ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

Частина 1

Класична механіка

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти освітньої програми
Середня освіта (Природничі науки)

Частина 1
Класична механіка

Укладачі: М. В. Дудик, Ю. В. Решітник

Бровари
АНФ груп
2025

УДК 531/534(075)
Т33

Рецензенти:

Терещук Сергій Іванович, доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Ковальов Леонід Євгенович, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри математики і фізики Уманського національного університету

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету фізики, математики та інформатики
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 5 від 20 листопада 2025 року)

Теоретична фізика : навч. посіб. для здоб. вищ. освіти освіт. прогр. Се-
Т33 ред. освіта (Природн. науки). Ч. 1. : Класична механіка / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад.: М. В. Дудик, Ю. В. Решітник. – Бровари : АНФ груп, 2025. – 104 с.
ISBN 978-617-7252-46-6

У навчальному посібнику подано систематизований виклад основних положень класичної механіки як базового розділу теоретичної фізики, який забезпечує глибоке розуміння фізичних закономірностей макроскопічного світу. Значну увагу приділено застосуванню класичної механіки для розв'язання таких фундаментальних фізичних проблем, як рух тіл в центральному полі, розсіяння частинок, коливання, механіка суцільних середовищ. Викладено основи спеціальної теорії відносності.

Посібник призначений для студентів бакалаврського рівня освітньої програми Середня освіта (Природничі науки) і може бути використаний як основа для лекційних курсів, практичних занять, самостійної роботи студентів та підготовки майбутніх учителів до професійної діяльності.

УДК 531/534(075)

ISBN 978-617-7252-46-6 © Дудик М. В., Решітник Ю. В., уклад., 2025

ЗМІСТ

ВСТУП 5
ТЕМА 1. ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ 7
1. Предмет і методи теоретичної фізики 7
2. Вихідні положення класичної механіки. Закони Ньютона 9
3. Поняття про в’язі 13
4. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа 15
5. Функція Лагранжа механічної системи та її властивості 16
6. Інваріантність законів механіки. Принцип відносності Галілея. 17
7. Зв’язок законів збереження з властивостями простору і часу 19
8. Закони збереження в класичній механіці 20
9. Рівняння Гамільтона 22
ТЕМА 2. ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ 24
10. Одновимірний рух 24
11. Центр інерції 28
12. Задача двох тіл 29
13. Рух частинки в центральному полі 31
14. Розсіяння частинок 37
15. Формула Резерфорда 40
16. Рух тіла змінної маси 41
17. Вільні коливання системи без тертя 43
18. Затухаючі коливання 46
19. Вимушені коливання 48
ТЕМА 3. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ 51
3.1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА 51
20. Кінематика твердого тіла 51
21. Кінетична енергія твердого тіла. Тензор інерції 53
22. Момент імпульсу твердого тіла 58
23. Рівняння руху твердого тіла 60
24. Умови рівноваги твердих тіл. Дотик твердих тіл 63

3.2. ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІКИ 65
25. Вступ у гідродинаміку. Рівняння неперервності 65
26. Рівняння Ейлера 67
27. Рівняння Бернуллі 69
28. Потік імпульсу у рідині 72
29. Рівняння руху в'язкої рідини 74
ТЕМА 4. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА 77
30. Постулати спеціальної теорії відносності 77
31. Перетворення Лоренца 78
32. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца 80
33. Релятивістський закон додавання швидкостей 82
34. Інтервал та інші інваріанти СТВ 83
35. Чотиривимірний просторово-часовий многовид 86
36. Чотиривимірні вектори і тензори 87
37. Релятивістська інваріантність 90
38. Чотиривимірні швидкість і прискорення 91
39. Принцип найменшої дії в СТВ 93
40. Енергія і імпульс у релятивістській механіці 94
41. Рівняння релятивістської динаміки 96
42. Експериментальне обґрунтування СТВ 99
Рекомендована література 104

ВСТУП

Теоретична фізика посідає центральне місце у формуванні сучасного наукового світогляду, виступаючи фундаментом, на якому вибудовуються як класичні, так і найновіші уявлення про природу. Вона забезпечує глибоке розуміння фізичних закономірностей, розкриває внутрішні механізми явищ і процесів, надає засоби для опису світу мовою строгих математичних моделей. Саме теоретична фізика визначає рамки, в яких експеримент набуває змісту, а практичні застосування – наукової обґрунтованості. Для майбутнього вчителя фізики опанування теоретичних основ є не лише необхідною умовою професійної компетентності, але й джерелом формування умінь аналізувати, узагальнювати та творчо застосовувати фізичні знання в освітньому процесі.

Курс теоретичної фізики у підготовці здобувачів освітньої програми "Середня освіта (Природничі науки)" відіграє важливу роль у забезпеченні цілісності наукової підготовки, формуванні здатності працювати із фізичними моделями різного рівня складності, розумінні меж їх застосування, інтерпретації результатів та обґрунтуванні висновків. Вивчення теоретичної фізики сприяє розвитку логічного мислення, математичної культури, навичок аргументації, що є необхідними для якісного викладання фізики в закладах загальної середньої освіти. Вчитель, який володіє глибинним розумінням фундаментальних законів природи, здатний не лише пояснювати учням складні явища простими словами, а й надихати їх на пізнання світу засобами науки.

Частина 1 цього навчального посібника присвячена **класичній механіці** – першому і найбільш розвиненому розділу теоретичної фізики. Класична механіка постає як логічно стрункa та математично вишукана система знань, що описує рух матеріальних тіл і дає змогу зрозуміти фундаментальні закони, за якими функціонує макросвіт. Її становлення пов’язане з іменами найвидатніших учених: Галілео Галілея, який заклав основи експериментального методу; Ісаака Ньютона, що сформулював закони руху та закон всесвітнього тяжіння; Жозефа-Луї Лагранжа і Вільяма Гамільтона, які піднесли механіку на новий рівень,

створивши узагальнені формалізми, здатні описувати рух у найбільш загальній і раціональній формі.

У різних формулюваннях – ньютонівському, лагранжевому та гамільтоновому – класична механіка демонструє свою універсальність і методологічну силу. Ньютонівський підхід базується на аналізі сил і рівнянь руху, лагранжевий формалізм – на принципі найменшої дії та узагальнених координатах, а гамільтонівський – на симетричній структурі канонічних рівнянь, що має глибокий зв'язок із сучасною фізикою, включно з квантовою механікою та статистичною фізикою. Кожна з цих форм подання не лише відображає історичний етап розвитку науки, а й відкриває для студента власний інструментарій аналізу фізичних систем.

Важливим етапом еволюції механіки стали революційні ідеї Альберта Ейнштейна**,** який показав, що класичні уявлення про простір і час потребують переосмислення. Спеціальна та загальна теорії відносності змінили уявлення про рух тіл із великими швидкостями та у сильних гравітаційних полях, продемонструвавши обмеженість застосування ньютонівської механіки та встановивши нові фундаментальні принципи. Хоча класична механіка зберігає свою актуальність у межах невисоких швидкостей і слабких полів, її сучасне трактування неможливе без розуміння місця, яке вона посідає у ширшій фізичній картині світу.

Представлений навчальний посібник спрямований на те, щоб забезпечити студентів системним і глибоким розумінням основ класичної механіки, формалізмів її математичного опису, результатів її застосування, а також методологічних інструментів, необхідних для формування професійної компетентності майбутнього вчителя природничих наук, зокрема фізики. Він поєднує теоретичну строгість із педагогічною орієнтованістю, сприяючи усвідомленню фундаментальної ролі механіки в навчанні фізики та її значення як вихідної точки для подальшого опанування інших розділів теоретичної фізики.

ТЕМА 1. ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1. Предмет і методи теоретичної фізики

Фізика – наука перш за все експериментальна. Але вже в роботах Ньютона та інших засновників сучасної фізики для отримання кількісних формулювань закономірностей успішно використовувались математичні методи. До 19 ст. експериментальні і математичні методи у фізиці не розділялись, фізики добре володіли одночасно обома засобами досліджень. Проте, їх розвиток і ускладнення привели до того, що приблизно з другої половини 19 ст. відбулася диференціація фізичної науки на експериментальну і теоретичну та виникли професійні спеціалізації: фізик-теоретик і фізик-експериментатор.

Теоретична фізика – це фізична за змістом наука, яка користується в своїх дослідженнях математичними методами. Вона розв'язує такі задачі:

1. **Пошук фізичних закономірностей та кількісних співвідношень у експериментальних результатах.** Приклад: математична формула $I=U/R$ узагальнює досліди німецького фізика Георга Ома.

2. **Передбачення нових фізичних явищ і закономірностей, які ще не спостерігались в експериментах**. Приклад: передбачення в квантовій теорії існування античастинок і їх подальше відкриття.

3. **Створення узагальнюючих теорій, об'єднуючих дедалі більше коло фізичних явищ.** Приклад: всі електромагнітні явища випливають з рівнянь Максвела.

Отже, саме в теоретичній фізиці зосереджуються і остаточно відшліфовуються загальні теоретичні уявлення про суть різноманітних фізичних явищ.

Основою загальних фізичних законів можуть служити тільки дослідні факти. Тому найбільш загальні принципи теоретичної фізики не виводяться, а являють собою узагальнене формулювання спостережених фізичних закономірностей. Але в деяких випадках кількісні вирази фізичних законів з'явились як результат наукових передбачень. Володіючи кількісними формулюваннями загальних фізичних законів, тео-

ретична фізика може перейти до виконання другої частини своєї програми – передбачення нових фізичних явищ і встановлення нових закономірностей з допомогою математичних методів досліджень. На цьому шляху теоретична фізика досягла значних успіхів. Як приклади можна вказати відкриття Максвелом струму зміщення, встановлення електромагнітної природи світла, створення Ейнштейном теорії відносності і, зокрема, встановлення співвідношення між масою і енергією, передбачення квантовою механікою існування хвильових властивостей у мікрочастинок і т.п.

В свою чергу, вивчення нових явищ, виявлених дослідним шляхом, служить стимулом для подальшого розвитку теоретичної фізики. Отже, теоретична і експериментальна фізика складають єдине і нерозривне ціле – фізичну науку.

Виникнення і розвиток нових фізичних теорій часто вкладається в таку, хоч і не обов'язкову, схему:

1) накопичення емпіричних фактів, які суперечать сучасним їм уявленням фізичних теорій або не знаходять в них пояснення;
2) висунення і відбір робочих гіпотез, які пояснюють окремі факти;
3) розробка нової узагальненої теорії, яка пояснює вказані фізичні явища;
4) передбачення нових фізичних явищ в рамках новоствореної теорії та їх експериментальне підтвердження.

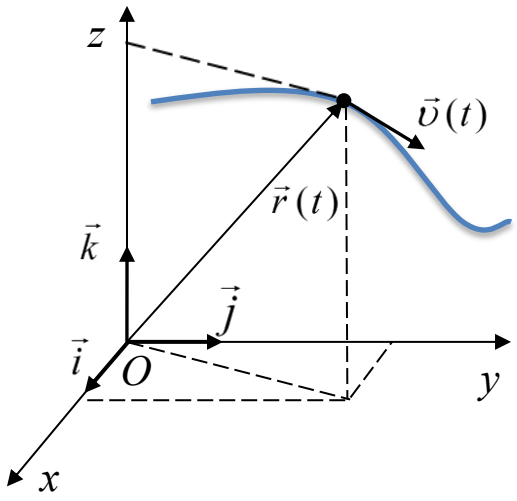
Саме такими історичними етапами пройшло становлення квантової механіки, спеціальної теорії відносності. Так, на початку 20 ст. у фізиці існували проблеми з поясненням явища фотоефекту, закономірностей рівноважного теплового випромінювання, дискретності спектрів випромінювання атомів, стійкості атомів. Для їх розв'язання були висунуті гіпотеза квантів М.Планка, корпускулярна гіпотеза А.Ейнштейна, теорія атома водню Н.Бора, гіпотеза де Бройля про корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії. Їх узагальненням стала квантова механіка, започаткована в працях Е.Шредінгера, В.Гейзенберга і Н.Бора. Прикладом передбачень квантової механіки є, зокрема, тунельний ефект, який, зокрема, став основою для пояснення α-радіоактивності атомних ядер.

