що за цього відбудеться? Спрямовані назовні внутрішні сили тиску зникнуть, і Сонце почне стискатися під дією власного тяжіння.

Спочатку повільне стиснення почне прискорюватися, адже згідно з ньютонівським законом обернених квадратів сили взаємного притягання мас зростатимуть. Зростання цих сил всередині Сонця, яке стискається, набуває

катастрофічного характеру: приблизно за 28 хвилин Сонце цілком стиснеться у *точку*.

Звичайно, що це лише уявний експеримент, який покликаний продемонструвати, наскільки важливими є сили внутрішнього тиску для рівноваги зірок. Якщо з якихось причин тяжіння стане більшим від протидіючих йому сил внутрішнього тиску, то зірка почне стискатися і по мірі цього стиснення сили тяжіння будуть безперервно зростати. І тоді може настати момент, коли вже жодні сили внутрішнього тиску не зможуть протидіяти тяжінню – відбудеться катастрофічне стиснення зірки. Цей катастрофічний стиск, свого роду звернений всередину зірки *вибух*, який викликаний тяжінням, називають *гравітаційним колапсом*.

Розглянемо, у яких випадках сили внутрішнього тиску будуть недостатніми, щоб утримати у рівновазі масивне тіло з точки зору загальної теорії відносності.

Вище було показано, що гравітаційна енергія тіла із збільшенням його маси збільшується пропорційно M^2 (ф-ла 6). З іншого боку, кількість ядерної або інших видів енергії, що містяться у тілі, згідно з формулою $E_o = Mc^2$, пропорційна M. Тож, зі збільшенням маси тіла M гравітаційна енергія буде збільшуватися швидше, ніж ядерна. Тому, незалежно від конкретних моделей, детальні розрахунки у задачі про рівновагу тіла масою M завжди показують, що існує певна гранична (критична) маса $M_{кр}$, така, що за $M < M_{кр}$ сили внутрішнього тиску ще здатні протидіяти тяжінню і утримати тіло у рівновазі, а за $M > M_{кр}$ рівновага неможлива. Точне значення критичної маси $M_{кр}$ залежить від маси тіла, його розмірів і природи сил внутрішнього тиску. Якщо у природі дійсно існують об'єкти з масами більшими, ніж довільне значення $M_{кр}$, то для них неминуче наступає гравітаційний колапс.

Згідно з теорією відносності довжина хвилі світла, яке випромінюється з поверхні масивного тіла і поширюється до віддаленого спостерігача, збільшується; це так званий *ефект гравітаційного червоного зміщення* [10]. По мірі стиснення гравітуючого тіла величина цього ефекту зростає. Відносне збільшення z (яке називають червоним зміщенням) довжини хвилі світла пов'язане з масою M і радіусом R тіла наступним співвідношенням:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM / c^2 R}} - 1. \qquad (9)$$

Із цієї формули видно, що коли тіло повільно стискається (його радіус зменшується), то z зростає. Отже, світло, яке випромінюється стискуваним тілом, буде здаватися віддаленому спостерігачеві все червонішим і червонішим.

Віддалений спостерігач помітить також й інший ефект: стискуване тіло буде світитися все слабше і слабше. Нагадаємо, що світло випромінюється фотонами, де енергія кожного з них пропорційна до частоти ($\varepsilon = h\nu$). Звідси випливає, що енергія кожного фотона, випромінюваного з поверхні тіла, *зменшується* в $(1+z)$ разів. За $z=1$ кожен фотон досягає віддаленого спостерігача лише з *половиною* своєї початкової енергії. Тож природно, що об'єкт здаватиметься спостерігачеві менш світним.

У дійсності світність об'єкта зменшується ще більше через ефект уповільнення плину часу, викликаного тяжінням [10].

Таким чином, якщо тіло випромінює певну кількість фотонів, наприклад 100, протягом $1\ c$ за годинником спостерігача, який знаходиться на поверхні тіла, то ці 100 фотонів дійдуть до віддаленого спостерігача протягом проміжку часу $(1+z)c$. Тому за оцінкою віддаленого спостерігача, *швидкість* випромінювання енергії тілом відповідно зменшиться в $(1+z)$ разів.