2. Вихідні положення класичної механіки. Закони Ньютона

Механіка – це розділ фізики, що вивчає рух матеріальних об'єктів у просторі і часі. Класична механіка виходить із припущення, що властивості простору і часу не залежать від того, які матеріальні об'єкти приймають участь у русі, і як вони рухаються (абсолютний простір, абсолютний час). Припускається, що простір однорідний і ізотропний, а час однорідний. Однорідність та ізотропність простору означають відсутність у просторі чимось виділених точок та напрямків відповідно. Однорідність часу означає, що у плині часу немає виділених моментів, і тому байдуже, з якого моменту починати його відлік.

Для опису руху в механіці вводиться поняття системи відліку, яка пов'язується з певним тілом відліку, вибором системи координат у просторі і способом відліку часу в кожній точці простору. Внаслідок однорідності і ізотропності простору та однорідності часу всі системи відліку рівноправні. Механічний рух визначається як зміна з часом взаємного положення тіл або частин тіла. Для опису руху використовуються різні способи, зокрема, векторний, координатний і природний.

А) *Векторний* спосіб опису руху оснований на заданні радіус-вектора $\vec{r}(t)$ частинки як функції часу. Залежність $\vec{r}(t)$ виражає *закон руху* частинки. Кінець радіус-вектора описує в просторі *траєкторію* – криву, вздовж якої рухається точка. Характеристиками руху є швидкість частинки:



$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) \qquad (1)$$

і прискорення:

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) \qquad (2)$$

(тут і надалі крапка над символом позначає похідну по часу, дві крапки – другу похідну по часу).

В) *Координатний* спосіб задає рух за допомогою трьох скалярних функцій часу – координат точки. В декартовій системі координат це є функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, в сферичній – функції $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$. Враховуючи

подання радіус-вектора $\vec{r}(t)$ за його проєкціями на вісі координат та визначення (2), отримуємо зв'язок між векторними і скалярними характеристиками руху. Зокрема, в декартовій системі координат з одиничними ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вздовж вісей *x*, *y*, *z* радіус-вектор частинки дорівнює

$$\vec{r}(t) = \vec{i} \cdot x(t) + \vec{j} \cdot y(t) + \vec{k} \cdot z(t); \tag{3}$$

тоді згідно з (1) швидкість дорівнює:

$$\begin{aligned} \vec{\upsilon}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{i} \cdot \dot{x}(t) + \vec{j} \cdot \dot{y}(t) + \vec{k} \cdot \dot{z}(t) = \\ = \vec{i} \cdot \upsilon_x(t) + \vec{j} \cdot \upsilon_y(t) + k \cdot \upsilon_z(t), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x},\ \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y},\ \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$ – декартові проєкції швидкості; аналогічно встановлюється зв'язок між вектором прискорення (2) і координатами точки *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*):

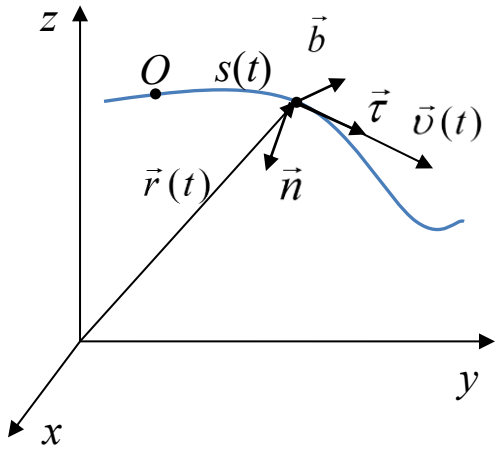
$$\begin{aligned} \vec{w}(t) = \dot{\vec{\upsilon}}(t) = \vec{i} \cdot \dot{\upsilon}_x + \vec{j} \cdot \dot{\upsilon}_y + \vec{k} \cdot \dot{\upsilon}_z = \\ = \vec{i} \cdot \ddot{x} + \vec{j} \cdot \ddot{y} + \vec{k} \cdot \ddot{z} = \vec{i} \cdot w_x + \vec{j} \cdot w_y + \vec{k} \cdot w_z. \end{aligned} \tag{5}$$

За значеннями проєкцій визначаються модулі швидкості і прискорення

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \quad w = |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \tag{6}$$

С) *Природний спосіб*: у просторі задається траєкторія руху точки, на якій вказано початок, позитивний напрямок відліку і скалярна функція *s*(*t*), яка дорівнює довжині дуги траєкторії від початку відліку. В кожній точці траєкторії вводиться супроводжуючий тригранник, утворений ортами дотичної $\vec{\tau}$, нормалі $\vec{n}$ і бінормалі $\vec{b}$. Тоді швидкість і прискорення визначаються формулами:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},\ \vec{w}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{n}\frac{\upsilon^2}{\rho} + \vec{\tau}\frac{d\upsilon}{dt} = w_n\vec{n} + w_\tau\vec{\tau}, \tag{7}$$



де $w_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$ – нормальне, а $w_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – тангенціальне прискорення, ρ – радіус кривизни траєкторії.

Для спрощення опису руху в механіці використовуються різні ідеалізації. Зокрема, вводиться поняття *матеріальної точки* – тіла, розмірами якого за даних умов руху можна знехтувати. *Абсолютно тверде тіло* – це тіло, деформацією якого можна знехтувати. Важливою характеристикою тіла є його *маса m* – міра його інертності. Матеріальні об'єкти, що знаходяться у різних точках простору, взаємодіють між собою, тобто, рух однієї частини матерії залежить від наявності інших частин матерії і їх руху. Основною мірою взаємодії матеріальних об'єктів є сила $\vec{F}$. Основу класичної механіки складають три закони Ньютона. Припускається, що існують такі системи відліку, в яких ці закони справедливі. Такі системи називають *інерціальними* системами відліку (ІСВ). Будь-яка система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно деякої ІСВ, також є ІСВ.

Перший закон Ньютона: якщо на частинку не діють ніякі сили, то вона буде зберігати стан свого руху, тобто продовжуватиме рухатись по прямій лінії зі сталою швидкістю. Інакше, якщо

$$\vec{F} = 0, \text{ то } \vec{\upsilon} = const. \qquad (8)$$

Другий закон Ньютона: якщо на частинку діють сили, то швидкість зміни її імпульсу дорівнює повній силі, діючій на неї:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \qquad (9)$$

При цьому під **імпульсом** в класичній механіці розуміють добуток маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (10)$$

Вважаючи масу сталою ($m = const$), вираз (9) перепишемо у вигляді

$$m\vec{w} = \vec{F}, \qquad (11)$$

де $\vec{w} = \dot{\vec{\upsilon}}$ – прискорення матеріальної точки. На основі (11) другий закон Ньютона можна сформулювати так: *прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям*. Зазначимо, що таке формулювання другого закону Ньютона непридатне у динаміці тіла змінної маси.

Рівняння (11) називається *основним рівнянням динаміки* вільної матеріальної точки, або *рівнянням Ньютона*. Другий закон Ньютона виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами – силою, масою і прискоренням, яке з урахуванням (1)-(2) набуває вигляду:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right). \qquad (12)$$

Рівняння (12) є звичайним диференціальним рівнянням 2-го порядку у векторній формі (*рівнянням руху*), якому можна поставити у відповідність три скалярних диференціальних рівняння в координатній формі.

Третій закон Ньютона: сили, з якими два тіла діють одне на одне, рівні за величиною і напрямлені в протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує два тіла:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \qquad (13)$$

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки – пряма та обернена, які формулюються наступним чином:

Пряма, або перша, основна задача: Визначити рівнодійну сил $\vec{F}$, що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу *m* і закон руху $\vec{r}(t)$ (так звані *кінематичні рівняння руху*).

Для розв'язання прямої задачі з відомого закону руху диференціюванням радіус-вектора частинки $\vec{r}(t)$ по часу визначають її прискорення $\vec{w}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$, підстановка якого у формулу (11) дає розшукувану силу.

Обернена, або друга, основна задача: Визначити кінематичні рівняння (закон) руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу *m*, прикладену до неї силу $\vec{F}$ і початкові умови руху.

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (12). Проєктуючи в загальному випадку тривимірного руху векторне рівняння (12) на три вісі координат, отримуємо систему трьох диференціальних рівнянь руху в координатній формі, порядок якої дорівнює шести. Результатом інтегрування цієї системи будуть координати частинки як функції часу і шести сталих інтегрування. Для визначення зазначених сталих інтегрування для кожної конкретної динамічної задачі потрібно додатково задати початкові умови руху, під якими розуміють значення координат кожної матеріальної точки і проекції її швидкості в деякий заданий (початковий) момент часу $t = t_0$. В декартовій системі координат початкові умови мають вигляд:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0;$$
$$\dot{x}(t_0) = \upsilon_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = \upsilon_{y0}, \quad \dot{z}(t_0) = \upsilon_{z0}.$$

3. Поняття про в'язі

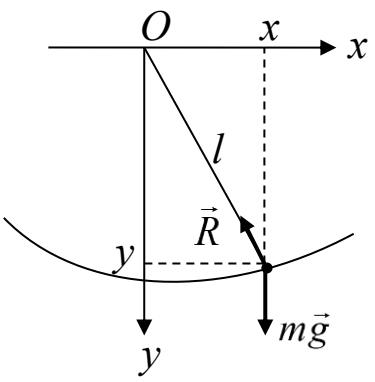
Багато задач динаміки зводиться до розв'язання рівнянь руху – основних рівнянь динаміки. Якщо механічна система складається з N частинок, кожна з яких має масу m_a (a – номер частинки, a=1, 2, ..., N), то рівняння руху утворять систему N диференційних рівнянь другого порядку відносно невідомих векторних функцій $\vec{r}_a(t)$:

$$m_a \frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2} = \vec{F}_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; \vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, ..., \vec{\upsilon}_N; t) \quad (a = 1,\ 2,\ ...,\ N). \qquad (1)$$

Завдання полягає в тому, щоб знайти кінематичний закон руху кожної частинки $\vec{r}_a(t)$. Якщо права частина системи рівнянь (1) відома, то при заданих граничних умовах вона може бути розв'язана в простих випадках аналітично, а в складних чисельно.

Але в механіці зустрічаються задачі, в яких поруч з відомими силами на частинки діють сили, які не відомі заздалегідь. Наприклад, в рівняння руху ідеального математичного маятника

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{R}, \qquad (2)$$



крім сили тяжіння $m\vec{g}$, входить сила натягу нитки $\vec{R}$, яка невідома, тому це рівняння не може бути розв'язане. Проте відомо, що підвішена до нитки матеріальна частинка рухається по колу, радіус якого дорівнює довжині нитки, а її координати задовольняють рівняння кола

$$x^2 + y^2 = l^2, \tag{3}$$

тобто, на координати частинки накладаються певні обмеження.