З врахуванням обох ефектів спостережуваний потік випромінювання повинен складати лише певну частку n від початкового, де

$$n = \frac{1}{(1+z)^2}. \qquad (10)$$

За $z=1$ $n=25\%$.

Такий результат отримується у припущенні, що стиснення відбувається повільно. Проте, як ми відмічали, таке припущення є справедливим лише на ранній стадії гравітаційного колапсу. На більш пізніших стадіях стиснення тіла відбувається дуже *швидко* і його поверхню вже *не можна* вважати незмінною відносно віддаленого спостерігача – вона віддаляється від нього (R швидко зменшується). Якщо джерело віддаляється зі швидкістю υ, то спостерігач реєструє світло з більшою довжиною хвилі, ніж випромінює джерело, причому довжина хвилі збільшується пропорційно до $(1+z)$, де

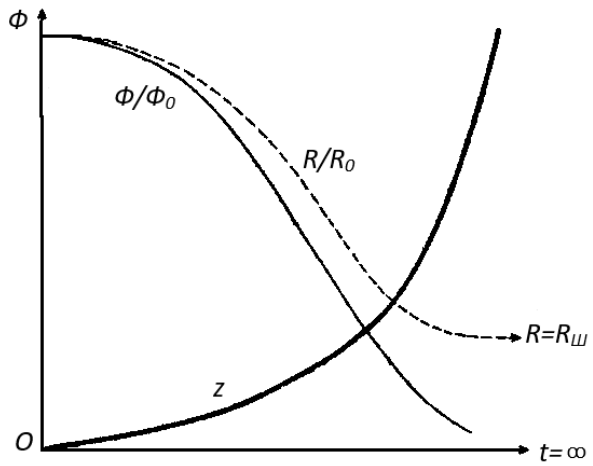
$$1+z = \sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}}. \qquad (11)$$

Це так званий *ефект Доплера*, і його теж необхідно враховувати за розгляду колапсу тіл.

Наведена формула (11) була отримана у спеціальній теорії відносності для *плоского простору-часу*. Отримання відповідного результату у загальній теорії відносності складніше, оскільки доплерівське і гравітаційне червоні зміщення стають тут нероздільними.

Кінцевий результат, який отримується з врахуванням обох ефектів, показує, що повне червоне зміщення виявляється *більшим* від того, що визначається формулою (9) для одного лише гравітаційного червоного зміщення.

На рисунку показано (у відносних одиницях) зменшення потоку випромінювання Φ і зростання червоного зміщення z у випромінюванні колапсуючого тіла з плином часу (за годинником віддаленого спостерігача). Для більшої наочності на цьому ж рисунку зображено також, як зменшується радіус R колапсуючого об'єкта, вимірюваний віддаленим спостерігачем. Оскільки R мається на увазі у неевклідовій геометрії, то практично таке вимірювання здійснити набагато складніше, ніж виміряти Φ і z. Відмітимо, що z зростає, а Φ і R зменшуються, що випливає з наведених вище міркувань. Якщо продовжити вісь часу до *нескінченності*, то Φ зменшується до нуля, а z необмежено зростає. Що ж відбувається з R?



Величина R зменшується, але не до нуля. Коли час за годинником віддаленого спостерігача прямує до нескінченності, R наближається до деякої величини, яку називають *радіусом Шварцшильда*:

$$R_{ш} = \frac{2GM}{c^2}. \quad (12)$$

Цей результат є очікуваним, адже певна вказівка на його можливість міститься у формулі (9) для величини червоного зміщення. Із цієї формули випливає, що за $R \to R_{ш}$, червоне зміщення z прямує до нескінченності.