Обмеження геометричного або кінематичного характеру, які можуть бути накладені на положення і швидкості частинок системи, називають *в'язями*. В'язі реалізуються поверхнями різних тіл, нитками, стержнями і т.д. Аналітично в'язі виражаються *рівняннями в'язів*, тобто співвідношеннями між радіус-векторами точок, їх швидкостями і прискореннями. Рівняння (3) – рівняння в'язів для математичного маятника. Сили, з якими тіла, що здійснюють в'язі, діють на точки системи, називають *силами реакцій*. В'язі напрямлені по нормалі до дотичних поверхонь, а якщо в'язі реалізуються через стержні і нитки, то вздовж них.

В загальному випадку рівняння в'язі задається деякою функціональною залежністю між координатами, швидкостями і часом

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N; \vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, ..., \vec{\upsilon}_N; t) = 0 \tag{4}$$

Така в'язь називається *неголономною* і *нестаціонарною*. Якщо ж в це рівняння не входитимуть швидкості, то в'язь називатиметься *голономною*. Якщо в рівняння в'язі не входить явно час, то така в'язь буде *стаціонарною*. У прикладі з маятником рівняння (3) показує, що відповідна в'язь є і голономною, і стаціонарною.

Кожна голономна в'язь зменшує число незалежних координат на одиницю. Число незалежних координат, необхідних для визначення положення системи у просторі, називається *числом ступенів вільності* системи. Якщо на систему N частинок накладено r в'язів, то така система матиме на r ступенів вільності менше:

$$\textit{число ступенів вільності} \quad s = 3N - r. \tag{5}$$

4. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа.

Як було показано в п. 3, голономні в'язі зменшують число ступенів вільності до $s=3N-r$, і в багатьох випадках більш зручно відразу ввести s незалежних змінних, задання яких повністю визначає стан системи, замість того, щоб користуватись $3N$ декартовими координатами разом з r рівняннями в'язів. Будь-які такі s величин $q_1, q_2, \ldots, q_s$, що повністю визначають положення системи з s ступенями вільності, будемо називати її *узагальненими координатами*. Відповідно, похідні від узагальнених координат по часу $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ $(i = 1,\ 2,\ldots,\ s)$ назвемо *узагальненими швидкостями*.

Рівняння, яким задовольняють узагальнені координати $q_i(t)$ як функції часу, в загальному випадку відрізняються від рівнянь Ньютона і випливають з так званого *принципу найменшої дії* (принципу Гамільтона).У відповідності з цим принципом, кожна механічна система характеризується певною функцією узагальнених координат і швидкостей та часу:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t),\ \text{або скорочено}\ L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

яку називають *функцією Лагранжа*, причому рух системи задовольняє такій умові:

Нехай в моменти часу $t = t_1$, і $t = t_2$ система займає певні положення, які характеризуються двома наборами узагальнених координат $q_i^{(1)}$ і $q_i^{(2)}$:

$$q_i(t_1) = q_i^{(1)},\ q_i(t_2) = q_i^{(2)}\quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{1}$$

Тоді між цими положеннями система рухається так, щоб ***дія*** – інтеграл виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt\ - \tag{2}$$

мала найменше значення.

Якщо механічна система має s ступенів вільності, то з принципу найменшої дії за допомогою методів варіаційного числення виводять s

рівнянь руху:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ s), \tag{3}$$

які називаються *рівняннями Лагранжа* (II роду). Їх використання має ряд переваг перед рівняннями Ньютона (3.1): по-перше, кількість рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності s і за наявності r в'язів менша за кількість рівнянь Ньютона ($s = 3N - r < 3N$); по-друге, в рівняння Лагранжа не входять невідомі сили реакції в'язів.

Принцип Лагранжа і його рівняння було покладено в основу лагранжевого підходу до опису класичної механіки замість законів Ньютона. Але особлива важливість принципу найменшої дії полягає в тому, що його можна поширити на системи, які не є чисто механічними, наприклад, на пружні середовища, електромагнітні поля тощо.

5. Функція Лагранжа механічної системи та її властивості

Для користування рівняннями Лагранжа потрібно мати правило, яке дозволяє розраховувати функцію Лагранжа будь-якої механічної системи. Для його знаходження розглянемо найпростішу систему – матеріальну точку у зовнішньому силовому полі, та порівняємо відповідні рівняння руху Ньютона і Лагранжа в одній системі декартових координат, які повинні співпадати.

Для простоти розглянемо частинку з одним ступенем вільності та припустимо, що на неї діє зовнішня сила F, яка може бути представлена у вигляді

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1}$$

де $U = U(x,t)$ – функція координат і часу. Сили, які можна представити у вигляді (1), називаються *потенціальними*, а функцію $U(x,t)$ називають *потенціалом* системи. Якщо U не залежить явно від часу, то функція $U(x)$ є не що інше, як *потенціальна енергія* частинки.

Рівняння Лагранжа (4.3) в декартових координатах в одновимірному випадку мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

а рівняння Ньютона (2.12), відповідно,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{3}$$

Безпосередньо перевіркою можна показати, що вказана вимога виконується, якщо функцію Лагранжа частинки взяти у вигляді різниці кінетичної енергії частинки $T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ і її потенціалу $U(x,t)$:

$$L = T - U = \frac{m\upsilon^2}{2} - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x,t). \tag{4}$$

Поширюючи отриманий результат на систему із в'язями, яка описується узагальненими координатами q_i і швидкостями $\dot{q}_i$, функцію Лагранжа теж будемо визначати як різницю кінетичної енергій $T = T(\dot{q}_i, q_i, t)$ і потенціалу системи $U = U(q_i, t)$, тобто

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i, q_i, t) - U(q_i, t). \tag{5}$$

Це і є загальний вираз для функції Лагранжа.

6. Інваріантність законів механіки. Принцип відносності Галілея.

В класичній механіці вважається, що всі інерціальні системи відліку рівноправні, а отже, всі закони і рівняння механіки, які встановлюються для замкненої системи в деякій ІСВ, не змінюються при переході до будь-якої іншої ІСВ. Це твердження називають *принципом відносності Галілея*.

Твердження про те, що закони механіки не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої, фактично містить такі 4 твердження:

1)Закони і рівняння механіки не змінюються при зсувах систем координат $(\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a})$. Це твердження можна трактувати як наслідок припущення про *однорідність* простору – відсутність в ньому виділених точок і, отже, виділених ІСВ.

2)Закони і рівняння механіки не змінюються при поворотах осей системи координат. Це твердження є наслідком припущення про *ізотропність* простору – відсутність в ньому виділених напрямків.

3)Закони і рівняння механіки не змінюються при зсуві по вісі часу $(\vec{r} = \vec{r}', t = t' + t_0)$. Це є наслідком *однорідності* часу – відсутність в плині часу виділених моментів.

4)Закони і рівняння механіки не змінюються також при перетвореннях, що відповідають рівномірному поступальному руху систем відліку, тобто, при перетвореннях виду:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t,\ t = t',\ \ \vec{u} = const. \qquad (1)$$

Ці перетворення називають *перетвореннями Галілея*. Продиференціювавши (1) по часу, знайдемо *класичний закон додавання швидкостей* Галілея:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}\,, \qquad (2)$$

де $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}'$ – швидкості частинки відносно двох ІСВ, що рухаються з швидкістю $\vec{u}$ одна відносно іншої.

В цілому закони і рівняння механіки не повинні змінюватися і при будь-якій комбінації цих перетворень, тобто, при виконанні їх послідовно одне за одним. Але що означає твердження, що закони і рівняння не змінюються при деякому перетворенні ІСВ? Відомо, що закони механіки записуються у вигляді рівнянь. В них як змінні входять координати, швидкості і прискорення матеріальних точок, обчислені по відношенню до деякої системи відліку, а також і функції цих змінних, наприклад, енергія, імпульс тощо. Говорять, що закони і рівняння механіки не змінюються при деяких перетвореннях систем відліку, або, що вони **інваріантні** по відношенню до цих перетворень, якщо рівняння, що виражають закони механіки, задовольняють таким двом умовам:

1. *Після виконання перетворень, пов'язаних з переходом до нової системи відліку, структура рівнянь у нових змінних має абсолютно той же вигляд, що і в старих координатах.*

2. *Всі функції координат, швидкостей і прискорень, які містяться в цих рівняннях, в результаті перетворень не міняються, тобто, як функції нових змінних вони мають абсолютно такий же вигляд , який вони мали у старих змінних.*

7. Зв'язок законів збереження з властивостями простору і часу

При русі механічної системи $2s$ величин $q_i(t)$ і $\dot{q}_i(t)$ (i=1, 2, …, s), що визначають її стан, змінюються з часом. Проте, існують такі функції цих величин, які зберігають при русі постійні значення, що залежать тільки від початкових умов. Ці функції називають *інтегралами руху*.

Число незалежних інтегралів руху для замкнутої механічної системи з s ступенями вільності дорівнює $2s$–1. Це випливає з того, що рівняння Лагранжа являють собою систему s диференційних рівнянь другого порядку і при їх інтегруванні з'являється $2s$ довільних сталих інтегрування, серед яких одна може бути вибрана у вигляді сталої t_0 (початку відліку часу). При русі механічної системи ці $2s$–1 функції узагальнених координат і швидкостей $C_\alpha(q_i, \dot{q}_i)$, $\alpha = 1,\ 2,\ ...,\ 2s-1$ зберігають постійне значення і тому є інтегралами руху. Існування інтегралів руху відповідає існуванню законів збереження у механіці, адже інтеграли руху зберігають свої сталі значення.

Серед інтегралів руху особливе значення мають *адитивні інтеграли руху*. Це такі величини, що їх значення для системи, яка складається з частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень для кожної з частин окремо. Саме адитивність придає їм особливо важливу роль. Нехай, наприклад, два тіла взаємодіють протягом деякого часу. Оскільки як до, так і після взаємодії кожен із адитивних інтегралів руху всієї системи дорівнює сумі їх значень для обох тіл окремо, то закони збереження цих величин дають можливість зробити ряд висновків про стан тіл після взаємодії, якщо їх стани до взаємодії відомі. Іншими словами, *закони збереження встановлюють рівності між певними комбінаціями величин, що характеризують початковий і кінцевий стан. При цьому для використання того чи іншого закону збереження зовсім несуттєві деталі поведінки системи в проміжні моменти часу*.

Адитивні закони збереження виявляються пов'язаними з властивостями симетрії простору і часу. Це випливає з доведеної в математиці теореми Емми Ньотер (1918 р.), яку для потреб механіки можна сформулювати наступним чином: *Будь-якому оборотному неперервному*

перетворенню координат, при якому функція дії або лагранжіан механічної системи залишається інваріантною, відповідає адитивний інтеграл руху цієї системи.

В класичній механіці розглядаються *геометричні симетрії*, які пов'язані з такими властивостями простору і часу, як однорідність і ізотропність простору та однорідність часу. Оскільки інших геометричних властивостей простору і часу немає, це привело *Анрі Пуанкаре* до формулювання *теореми*, згідно з якою в механіці існує лише сім аналітичних адитивних інтегралів руху:

1) енергія E, якає наслідком однорідності часу;
2) 3 проекції імпульсу p_x, p_y, p_z, які є наслідком однорідності простору;
3) 3 проекції моменту імпульсу M_x, M_y, M_z, які є наслідком ізотропності простору.

8. Закони збереження в класичній механіці

Збереження енергії пов'язане з *однорідністю часу*. Однорідність часу означає, що стан системи не залежить від вибору початку відліку часу. Це можливо, якщо система є замкнутою або перебуває у стаціонарному зовнішньому полі з потенціальною енергією $U(\vec{r})$. Енергією системи в лагранжевому формалізмі називають величину

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \qquad (1)$$

Закон збереження енергії: "Енергія замкнутої системи або системи в стаціонарному зовнішньому силовому полі залишається сталою". Механічні системи, енергія яких зберігається, називають *консервативними*.

З (1) випливає, що енергія системи E є адитивною величиною і дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_a} \vec{\upsilon}_a - L = \sum_a m_a \vec{\upsilon}_a^2 - \sum_a \frac{m_a \vec{\upsilon}_a^2}{2} + U = \sum_a \frac{m_a \vec{\upsilon}_a^2}{2} + U = T + U. \qquad (2)$$

Другий закон збереження випливає з *однорідності простору*. Внаслідок цієї однорідності механічні властивості замкнутої системи не

змінюються при довільному паралельному переносі системи як цілого у просторі. Величина

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_a} = m_a \vec{\upsilon}_a = \vec{p}_a \tag{4}$$

називається *імпульсом a*-ї частинки, а повний імпульс системи частинок, який у випадку замкнутої системи зберігається, дорівнює:

$$\vec{p} = \sum_a \vec{p}_a = \sum m_a \vec{\upsilon}_a = const\,. \tag{5}$$

Закон збереження імпульсу: *В замкнутій механічній системі повний імпульс частинок залишається при русі незмінним.* Формула (5) показує, що імпульс системи є адитивним, тобто дорівнює сумі імпульсів частинок не залежно від їх взаємодії.

Закон збереження моменту імпульсу випливає з *ізотропності простору*, згідно з якою механічні властивості замкнутої системи не змінюються при довільному повороті системи як цілого в просторі. Момент імпульсу окремої частинки дорівнює:

$$\vec{M}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a\,. \tag{6}$$

Момент імпульсу системи частинок називають величину

$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a \left[\vec{r}_a \times \vec{p}_a\right]. \tag{7}$$

Він є адитивною величиною, тому що дорівнює сумі моментів імпульсів окремих частинок.

Закон збереження моменту імпульсу: *Повний момент імпульсу замкнутої системи частинок зберігається*.

Момент імпульсу системи частинок у довільному зовнішньому силовому полі у загальному випадку не зберігається. Виняток складають *центрально-симетричні поля*. У такому полі сила, яка діє на кожну частинку, має напрямок, що проходить через одну і ту ж саму нерухому точку *O*, яка називається центром поля, а модуль сили залежить від відстані *r* частинки до цієї точки. Потенціальна енергія в такому полі залежить тільки від відстані $U=U(r)$. Тому довільний поворот системи в просторі навколо точки *O* не змінює механічні властивості системи.

Отже, хоч в даному випадку система і не замкнута, її повний момент імпульсу все ж залишатиметься сталим, але тільки відносно точки O. Для замкнутої системи момент імпульсу зберігається відносно будь-якої точки.

9. Рівняння Гамільтона

Рівняння Лагранжа для системи з s ступенями вільності є системою s диференціальних рівнянь 2-го порядку. Незалежними змінними у цих рівняннях є узагальнені координати q_i і узагальнені швидкості $\dot{q}_i$. Ірландський математик Вільям Гамільтон отримав рівняння руху, в яких незалежними змінними є узагальнені координати q_i і узагальнені імпульси p_i, а в якості функції, що характеризує механічну систему, служить енергія.

Запишемо вираз для енергії системи через функцію Лагранжа:

$$E = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{1}$$

Зробимо в (1) заміну $\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i$ і перейдемо до змінних q_i і p_i. Енергію (1), представлену як функцію узагальнених координат та імпульсів, називають *функцією Гамільтона* (або *гамільтоніаном*) і позначають H; за визначенням:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{2}$$

Рівняння руху Гамільтона мають вигляд:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ s); \tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4}$$

Систему рівнянь (3) називають рівняннями Гамільтона. На відміну від рівнянь Лагранжа, це є система $2s$ диференціальних рівнянь 1-го порядку. В механіці рівняння Гамільтона принципово нового нічого не дають, але вони є більш симетричними за рівняння Лагранжа і відкривають великі можливості для узагальнень в електродинаміці, квантовій механіці і статистичній фізиці.

Повна похідна функції Гамільтона по часу дорівнює її частинній похідній:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{5}$$

З цієї рівності робимо висновок: якщо функція Гамільтона не залежить явно від часу (тобто $\partial H / \partial t = 0$), то вона зберігає своє значення, оскільки, згідно (4), $dH / dt = 0$, що означає сталість цієї функції з часом і збереження енергії: $H = const = E$.

Назвемо *циклічною* координатою q_i таку координату, яка не входить явно у функцію Гамільтона H. Тоді для неї з рівнянь Гамільтона випливає:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{p}_i = 0 \;\Rightarrow\; p_i = const\,. \tag{6}$$

Таким чином, узагальнений імпульс, який відповідає циклічній координаті, зберігається під час руху системи. Із визначення узагальненого імпульсу $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ і рівняння Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ випливає, що якщо q_i є циклічною координатою функції Гамільтона, то вона буде також циклічною координатою функції Лагранжа, тобто також не входить у функцію Лагранжа L.

ТЕМА 2. ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

10. Одновимірний рух

Одновимірним називають рух системи з одним ступенем вільності. Якщо спрямувати вісь *Ox* по прямій, вздовж якої рухається дана матеріальна точка, в такій декартовій системі координат її функція Лагранжа дорівнюватиме:

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1}$$

Рівняння Лагранжа в одновимірному випадку зводиться до рівняння Ньютона (5.3):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = X, \tag{2}$$

де m – маса матеріальної точки, $\ddot{x}$ – її прискорення, X – рівнодійна всіх сил, прикладених до точки. Рівняння руху (2) інтегрується в загальному вигляді, але є декілька частинних випадків, коли пошук закону руху спрощується.

Випадок 1. Знайти закон руху матеріальної точки маси m, якщо до неї прикладена сила $X(t)$, що залежить тільки від часу t. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки можна записати в такому вигляді: $m\ddot{x} = X(t)$. Запроваджуючи нову змінну $\dot{x} = \upsilon$, можна це рівняння переписати так:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{m}X(t),$$

звідки

$$\upsilon = \frac{1}{m}\int X(t)dt + C_1. \tag{3}$$

Подальше інтегрування дає остаточну відповідь:

$$x = \int \upsilon dt = \frac{1}{m}\int\left[\int X(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 знаходять з початкових умов задачі.

Випадок 2. Знайти закон руху матеріальної точки масою m, на яку діє сила $X(x)$, що є функцією тільки координати x цієї точки. Щоб встановити закон руху точки, застосуємо диференціальне рівняння її руху:

$$m\ddot{x} = X(x). \tag{5}$$

Виконавши в (5) перетворення

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x} \tag{6}$$

з наступною заміною $\dot{x} = \upsilon$, рівняння руху точки перепишемо так: $\upsilon d\upsilon = \frac{1}{m}X(x)dx$. Безпосереднім інтегруванням дістанемо:

$$\upsilon^2 = \frac{2}{m}\int X(x)dx + C_1,\ \upsilon = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx + C_1},\ dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx + C_1}}.$$

Подальше інтегрування дає:

$$t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int X(x)dx + C_1}} + C_2. \tag{7}$$

Якщо позначити

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\int X(x)dx + C_1}} + C_2 = \Phi(x, C_1, C_2),$$

то можна написати залежність між часом та координатою рухомої точки у вигляді: $t = \Phi(x, C_1, C_2)$. Закон руху матеріальної точки дістанемо, якщо розв'яжемо останнє рівняння відносно x:

$$x = f(t, C_1, C_2).$$

Випадок 3. Визначити закон руху матеріальної точки масою m, що рухається прямолінійно під дією сили $X(\upsilon)$, яка є функцією лише швидкості υ.

Застосовуємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$m\ddot{x} = X(\dot{x}) \quad \text{або} \quad m\frac{d\upsilon}{dt} = X(\upsilon), \tag{8}$$

де $\upsilon = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$. Відокремлюючи у рівнянні (8) змінні, отримаємо:

$$\frac{d\upsilon}{X(\upsilon)} = \frac{1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\upsilon}{X(\upsilon)} + C_1 = \frac{1}{m}t\,. \tag{9}$$

Якщо запровадити нове позначення: $m\left[\int \dfrac{d\upsilon}{X(\upsilon)} + C_1\right] = \Phi\left(\upsilon, C_1\right)$, то останнє рівняння матиме вигляд: $\Phi\left(\upsilon, C_1\right) = t$ або $\Phi\left(\dot{x}, C_1\right) = t$. Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, знайдемо: $\dot{x} = f(t, C_1)$, звідки

$$x = \int f(t, C_1)dt + C_2\,. \tag{10}$$

Якщо рівняння $\Phi\left(\upsilon, C_1\right) = t$ відносно υ розв'язати не можна, то слід зробити так. Користуючись перетворенням (6), рівняння руху матеріальної точки (8) запишемо у вигляді: $\dfrac{m\dot{x}d\dot{x}}{X(\dot{x})} = dx$. Після інтегрування знайдемо: $x = m\int \dfrac{\dot{x}d\dot{x}}{X(\dot{x})} + C_3$. Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, дістанемо: $\dot{x} = \varphi\left(x, C_3\right)$. Інтегруючи, знайдемо:

$$t = \int \frac{dx}{\varphi\left(x, C_3\right)} + C_4\,. \tag{11}$$

У випадку стаціонарного потенціального поля замість розв'язування рівнянь руху доцільно скористатись їх першим інтегралом руху, який виражає закон збереження енергії. Так, для функції Лагранжа (1) маємо:

$$T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U\left(x\right) = E = const\,. \tag{12}$$

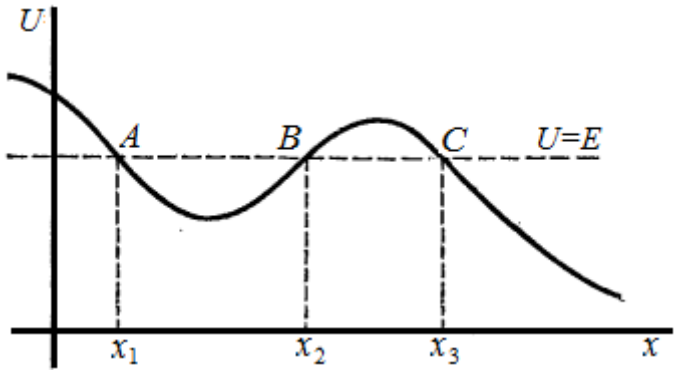
Це є диференціальне рівняння першого порядку, яке інтегрується методом розділення змінних. З формули (12) знайдемо:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E - U\left(x\right)\right)}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - U\left(x\right)\right)}} = dt\,,$$

звідки отримаємо закон руху у неявній формі:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const\,. \qquad (13)$$

Роль двох довільних сталих у цьому розв'язку рівняння руху відіграють повна енергія E і стала інтегрування *const*.



Оскільки кінетична енергія – величина суттєво додатна, то при русі повна енергія завжди більше потенціальної, тобто рух може відбуватись тільки в тих областях простору, де $U(x) < E$. Нехай, наприклад, залежність $U(x)$ має вигляд, зображений на рисунку. Провівши на цьому ж графіку горизонтальну пряму $U(x) = E$, що відповідає заданому значенню повної енергії, ми відразу ж вияснимо можливі області руху. Так, у зображеному випадку рух може відбуватися лише в області AB або в області справа від C. Точки x_1, x_2, x_3, в яких потенціальна енергія дорівнює повній:

$$U(x) = E\,, \qquad (14)$$

визначають межі руху. Вони є точками зупинки, оскільки в них швидкість обертається в 0. Якщо область руху обмежена двома такими точками (x_1, x_2), то рух відбувається в обмеженій області простору і є, як кажуть, *фінітним*. Таку область обмеженого руху, визначену умовою $U(x) < E$, називають *потенціальною ямою.* Якщо ж область руху не обмежена або обмежена лише з одного боку (x_3), то рух є *інфінітним*, оскільки з часом частинка віддаляється на нескінченність.