Це означає, що для зовнішнього спостерігача колапсуючий об'єкт буде світити все слабше, а його спектр – буде все більше зміщуватися до червоної його частини по мірі того, як R наближатиметься до $R_{ш}$. Проте у дійсності R прямує до $R_{ш}$ асимптотично; це означає, що за час життя спостерігача R *ніколи* не стане точно рівним $R_{ш}$, як би довго не жив спостерігач. Важливо також відмітити, що починаючи з деякого певного моменту часу об'єкт стає невидимим для спостерігача, оскільки реєстрований ним потік випромінювання падає нижче порогу чутливості використовуваних приладів. Об'єкт фактично стає *абсолютно чорним*. Тому кажуть, що утворюється *чорна діра*.

Строго кажучи, з чисто математичної точки зору, сферично-симетричне тіло перетворюється у чорну діру, лише коли його радіус стає *рівним* $R_{ш}$. Із

рисунка видно, що за $R = R_ш$ червоне зміщення нескінченне $(z \to \infty)$, а потік випромінювання тіла дорівнює нулю $(\Phi = 0)$. Таким чином, тіло виявляється *абсолютно чорним*. Жоден світловий сигнал, випущений тілом за його $R = R_ш$, або у наступні моменти колапсу, не в змозі подолати межу $R = R_ш$. Важливе значення цієї межі (границі) вперше з'ясувалося після того, як німецький фізик-теоретик Карл Шварцшильд отримав свої розв'язки рівнянь Ейнштейна [15]. На його честь цю межу (границю) називають бар'єром (радіусом) Шварцшильда.

Відсутність зв'язку із зовнішнім світом засобами світлових або інших сигналів є загальною властивістю всіх чорних дір. Про цю властивість кажуть як про наявність певного *горизонту подій*. Подібно до того як кривизна поверхні Землі створює горизонт, який обмежує поле зору спостерігача, наприклад, моряка у відкритому морі, так і кривизна простору-часу поблизу чорної діри породжує горизонт подій, який «приховує» від зовнішнього спостерігача частину простору-часу, яка знаходиться всередині горизонту подій.

Вважаємо доречним звернути увагу на два моменти, які часто випадають з поля зору інтерпретаторів загальної теорії відносності. По-перше, і ми вже про це казали, що для *зовнішніх спостерігачів*, наприклад, таких як ми, *жоден* астрономічний об'єкт ніколи не стає чорною дірою у строго математичному сенсі. Як показано на рисунку, сигнали, послані за умови $R = R_ш$, ніколи не досягнуть нас. Таким чином, всі засоби, які зазвичай використовуються в астрономії для вивчення небесних тіл, можуть дати нам інформацію про об'єкти лише *до* того моменту, коли вони досягають $R = R_ш$. Подібні твердження на кшталт, що «зірка стала чорною дірою», або «в галактиці існує дуже масивна чорна діра», ґрунтуються швидше на припущеннях, ніж на прямому спостереженні самого факту. Саме більше, що можна сказати з цього приводу, так це те, що ці твердження відповідають *практичній* точці зору, але не *строгому* математичному підходові. З представленого рисунка видно, що з практичної точки зору об'єкт у всіх відношеннях дійсно стає чорним, коли R наближається до $R_ш$. Ця різниця між статусом чорних дір «де факто» і «де юре» часто зовсім нівелюється в астрономічній літературі [11, С. 79].

Інший момент стосується некоректного використання аналогії між ньютонівською чорною дірою (гіпотеза Лапласа) і чорною дірою у загальній теорії відносності (чорна діра Шварцшильда). У трактуванні ньютонівської динаміки світловий промінь може навіть тимчасово вирватися з поверхні тіла, у якого $R < R_ш$. Такий промінь може віддалитися від тіла на деяку відстань, але потім повернe назад і знову «впаде» на поверхню тіла. Рух такого променя дуже схожий на політ каменя, кинутого з поверхні Землі, який потім знову падає на неї. Але тоді зовнішній спостерігач, якщо він знаходиться достатньо близько до об'єкту,

буде у змозі виявити за цим світловим променем сам об'єкт. У загальній теорії відносності така можливість абсолютно виключається. Тут межа $R = R_ш$ – абсолютно нездоланний бар'єр, за межі якого світло не може здійснити навіть самої короткої «вилазки». Тож розташувавшись навіть поблизу чорної діри, спостерігач «побачити» її не зможе. Отже, розглядаючи сильні гравітаційні ефекти, теорія відносності виявляється більш несуперечливою і дає результати, які краще узгоджуються з даними експериментів, ніж теорія тяжіння Ньютона.