Одновимірний фінітний рух є *коливальним* – частинка здійснює періодично повторюваний рух між двома межами (на рисунку – в потенціальній ямі між точками x_1 і x_2). Внаслідок *ізотропності часу* в рівняннях механіки (незмінності рівнянь руху при заміні t на $-t$) час

руху від x_1 до x_2 дорівнює часу зворотного руху від x_2 до x_1. Тому період коливань T, за який точка пройде від x_1 до x_2 і назад, дорівнює подвоєному часу проходження відрізку (x_1, x_2), або згідно з (13):

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \qquad (15)$$

причому межі x_1 і x_2 є коренями рівняння (14) при даному значенні E. Ця формула визначає період руху в залежності від повної енергії частинки.

11. Центр інерції

Імпульс замкнутої механічної системи має різні значення по відношенню до різних ІСВ. Якщо ІСВ K' рухається відносно ІСВ K зі швидкістю $\vec{u}$, то швидкість $\vec{\upsilon}'_a$ і $\vec{\upsilon}_a$ частинок по підношенню до цих систем зв'язані класичним законом додавання швидкостей Галілея (6.2) $\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}'_a + \vec{u}$. Тому зв'язок між значеннями $\vec{P}$ і $\vec{P}'$ імпульсу в цих системах дається формулою

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{\upsilon}_a = \sum_a m_a \vec{\upsilon}'_a + \vec{u} \sum_a m_a \text{, або } \vec{P} = \vec{P}' + \vec{u} \sum_a m_a . \qquad (1)$$

Зокрема, завжди існує така ІСВ K', в якій повний імпульс $\vec{P}' = 0$. З (1) знайдемо, що швидкість цієї ІСВ відносно ІСВ K дорівнює:

$$\vec{u} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{\upsilon}_a}{\sum_a m_a}. \qquad (2)$$

Якщо повний імпульс механічної системи в деякій ІСВ K' дорівнює 0, то говорять, що вона перебуває відносно цієї ІСВ у *стані спокою*. Відповідно швидкість $\vec{u}$ в (2) означає «швидкість як цілого» механічної системи з відмінним від 0 імпульсом відносно ІСВ K. Отже, закон збереження імпульсу дозволяє ввести такі поняття як спокій і швидкість механічної системи в цілому.

Формула (2) показує, що зв'язок між імпульсом $\vec{P}$ і швидкістю $\vec{u}$ системи як цілого такий же, який був би між імпульсом і швидкістю однієї матеріальної точки з масою $\mu = \sum m_a$, що дорівнює сумі мас всіх

частинок системи. Права сторона формули (2) може розглядатися як повна похідна по часу від виразу

$$\vec{R}_C = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}. \qquad (3)$$

Отже, швидкість системи як цілого є швидкістю переміщення в просторі точки, радіус–вектор якої дається формулою (3). Таку точку називають *центром інерції* системи. Закон збереження імпульсу замкнутої системи можна тоді сформулювати як твердження, що її центр інерції рухається прямолінійно і рівномірно.

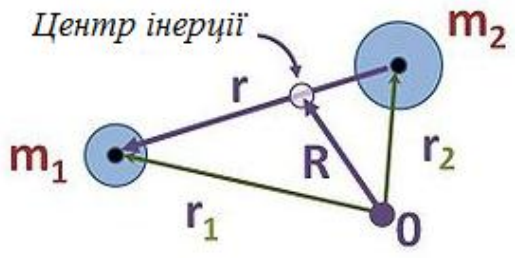
Для тіла з неперервним розподілом маси з густиною $\rho(\vec{r})$, зробивши в (3) заміну $m_a \to dm = \rho(\vec{r})dV$ і перейшовши від підсумовування до інтегрування, отримаємо формулу для центру інерції

$$\vec{R}_C = \frac{\int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{\int\limits_V \rho(\vec{r})dV}. \qquad (3')$$

При вивченні механічних властивостей замкнутої системи зручно користуватися тією ІСВ, в якій центр інерції перебуває у стані спокою. Тим самим з розгляду виключається рівномірний і прямолінійний рух системи як цілого.

12. Задача двох тіл

Розглянемо систему, яка складається з двох взаємодіючих тіл масами m_1 і m_2. Потенціальна енергія їх взаємодії залежить лише від відстані між ними, тобто від модуля різниці їх радіус – векторів. Тому функція Лагранжа такої системи дорівнює



$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right). \qquad (1)$$

Введемо вектор взаємної відстані обох точок

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (2)$$

і помістимо початок координат в центр інерції, що дає:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \tag{3}$$

Із рівностей (2) і (3) знаходимо:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\,. \tag{4}$$

Підставляючи ці вирази в (1), отримаємо:

$$L = \frac{m_1}{2} \cdot \frac{{m_2}^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{{m_1}^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U\left(r\right) =$$

$$= \frac{m_1 m_2\left(m_1 + m_2\right)}{2\left(m_1 + m_2\right)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U\left(r\right)$$

або

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U\left(r\right), \tag{5}$$

де позначено

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

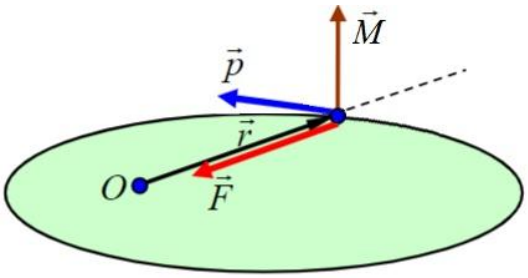
Величина m називається *зведеною* масою системи двох тіл. Функція (5) формально співпадає з формулою Лагранжа однієї матеріальної точки із зведеною масою m, що рухається у зовнішньому потенціальному полі $U(r)$, симетричному відносно нерухомого початку координат. Таке поле називають *центральним*. Таким чином, задача про рух двох взаємодіючих тіл в результаті переходу до системи відліку, пов'язаної з їх центром інерції, розбивається на дві окремі задачі – про рух їх центру інерції і про відносний рух тіл один щодо одного. При цьому центр інерції замкненої системи рухається рівномірно прямолінійно або залишається нерухомим. Це дозволяє зосередитись на розв'язанні задачі про відносний рух тіл, яка зводиться до задачі про рух однієї точки у центральному зовнішньому полі $U(r)$. Знайшовши розв'язок $\vec{r} = \vec{r}(t)$ цієї задачі за формулами (4), визначаються закони руху $\vec{r}_1(t)$ та $\vec{r}_2(t)$ кожної частинки з масами m_1 і m_2 окремо по відношенню до їх спільного центру інерції.

13. Рух частинки в центральному полі

Згідно з результатами попереднього параграфа, задача про рух двох тіл зводиться до задачі про визначення руху однієї частинки у зовнішньому полі, в якому потенціальна енергія залежить лише від її відстані r до певної нерухомої точки. Таке поле називають центральним, а відповідну точку – центром поля. Таким чином, ми прийшли до задачі про визначення руху частинки у центральному силовому полі. При цьому сила, що діє частинку в центральному полі:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U(r) = -\frac{dU}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

за абсолютною величиною теж залежить тільки від r і напрямлена в кожній точці вздовж радіус-вектора $\vec{r}$. Як було вказано в п. 10, при русі в центральному полі зберігається момент імпульсу системи відносно центра поля. Для однієї частинки це є $\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}] = const$. Оскільки вектори $\vec{M}$ і $\vec{r}$ взаємно перпендикулярні, сталість напрямку вектора $\vec{M}$ означає, що при русі частинки її радіус-вектор $\vec{r}$ весь час залишається в одній площині – тій, яка перпендикулярна $\vec{M}$ (рис.). Отже, траєкторія руху частинки в центральному полі лежить цілком в одній площині. Такий рух прийнято називати *плоским*.



Будемо визначати положення частинки за допомогою полярних координат r і φ, помістивши початок координат в центрі поля. В цих координатах функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = \frac{m\upsilon^2}{2} - U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r). \qquad (1)$$

Тут враховано вираз для квадрата швидкості у полярній системі координат:

$$\upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\perp^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

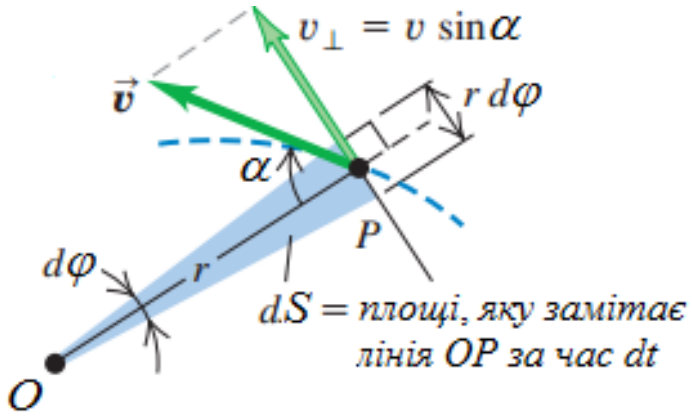
У функцію Лагранжа не ввійшла явно координата φ. Як відзначалось у п. 9, узагальнені координати, які не входять явно у функцію Ла-

гранжа, є циклічними, а відповідні їм узагальнені імпульси зберігаються – є інтегралами руху:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const\,.$$

У нашому випадку узагальнений імпульс $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = m\upsilon_\perp r$ співпадає з моментом імпульсу, так що ми повертаємось до відомого вже нам закону збереження моменту імпульсу:

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = mr\cdot r\dot{\varphi} = mr\upsilon_\perp = M \quad \Rightarrow \quad M = mr^2\dot{\varphi} = const\,. \qquad (2)$$



Відмітимо, що для плоского руху однієї частинки в центральному полі цей закон має просту геометричну інтерпретацію. Вираз $dS = \dfrac{1}{2}r\cdot rd\varphi$ дорівнює площі сектора, утвореного двома нескінченно близькими радіус-векторами і елементом дуги траєкторії (див. рис.). Відповідно, похідну $\dot{S} = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ називають *секторіальною швидкістю* частинки в центральному полі. Порівнюючи вираз для $\dot{S}$ з (2), подамо момент імпульсу частинки у вигляді:

$$M = 2m\dot{S} = const \quad \Rightarrow \quad \dot{S} = const\,, \qquad (3)$$

тобто, збереження моменту імпульсу означає сталість секторіальної швидкості – *за рівні проміжки часу радіус-вектор рухомої частинки описує рівні площі*. Цей висновок відповідає *другому закону Кеплера* руху планет.

Для знаходження траєкторії частинки краще виходити із законів збереження моменту імпульсу та енергії, ніж з рівнянь Лагранжа. Такий шлях простіше, оскільки в рівняння Лагранжа входять другі похідні координат по часу, а в енергію і момент імпульсу – лише перші.

Якщо виразити $\dot{\varphi}$ через M з (2) і підставити у вираз для енергії, отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}=\frac{M}{mr^2} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \quad (4)$$

Звідси

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{m^2r^2}}\,. \quad (5)$$

Відокремлюючи в (5) змінні та інтегруючи, отримаємо:

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}, \quad t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+const\,. \quad (6)$$

Далі, переписавши (2) у вигляді $d\varphi=\frac{M}{mr^2}dt$ і підставивши dt з (6) та інтегруючи, знаходимо:

$$\varphi(r)=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{r^2}}}+const\,. \quad (7)$$

Формули (6) і (7) розв’язують у загальному вигляді поставлену задачу. Формула (7) визначає зв’язок між r і φ, тобто рівняння траєкторії в полярних координатах. Формула (6) визначає у неявному вигляді відстань r рухомої точки від центру як функцію часу. Відмітимо, що кут φ завжди міняється з часом монотонно – з (2) видно, що $\dot{\varphi}$ ніколи не змінює знаку.