Викладене вище стосується колапсу тіла сферично-симетричної форми. У теорії Ейнштейна така задача розв'язується точно. Так, для зовнішнього спостерігача геометрія простору-часу визначається розв'язком Шварцшильда [15], а сам розв'язок залежить лише від одного параметра – маси тіла M .

Проте у природі часто зустрічаються відхилення форми тіла від сферичної. У тій чи іншій мірі це є характерним і для астрономічних систем. Виникає питання, як впливають ці відхилення на перебіг колапсу і перетворення астрономічних об'єктів у чорні діри (можливо) якоїсь «неправильної» форми? Нажаль відповіді на ці питання загальна теорія відносності не дає. Рівняння Ейнштейна настільки складні, що ні машинні (ЕОМ), ні аналітичні методи не дозволяють розв'язати задачу *колапсу тіла довільної форми*.

Не дивлячись на відсутність точного її вирішення, теоретики висловлюють певні міркування щодо кінцевого стану таких колапсуючих об'єктів – за умови, що об'єкт не розпадається на частини. Робляться спроби детального дослідження деяких часткових випадків цієї задачі. Розглянемо приклад одного з них.

Розглядається об'єкт, який за формою лише *незначно* відрізняється від ідеально сферично-симетричного. Неоднорідності на його поверхні можна розглядати, наприклад, як гори і долини на поверхні Землі. Можна також враховувати обертання тіла і наявність у нього електромагнітного поля. Проте передбачається, що ці і будь-які інші малі збурення настільки слабкі, що мало впливають на загальну геометрію простору-часу поза об'єктом. За таких припущень рівняння Ейнштейна допускають *лінеаризацію* – деяку видозміну рівнянь, яка дуже спрощує отримання точних рішень.

Використовуючи такий підхід, Р. Прайс у семидесятих роках опублікував у формі теореми наступні результати [13; 14].

За процесу колапсу об'єкта всі початкові неоднорідності – за виключенням небагатьох, цілком визначених, – *згладжуються*.

Таке згладжування спричинюється *випромінюванням* енергії об'єктом. Вирішальним фактором, від якого залежить, яка ж *інформація* зберігається, а яка зникає разом з випромінюванням, є *спін* відповідної фундаментальної взаємодії, який зв'язаний з передачею цієї інформації. Теорема Прайса пов'язує спін з «мультипольними моментами», які використовуються у математиці для

визначення міри відхилення різноманітних неоднорідностей від сферичності. *Зберігаються лише ті моменти, порядок яких менший від значення конкретного спіну*.

Як відомо, поняття «спін» виникло у фізиці у зв'язку з розвитком квантової теорії. Згідно з сучасними уявленнями, фізична взаємодія між матеріальними об'єктами здійснюється за допомогою різних елементарних частинок. Властивості взаємодій виражаються через деякі специфічні характеристики цих частинок, таких, як маса, електричні заряди та ін. *Спін* – це одна з таких характеристик. Зазвичай він виражається в одиницях $\hbar = h/2\pi$.

Так, електромагнітна взаємодія переноситься квантами світла – *фотонами*. Спін фотона дорівнює 1. Тому із теореми Прайса випливає, що випромінювання повинне *винести* всі електричні і магнітні моменти порядку 1 і більші. Зберігається інформація лише про нульовий момент, який просто дорівнює електричному зарядові Q. Переносниками гравітаційної взаємодії є *гравітони* – частинки зі спіном 2. Згідно з теоремою Прайса, за явища колапсу зберігатимуться моменти порядку 0 і 1. Момент нульового порядку – це маса M об'єкта, а момент першого порядку – це кутовий момент тіла S.