Вираз (4) показує, що радіальну частинку руху можна розглядати як одновимірний рух у полі з «ефективною» потенціальною енергією

$$U_{ef}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2} \quad \left(E\geq U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}\right). \quad (8)$$

Величину $\frac{M^2}{2mr^2}$ називають відцентровою енергією. Значення r, для яких

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E, \tag{9}$$

визначають межі області руху по відстані від центра. При виконанні рівності (9) радіальна швидкість $\dot{r}$ обертається в 0. Це не означає зупинки (як при істинно одновимірному русі), оскільки при цьому кутова швидкість $\dot{\varphi}$ не обертається в 0. При $\dot{r}=0$ відбувається перехід функції $r(t)$ від збільшення до зменшення і навпаки. Якщо область допустимої зміни *r* визначена лише однією умовою $r \geq r_{\min}$, то рух частинки інфінітний – її траєкторія приходить з нескінченності і повертається до нескінченності. Якщо ж область зміни *r* має дві межі $r_{\min}$ і $r_{\max}$, то рух є фінітним і траєкторія цілком лежить в середині кільця, обмеженого колами $r=r_{\max}$ і $r=r_{\min}$. Але це не означає, що траєкторія обов'язково є замкнутою кривою. За час, протягом якого *r* змінюється від $r_{\max}$ до $r_{\min}$, потім до $r_{\max}$, радіус-вектор повернеться на кут $\Delta\varphi$, який згідно з (7) дорівнює

$$\Delta\varphi=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E-U\right)-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{10}$$

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб цей кут був раціональною частиною від 2π, тобто $\Delta\varphi=2\pi\frac{m}{n}$, де *m* і *n* – цілі числа. Тоді через *n* повторень усього періоду радіус-вектор точки, зробивши *m* повних обертів, співпаде зі своїм початковим значенням, тобто траєкторія замкнеться. Але такі випадки є винятковими, і при довільному $U(r)$ кут $\Delta\varphi$ не є раціональною частиною від 2π. Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не є замкнутою: вона нескінченне число раз проходитиме через мінімальну і максимальну відстань і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними колами.

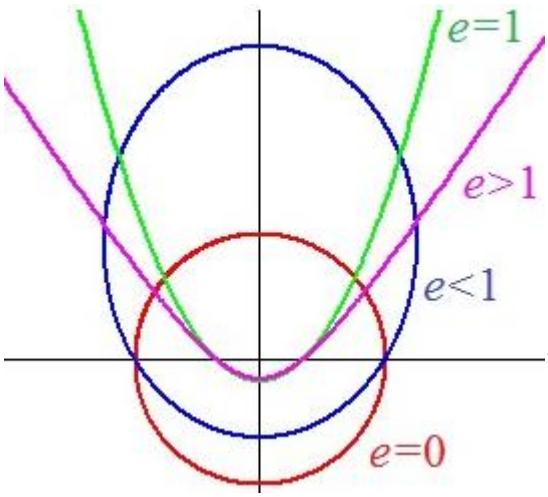
Виявляється, що існує лише 2 типи центральних полів, в яких всі траєкторії фінітних рухів замкнуті. Це поля, пропорційні r^2 – так зва-

ний просторовий осцилятор, і поля типу $U(r) \sim r^{-1}$. До полів останнього типу відносяться, зокрема, ньютонівське поле всесвітнього тяжіння та кулонівське поле точкового заряду, причому гравітаційна взаємодія має лише характер притягання, тоді як електрична може мати характер як притягання, так і відштовхування. У випадку поля притягання потенціальна енергія $U = -\dfrac{\alpha}{r}$ $\left(\alpha_{гр} = Gmm_1, \alpha_{Кул} = kq_1q_2\right)$.

Зокрема, форма траєкторії матеріальної точки в полі тяжіння сферичної маси отримується з формули (7) після інтегрування, якщо в неї підставити вираз для потенціальної енергії гравітаційної взаємодії $U = -G\dfrac{mm_1}{r}$; її рівняння в полярних координатах має вигляд:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \ , \qquad (11)$$

де $p = \dfrac{M^2}{m\alpha_{гр}}$ і $e = \sqrt{1 + 2EM^2 / m{\alpha_{гр}}^2}$ – так звані *параметр* і *ексцентриситет* траєкторії. Рівняння (11) є рівнянням конічного перерізу з фокусом у початку координат. З (9) випливає, що:



1) при $E < 0$ ексцентриситет $e<1$ і орбіта є еліпсом. При $e=0$ рівняння (11) стає рівнянням кола з радіусом $r=p$;

2) при $e=1$ ($E=0$) рівняння (11) визначає параболу;

3) при $E>0$ маємо $e>1$, а рівняння (11) визначає гіперболу.

Отже, ми встановили, що рух в полі всесвітнього тяжіння є фінітним при $e<1$ і інфінітним при $e\geq 1$. Тіла, що здійснюють фінітні рухи, називають *планетами* або *супутниками*. Проведений аналіз приводить до трьох наслідків, які були вперше виявлені Кеплером при обробці спостережень за рухом планет сонячної системи і називається *законами Кеплера*:

1) Траєкторіями всіх планет служать еліпси, в спільному фокусі

яких розташовані Сонце;

2) Всі планети сонячної системи здійснюють плоский рух з сталою секторіальною швидкістю;

3) Відношення квадратів періодів T обертання планет до кубів великих піввісей їх еліптичних траєкторій однакове для всіх планет:

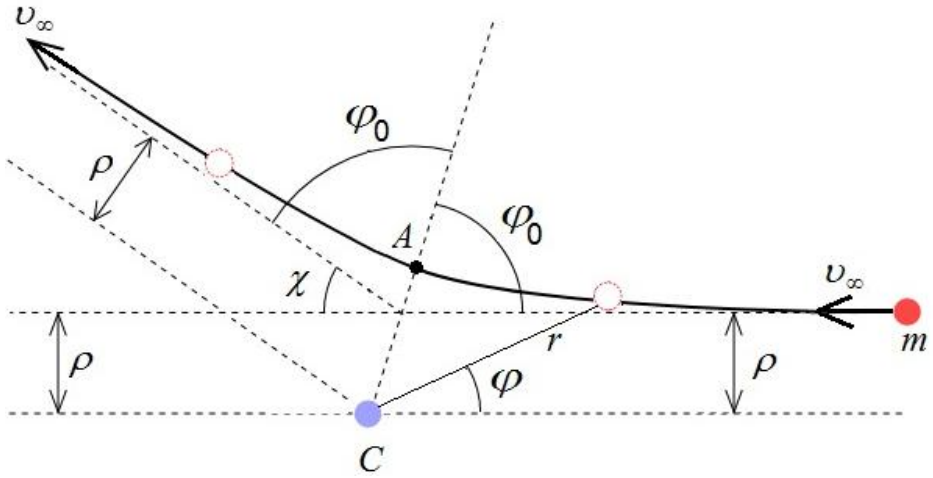
$$T^2 / a^3 = const. \qquad (12)$$

ТЕМА 2. ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ (продовження)

14. Розсіяння частинок

В п.12 було показано, що задача про рух двох взаємодіючих частинок зводиться до задачі про рух частинки зі зведеною масою $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в центральному полі сил, причому відстань цієї частинки від центра сил дорівнює відстані між взаємодіючими частинками. Знайшовши траєкторію уявної частинки маси m, легко знайти траєкторію обох частинок.

Скористаємося цим прийомом для вивчення процесу *розсіяння* частинки маси m_1 частинкою маси m_2, під яким розуміють зміна напрямку руху частинок внаслідок їх зіткнень. В експериментах з розсіяння зазвичай, з причин зручності проведення експерименту, використовується лабораторна система відліку, в якій частинка маси m_2 – мішень – до розсіяння була нерухомою.



Але для теоретичного дослідження доцільно перейти до системи відліку, прив’язаної до центру інерції системи цих двох частинок. Тоді, у відповідності з висновками п.п. 12-13, приходимо до задачі про рух частинки зі зведеною масою m, що рухається в центральному силовому полі, центр якого співпадає з центром інерції C. На великих відстанях від центру поле будемо вважати таким слабким, що рух частинки далеко від центру можна вважати прямолінійним.

При вивченні розсіяння частинок нас цікавить не стільки сам процес розсіяння при проходженні однієї частинки поблизу другої, скільки кінцевий результат процесу розсіяння, тобто нас цікавлять такі величини, як кут розсіяння χ або ж ймовірність того, що розсіяння відбудеться на певний кут. Початкові умови задаються енергією і моментом імпульсу падаючих частинок. Нехай υ_∞ – швидкість налітаючих частинок на нескінченості. Введемо в розгляд *прицільну відстань* ρ – найменшу відстань, на якій падаюча частинка пройшла б біля розсіювального центру, якби поле не діяло б на неї (див. рис.). Траєкторія руху частинки в центральному полі симетрична по відношенню до прямої, проведеної в найближчу до центра точку орбіти (*CA*). Тому обидві асимптоти орбіти перетинають пряму *CA* під однаковими кутами φ_0. Тоді кут розсіяння частинки χ (кут між початковим і кінцевим напрямками руху) дорівнює, як видно з рисунку,

$$\chi = |\,\pi - 2\varphi_0\,|. \tag{1}$$

Кут φ_0 можна визначити за формулою (13.7) у вигляді інтегралу:

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M / r^2}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - M^2 / r^2}} dr\ , \tag{2}$$

взятому в межах між найближчим до центра $\left(r_{\min} = CA\right)$ і нескінченно віддаленим положенням частинки. Пригадаємо, що $r_{\min}$ є коренем виразу, що стоїть під знаком радикала. При інфінітному русі, з яким ми маємо тут справу, у цьому інтегралі зручно перейти від енергії *E* і моменту імпульсу *M*, які зберігаються під час руху, до інших характеристик: швидкості υ_∞ і прицільної відстані ρ за формулами:

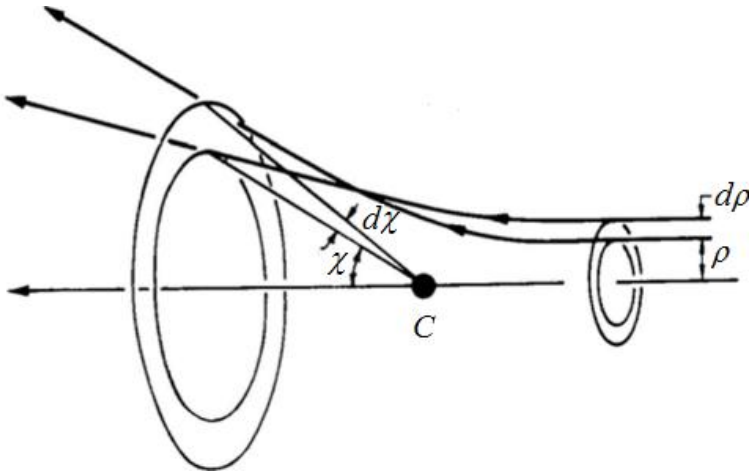
$$E = \frac{m\upsilon_\infty^{\,2}}{2},\ M = m\upsilon_\infty \rho\,. \tag{3}$$

Тоді формула (2) набуде вигляду:

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho / r^2}{\sqrt{1 - \rho^2 / r^2 - 2U / m\upsilon_\infty^{\,2}}} dr\,. \tag{4}$$

Разом з (1) вона виражає залежність кута розсіяння від прицільної відстані $\chi(\rho)$.

Зауважимо, що у експериментах доводиться, як правило, мати справу розсіянням не однієї частинки, а цілого пучка однакових частинок, які падають на розсіювальний центр з однаковою швидкістю $\vec{\upsilon}_\infty$. Різні частинки в пучку мають різні прицільні відстані і тому будуть розсіюватися під різними кутами χ.



Нехай *dN* – кількість частинок, розсіяних за одиницю часу на кути, які лежать в інтервалі між χ і $\chi+\chi$, а *n* – щільність пучка, тобто число частинок, які проходять за одиницю часу через одиницю площі поперечного перерізу пучка. Відношення

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{5}$$

називають *поперечним або ефективним перерізом розсіяння*. Воно має розмірність площі і є важливою характеристикою процесу розсіяння, тому що визначається тільки видом розсіювального поля. Якщо пучок однорідний по перерізу (щільність пучка *n=const*), то потік частинок, прицільна відстань яких лежить в межах від ρ до $\rho+d\rho$, дорівнює $dN=n\cdot 2\pi\rho d\rho$ (потік = густина потоку × площа). Цей потік розсіюється під кутами від χ до $\chi+d\chi$. Звідси ефективний переріз у випадку однорідного потоку дорівнює:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho, \tag{6}$$

або, враховуючи залежність $\rho(\chi)$, обернену до $\chi(\rho)$,

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi. \tag{7}$$

Часто $d\sigma$ відносять не до елемента плоского кута $d\chi$, а до елемента тілесного кута $d\Omega$. Тілесний кут між конусами з кутами розхилу χ і $\chi+\chi$ є $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$. Тому з (7) отримаємо поперечний переріз розсіяння в тілесний кут $d\Omega$:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega. \qquad (8)$$

Формули (7) і (8) визначають ефективний переріз розсіяння в системі центра інерції. Для знаходження ж ефективного перерізу в лабораторній СВ, в якій використовуються нерухомі частинки-мішені, необхідно виразити в цих формулах кут розсіяння χ через відповідний кут розсіяння θ в лабораторній СВ. Для цього є відповідні формули перетворень, але вони не входять до питань даного розгляду.

15. Формула Резерфорда

Одним з важливих застосувань отриманих в п.14 формул є розсіяння заряджених частинок у кулонівському полі: $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$ ($\alpha = q_1 q_2$ в гаусовій системі одиниць або $\alpha = q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0$ в системі одиниць СІ). Підставивши $U(r)$ в (14.4), отримаємо після елементарного інтегрування

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\alpha / m\upsilon_\infty^2\rho}{\sqrt{1+\left(\alpha / m\upsilon_\infty^2\rho\right)^2}}, \quad \operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{\alpha}{m{\upsilon_\infty}^2\rho} \text{ і } \rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2{\upsilon_\infty}^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0.$$

Оскільки з (14.1) випливає $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$, отримаємо співвідношення між прицільною відстанню і кутом розсіяння

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2{\upsilon_\infty}^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}. \qquad (1)$$

Диференціюючи цей вираз по χ і підставляючи в (14.7-8), знайдемо вирази для ефективного перерізу розсіяння заряджених частинок:

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi = \pi\left|\frac{d\rho^2}{d\chi}\right| d\chi = \pi\left(\frac{\alpha}{m{\upsilon_\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos\chi/2}{\sin^3\chi/2} d\chi \qquad (2)$$

та

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty{}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \qquad (3)$$

Це є відомі *формули Резерфорда*, які були використані для пояснення дослідів по розсіянню α-частинок, що привели до відкриття атомного ядра. Відмітимо, що згідно з (2) і (3) ефективний переріз не залежить від знаку α, тому отриманий результат відноситься в рівній мірі до розсіяння як заряджених частинок одного знаку (відштовхування), так і різного знаку (притягання).

Формули (2) і (3) отримані з розгляду процесу розсіяння в системі відліку, пов'язаній з центром інерції системи взаємодіючих частинок, які є в цій системі відліку нерухомими центрами розсіяння. Але в реальних експериментах по розсіянню нерухомими є частинки мішені, а тому центр інерції системи буде рухатись. Це означає, що експериментальні дані по розсіянню, отримані в лабораторній системі відліку, повинні бути перераховані до системи центра інерції, перш ніж можна буде користуватись отриманими вище формулами.

Проте у випадку, коли $m_1 << m_2$ (тобто, розсіювані частинки набагато легше розсіюючих), наближено кут розсіяння першої частинки $\theta_1 \approx \chi$ і формули (2) та (3) залишаються вірними і в лабораторній системі відліку. В дослідах Резерфорда спостерігали розсіяння α-частинок (ядер гелію He^{++}) масою m_α кулонівським полем важкого ядра з зарядом Ze і масою $m_я \gg m_\alpha$. Тоді: $\alpha = 2Ze^2$, $m = \frac{m_\alpha m_я}{m_\alpha + m_я} \approx m_\alpha$, і з (2) та (3) матимемо

$$d\sigma = \pi \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha \upsilon_\infty{}^2} \right)^2 \frac{\cos\left(\theta/2\right)}{\sin^3\left(\theta/2\right)} d\theta, \quad d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha \upsilon_\infty{}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\left(\theta/2\right)}.$$

Ці формули були успішно підтверджені в ході експериментів Резерфорда і його учнів.

16. Рух тіла змінної маси

В сучасній техніці велике практичне значення має задача про рух тіла змінної маси. Нехай зміна маси тіла відбувається за рахунок неперервного відділення від тіла деяких його частин, причому за нескінченно малий проміжок часу відділяється частинка нескінченно малої маси. Але швидкість частинки, що відділяється, від швидкості тіла відрізняється на скінчену величину. Знайдемо рівняння руху тіла, припустивши, що тіло і частинку можна вважати матеріальними точками.

Відділення частинок від тіла відбувається за рахунок внутрішніх сил системи тіло-частинка. Отже, зміна імпульсу задовольняє закону Ньютона

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{зовн}. \tag{1}$$

Підрахуємо цю зміну. В момент часу t (до відділення частинки від тіла) імпульс тіла дорівнював:

$$\vec{P}(t) = m\vec{\upsilon}, \tag{2}$$

де m – маса тіла в момент t, $\vec{\upsilon}$ – швидкість тіла в той же момент часу відносно деякої ІСВ. В момент часу $t+dt$ (після відділення частинки) імпульс системи дорівнює сумі імпульсу тіла і імпульсу частинки:

$$\vec{P}(t+dt) = (m-|dm|)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+|dm|\cdot\vec{\upsilon}_1 \tag{3}$$

де $d\vec{\upsilon}$ – зміна швидкості за час dt, dm – зменшення маси тіла, відповідно $|dm|$ – маса частинки, що відділяється, $\vec{\upsilon}_1$ – швидкість цієї частинки відносно ІСВ. Отже, зміна імпульсу системи з точністю до нескінчено малих другого порядку дорівнює

$$d\vec{P} = md\vec{\upsilon}+|dm|\cdot(\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}). \tag{4}$$

Підставляючи цей вираз в (1), отримаємо рівняння руху точки зі змінною масою, так зване *рівняння Мещерського*:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{зовн} + \frac{dm}{dt}\vec{u}, \tag{5}$$

де $\vec{u} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}$ – швидкість частинок, що віддаляються, відносно тіла,

$\vec{F}_{зовн}$ – зовнішня сила, що діє на тіло, а $\frac{dm}{dt} < 0$.

Для прикладу розглянемо рух ракети при відсутності зовнішнього поля. Нехай $\vec{u}$ – швидкість частинок (продуктів згорання палива) – є сталою і напрямлена протилежно до $\vec{\upsilon}_0$ – швидкості тіла в початковий момент часу. Помноживши праву і ліву частину рівняння (5) на *dt* і проектуючи їх на вісь, напрямлену вздовж вектора $\vec{\upsilon}_0$, отримаємо $md\upsilon = -udm$, звідки в результаті інтегрування знайдемо:

$$d\upsilon = -u\frac{dm}{m};\quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m};\quad \upsilon - \upsilon_0 = -u\ln\frac{m}{m_0} = u\ln\frac{m_0}{m},$$

звідки остаточно знаходимо швидкість ракети

$$\upsilon = \upsilon_0 + u\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (6)$$

Рівність (6) називається *формулою Ціолковського*. Вона показує, що швидкість, набута ракетою, залежить тільки від величини відносної швидкості частинок і від зміни маси тіла і не залежить від того, по якому закону змінювалась маса тіла.

17. Вільні коливання системи без тертя

Розглянемо систему з одним ступенем вільності, в якій відсутні сили тертя. Потенціальна енергія такої системи має вигляд $U=U(q)$, де q – узагальнена координата. В положенні рівноваги $q=q_0$ діюча на систему сила $F = -\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$, а потенціальна енергія має мінімум. Відхилення від такого положення призводить до виникнення сили $F = -\frac{dU(q)}{dq}$, яка намагається повернути систему назад. При малих відхиленнях від положення рівноваги потенціальну енергію можна розвинути за допомогою формули Тейлора за степенями $(q - q_0)$, зберігши перші доданки:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)(q-q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q-q_0)^2 + \ldots,$$

де штрихи позначають похідні по *q*. З умови рівноваги маємо $U'(q_0)=0$. Позначимо відхилення від положення рівноваги як $x=q-q_0$, та $k=U''(q_0)>0$. Будемо відраховувати потенціальну енергію від її мінімального значення, тобто покладемо $U(q_0)=0$. Тоді наближено потенціальна енергія при малих відхиленнях має вигляд

$$U(x)=\frac{kx^2}{2}. \tag{1}$$

Кінетична енергія системи з одним ступенем вільності має в загальному випадку вигляд: $T=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$. При проходженні через положення рівноваги кінетична енергія не обертається в 0. Отже, $a(q_0)\neq 0$. Розклавши $a(q)$ в ряд і залишивши внаслідок малості $q-q_0$ тільки нульовий член розкладу, який позначимо через *m*:

$$a(q)=a(q_0)+a'(q_0)\cdot(q-q_0)+\ldots\approx a(q_0)\equiv m,$$

отримаємо $T=\frac{m\dot{x}^2}{2}$. Складемо функцію Лагранжа системи поблизу положення рівноваги:

$$L=T-U=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}. \tag{2}$$

Підставивши (2) у рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$, отримаємо рівняння руху

$$m\ddot{x}+kx=0 \text{ або } \ddot{x}+\omega_0^2 x=0, \tag{3}$$

де

$$\omega_0=\sqrt{k/m}. \tag{4}$$

Систему з таким рівнянням руху часто називають *гармонічним осциля-тором*. Двома незалежними розв'язками лінійного диференційного рівняння (3) є $\cos\omega_0 t$ і $\sin\omega_0 t$, так що його загальний розв‘язок можна подати у вигляді:

$$x=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t. \tag{5}$$

Цей вираз можна також переписати у вигляді:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (6)$$

Оскільки $\cos(\omega_0 t + \alpha) = \cos\omega_0 t \cdot \cos\alpha - \sin\omega_0 t \cdot \sin\alpha$, то порівняння з (5) показує, що сталі a і α пов'язані зі сталими c_1 і c_2 співвідношеннями:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \qquad (7)$$

Отже, поблизу положення стійкої рівноваги система здійснює гармонійний коливальний рух. Коефіцієнт a при періодичному множнику в (6) називається *амплітудою коливань* і дорівнює максимальному зміщенню системи від положення рівноваги. Аргумент косинуса в (6) називають *фазою коливань*, а α – *початковою фазою*, значення якої залежить від вибору початку відліку коливань. Величина ω_0 називається *циклічною частотою коливань*. Додатковими характеристиками коливань є *період* – час, за який здійснюється одне повне коливання, пов'язаний з циклічною частотою формулою $T=2\pi/\omega_0$, а також *частота* $\nu=1/T=\omega_0/2\pi$, яка дорівнює числу коливань за одиницю часу.