Таким чином, вимальовується наступна картина гравітаційного колапсу *майже* сферично-симетричного об'єкта. Уявімо, що об'єкт зв'язаний із зовнішнім спостерігачем через різні фізичні взаємодії. За характером цих взаємодій спостерігач дізнається про деталі внутрішньої структури об'єкта. По мірі розвитку колапсу ці деталі «розмиваються», стаючи нез'ясовними, і на стадії, близькій до стану чорної діри, до зовнішнього спостерігача доходить лише та інформація, яка міститься у моментах з порядками *меншими*, ніж спіни переносників взаємодій.

Отже, зміст теореми Прайса полягає у тому, що у процесі колапсу астрономічного об'єкта більша частина інформації про його властивості втрачається. Коли об'єкт стає чорною дірою, для спостереження за ним із зовні залишаються доступними лише небагато властивостей об'єкта як цілого. Якщо обмежитися лише тяжінням і електродинамікою, то весь набір спостережуваних властивостей чорної діри зведеться просто до її маси M, заряду Q і кутового моменту S. Із чотирьох відомих фундаментальних взаємодій лише дві (електромагнітна і гравітаційна) відзначаються великим радіусом дії [5]. Тож ймовірно, що лише шляхом цих взаємодій саме й здійснюється передача інформації про чорну діру до віддаленого спостерігача?

Якщо наведені висновки є справедливими й для колапсу об'єкта самої довільної форми, – а це «*якщо*» поки надто невизначене, – то й у випадку чорної діри самого загального виду віддалений спостерігач змушений буде задовольнятися дуже обмеженою інформацією про її структуру.

Висновки. На основі аналізу сучасних уявлень про структуру і еволюцію космічних об'єктів Всесвіту запропоновано варіант методики вивчення окремих наслідків загальної теорії відносності.

У подальшому вважаємо за доцільне звернутися до вивчення різних моделей чорних дір, природи і проявів темної матерії та прихованої енергії Всесвіту.

Література:

1. Гокінг С. Коротка історія часу: від великого вибуху до чорних дір / пер. з англ. Анатолій Хлівний та ін. Київ : К.І.С., 2015. 201 с.

2. Загальна теорія відносності: випробування часом / Я. С. Яцків та ін. Київ : ГАО НАН України, 2005. 288 с.

3. Ільніцька К. С. Закон обернених квадратів як висновок із законів Кеплера і як основа закону всесвітнього тяжіння Ньютона. Science in the Modern World: Innovations and Challenges : proceedings of V International Scientific and Practical Conference, Toronto, 23-25 January 2025 / Scientific Publishing Center "Sci-conf.com.ua", Perfect Publishing. Toronto, 2025. P. 178–183.

4. Краснобокий Ю. М., Ткаченко І. А., Ільніцька К. С. Методичні особливості використання системно-інтегративного підходу до викладання окремих тем фундаментальних наук. Фізико-математична освіта. 2021. Випуск 3 (29). С. 81–92.

5. Краснобокий Ю. М., Ткаченко І. А. Проблемні питання викладання навчальної дисципліни «Наукова картина світу та її еволюція». Topical issues of the development of modern science : abstracts of the 4th International Scientific and Practical Conference, Sofia, 11-13 December, 2019 / Scientific Publishing Center "Sci-conf.com.ua", Publishing House "ACCENT". Sofia, Bulgaria, 2019. P. 249–260.

6. Chandrasekhar S. The Mathematical Theory of Black Holes. New York : Oxford University Press, 1983. 646 p.

7. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik (4 folge). 1905. Band 17. Heft 10. S. 891–921. [Einstein A. On the Electrodynamics of Moving Bodies. Annals of Physics (ser. 4). 1905. Vol. 17. Issue 10. P. 891–921].

8. Einstein A. Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Annalen der Physik (4 folge). 1911. Band 35. Heft 10. S. 898–908. [Einstein A. On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light. Annals of Physics (ser. 4). 1911. Vol. 35. Issue 10. P. 898–908].

9. Hawking Stephen. A Brief History of Time. New York: Bantam Books, 1988. 256 p.

10. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. 1279 p.

11. Narlikar J. V. Violent Phenomena in the Universe. New York : Oxford University Press, 1984. 218 p.

12. Penrose R. Techniques of Differential Topology in Relativity. Philadelphia : SIAM, 1972. 80 p.

13. Price R. H. Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. Scalar and Gravitational Perturbations. Physical Review D. 1972. Vol. 5. Iss. 10. P. 2419–2438.

14. Price R. H. Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields. Physical Review D. 1972. Vol. 5. Iss. 10. P. 2439–2454.

15. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1916.

Halbband 1. S. 189–196. [Schwarzschild K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. Meeting reports of the Royal Prussian Academy of Sciences. 1916. Vol. 1. P. 189–196].

References:

1. Hawking, S. (2015). Korotka istoriia chasu: vid velykoho vybukhu do chornykh dir [A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes] (A. Khlivnyi et al., Trans.). Kyiv : K.I.S. (Original work published 1988) [in Ukrainian].

2. Yatskiv, Ya. S., Aleksandrov, O. M., Vavylova, I. B. Zhdanov, V. I., Kudria, Yu. M., Parnovskyi, S. L., Fedorova, O. V., & Khmil, S. I. (2005). Zahalna teoriia vidnosnosti: vyprobuvannia chasom [General Theory of Relativity: Test of Time]. Kyiv : HAO NAN Ukrainy [in Ukrainian].

3. Ilnitska, K. S. (2025). Zakon obernenykh kvadrativ yak vysnovok iz zakoniv Keplera i yak osnova zakonu vsesvitnoho tiazhinnia Niutona [The inverse square law as a derivation from Kepler's laws and as the basis of Newton's law of universal gravitation]. M. L. Komarytskyy (Eds.), Science in the Modern World: Innovations and Challenges : proceedings of the 5th International Scientific and Practical Conference, (pp. 178–183). Toronto : Perfect Publishing [in Ukrainian].

4. Krasnobokyi, Yu. M., Tkachenko, I. A., & Ilnitska, K. S. (2021). Metodychni osoblyvosti vykorystannia systemno-intehratyvnoho pidkhodu do vykladannia okremykh tem fundamentalnykh nauk [Methodological features of using a system-integrative approach to teaching certain topics of the fundamental sciences]. Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education, 3 (29), 81–92 [in Ukrainian].

5. Krasnobokyi, Yu. M., & Tkachenko, I. A. (2019). Problemni pytannia vykladannia navchalnoi dystsypliny «Naukova kartyna svitu ta yii evoliutsiia» [Problematic issues in teaching the academic discipline "Scientific picture of the world and its evolution"]. M. L. Komarytskyy (Eds.), Topical issues of the development of modern science : abstracts of the 4th International Scientific and Practical Conference, (pp. 249–260). Sofia, Bulgaria : Publishing House “ACCENT” [in Ukrainian].

6. Chandrasekhar, S. (1983). The Mathematical Theory of Black Holes. New York : Oxford University Press.

7. Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper [On the Electrodynamics of Moving Bodies]. Annalen der Physik (4 folge) [Annals of Physics (ser. 4)], 17(10), 891–921 [in German].

8. Einstein, A. (1911). Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes [On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light]. Annalen der Physik (4 folge) [Annals of Physics (ser. 4)], 35(10), 898–908 [in German].

9. Hawking, S. (1988). A Brief History of Time [Korotka istoriia chasu]. New York : Bantam Books. 256 p. [in English].

10. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). Gravitatsiia [Gravitation]. San Francisco : W. H. Freeman and Company. 1279 p. [in English].

11. Narlikar, J. V. (1984). Violent Phenomena in the Universe. New York: Oxford University.

12. Penrose, R. (1972). Techniques of Differential Topology in Relativity. Philadelphia : SIAM.

13. Price, R. H. (1972). Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. Scalar and Gravitational Perturbations. Physical Review D, 5(10), 2419–2438.

14. Price, R. H. (1972). Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields. Physical Review D, 5(10), 2439–2454.

15. Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie [On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften [Meeting reports of the Royal Prussian Academy of Sciences], 1, 189–196 [in German].