Частота є основною характеристикою коливань, незалежною від початкових умов руху. Згідно з формулою (4) вона повністю визначається властивостями механічної системи і не залежить від амплітуди. Остання властивість пов'язана з малістю коливань і квадратичною залежністю потенціальної енергії від координати. При більших відхиленнях системи від положення рівноваги у розвиненні $U(q)$ в ряд Тейлора виникає необхідність урахування наступних доданків, що призводить до залежності частоти коливань від амплітуди і проявляється у відхиленні коливань від гармонічного характеру – так званій *ангармонічності* коливань.

Повна енергія системи, яка здійснює малі коливання, є сталою і дорівнює:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = [(6)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 = const \qquad (8)$$

Вона пропорційна квадрату амплітуди коливань.

В комплексному аналізі доводиться формула Ейлера, яка пов'язує показникову і тригонометричні функції: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$,

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Ця формула дозволяє подати залежність (6) координати коливальної системи від часу у вигляді дійсної частини комплексного виразу:

$$x = \mathrm{Re}\left\{ A \cdot e^{i\omega_0 t} \right\}, \tag{9}$$

де A – комплексна амплітуда, яку можна записати у вигляді: $A = ae^{i\alpha}$, щоб прийти до виразу (6). Модуль комплексної амплітуди співпадає зі звичайною амплітудою, а аргумент – з початковою фазою. Оперування з експоненціальними множниками в математичному відношенні простіше, ніж з тригонометричними, тому що диференціювання не міняє їх вигляду. Використання комплексного подання x у вигляді $x = A \cdot e^{i\omega_0 t}$ суттєво спрощує розрахунки, оскільки при виконанні лінійних операцій (додавання, множення на сталі коефіцієнти, диференціювання, інтегрування) можна взагалі опускати знак взяття дійсної частини, переходячи до нього лише в кінці обчислень.

18. Затухаючі коливання

У всякій реальній коливальній системі діють сили, що гальмують рух системи і приводять до поступового зменшення розмахів коливань – до затухання. При цьому механічна енергія системи поступово зменшується, переходячи у внутрішню енергію системи і оточуючого середовища. Такий процес називають *дисипацією енергії*.

Обмежимося розглядом випадків, коли на систему діє сила тертя, яка пропорційна швидкості системи: $f_{тр} = -\eta \dot{x}$, де η – позитивний коефіцієнт (коефіцієнт тертя або в'язкість середовища), а знак «–» вказує, що сила діє в сторону, протилежну швидкості. Додаючи цю силу в рівняння руху (17.3), отримаємо: $m\ddot{x} + kx = -\eta \dot{x}$. Розділимо його на m і введемо позначення:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\eta}{m} = 2\lambda, \tag{2}$$

де ω_0 є частотою вільних коливань системи при відсутності тертя; величина λ називається *коефіцієнтом затухання.* В результаті отримаємо рівняння руху:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \qquad (3)$$

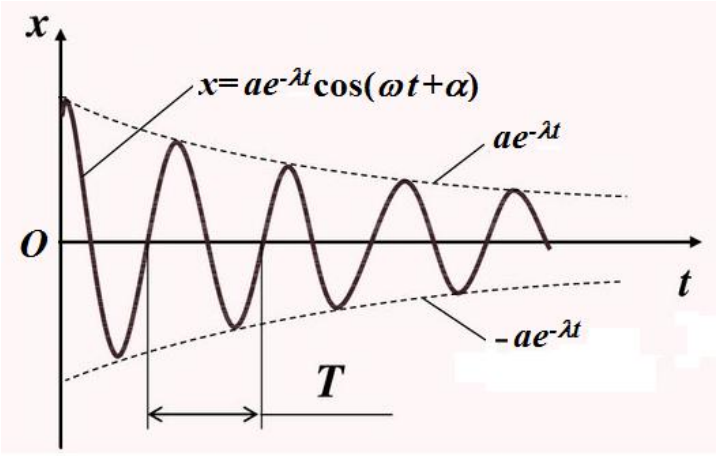
У відповідності з загальними правилами розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами шукаємо розв'язок рівняння у вигляді $x = e^{rt}$, тоді $\dot{x} = re^{rt}$, $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$. Підставивши ці вирази в (3) і скоротивши e^{rt}, знайдемо для r характеристичне рівняння $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$. Воно має 2 корені $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, які приводять до загального розв'язку рівняння (3) у вигляді:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}\,. \qquad (4)$$

В залежності від значень показників r_1, r_2 розрізняють такі випадки:

1) Якщо $\lambda < \omega_0$ (мале тертя), то ми маємо 2 комплексно спряжених значення $r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Загальний розв'язок рівняння руху можна представити в цьому випадку так:

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \cdot \exp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\right\} = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad (5)$$



де α і a – дійсні константи $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ – частота коливань системи. Формули (5) описують так звані *затухаючі коливання*, які можна розглядати як гармонічні коливання з експоненціально спадаючою амплітудою. Швидкість спадання амплітуди визначається коефіцієнтом затухання λ, а «частота» ω коливань виявляється меншою, ніж частота вільних коливань ω_0 без тертя. Зменшення частоти і, відповідно, зростання періоду при терті можна було чекати заздалегідь, тому що тертя гальмує рух.

2) Нехай тертя $\lambda > \omega_0$ (велике тертя). Тоді обидва значення r дійсні, причому від'ємні. Загальний вигляд розв'язку:

$$x = c_1 \cdot e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}. \qquad (6)$$

У цьому випадку, який виникає при досить великому терті, рух полягає в швидкому спаданні $|x|$, тобто в асимптотичному (при $t \to \infty$) наближенні до положення рівноваги. Цей тип руху називають *аперіодичним затуханням*.

3) В особливому випадку, коли $\lambda = \omega_0$, характеристичне рівняння має всього один подвійний корінь $r = -\lambda$. Як відомо, загальний розв'язок диференційного рівняння має в цьому випадку вигляд:

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}. \qquad (7)$$

Це окремий випадок аперіодичного затухання, яке не має коливального характеру.

19. Вимушені коливання

Нехай на систему, яку ми розглядали в п.18, додатково діє періодична зовнішня сила $f\cos\gamma t$. Додавши цю силу в праву частину рівнянь руху (18.3) і поділивши на *m*, отримаємо

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t. \qquad (1)$$

Розв'язок цього рівняння зручно шукати в комплексній формі, для чого запишемо в правій частині $e^{i\gamma t}$ замість $\cos\gamma t$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cdot e^{i\gamma t}. \qquad (2)$$

Це є неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, розв'язок якого можна подати як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (18.3) і деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукатимемо у вигляді $x = B\cdot e^{i\gamma t}$, що після підстановки в (2) приводить до виразу для сталої *B*:

$$-\gamma^2 B\cdot e^{i\gamma t} + 2\lambda i\gamma B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m}e^{i\gamma t},\ \ B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \qquad (3)$$

Подамо сталу B у показниковій формі:

$$B = be^{i\delta} = b(\cos\delta + i\sin\delta)$$

та, порівнюючи її з (3), отримаємо:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}\ . \tag{4}$$

Після виділення дійсної частини знаходимо частинний розв'язок рівняння (1):

$$x = \operatorname{Re} Be^{i\gamma t} = \operatorname{Re}\left(be^{i\delta}\cdot e^{i\gamma t}\right) = b\cos(\gamma t + \delta),$$

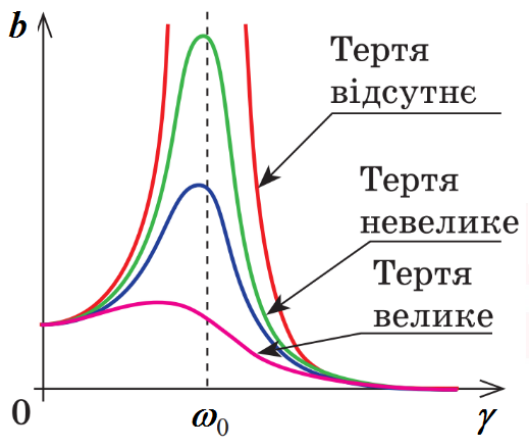
а додавши до нього загальний розв'язок (18.5) рівняння (18.3), отримаємо остаточно закон руху системи під дією періодичної зовнішньої сили:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{5}$$

Перший доданок в (5), який відповідає вільним затухаючим коливанням системи, експоненціально спадає з часом, прямуючи до 0. Тому через достатньо великий проміжок часу в (5) залишиться тільки другий доданок:

$$x = b\cos(\gamma t + \delta), \tag{6}$$

який описує незатухаючі гармонічні коливання з частотою γ зовнішньої сили і амплітудою b. Такий рух називають *вимушеними* коливаннями.



Згідно з (4) амплітуда b вимушених коливань залежить від амплітуди f і частоти γ зовнішньої сили та параметрів коливальної системи – її маси, частоти власних коливань і коефіцієнта затухання. Аналіз показує, що амплітуда вимушених коливань суттєво зростає при наближенні частоти γ до ω_0. Це явище називається *резонансом*. При відсутності тертя $(\lambda = 0)$ зрос-

тання виявляється нескінченим. Умову резонансу знайдемо, розшукавши частоту зовнішньої сили, яка при заданій амплітуді сили *f* дає максимальне значення амплітуди коливань *b*. Їй відповідає мінімум знаменника в *b* (4):

$$\frac{d}{d\gamma}\left[\left(\omega_0{}^2-\gamma^2\right)^2+4\lambda^2\gamma^2\right]=0 \;\;\Rightarrow\;\; \gamma=\sqrt{\omega_0{}^2-2\lambda^2}.$$

Отже, резонанс настає при частоті зовнішньої сили $\gamma_p=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$, яку називають *резонансною частотою*. При невеликому терті $(\lambda << \omega_0)$ значення резонансної частоти мало відрізняється від частоти вільних коливань без тертя ω_0.

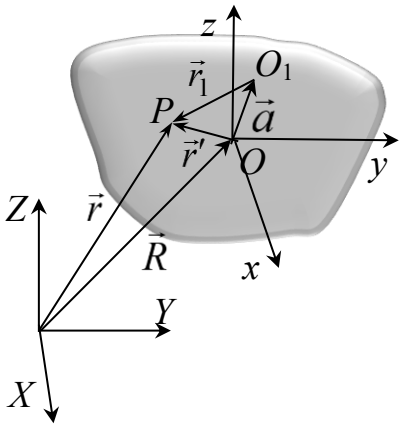
ТЕМА 3. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

3.1. ОСНОВИ ДИНАМІКИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

20. Кінематика твердого тіла

Абсолютно тверде тіло в механіці визначають як систему матеріальних точок, відстані між якими незмінні. Реальні тверді тіла цій умові задовольняють наближено, тому що мають властивість деформуватися під дією прикладених до них зовнішніх сил. Але більшість твердих тіл зазвичай мало змінюють свою форму і розміри, так що цією зміною можна знехтувати.

Всякий довільний рух твердого тіла під дією зовнішніх сил можна представити як суму поступальних і обертальних рухів. Для опису цих рухів введемо дві системи відліку: ІСВ з координатами X,Y,Z і рухому СВ з координатами x,y,z, яка передбачається жорстко зв'язаною з твердим тілом і приймає участь у всіх її рухах. Початок рухомої системи координат помістимо в центр інерції тіла *O*.



Положення твердого тіла відносно нерухомої ІСВ цілком визначається положенням рухомої СВ, тобто її початку О (вектор $\vec{R}$). Орієнтація ж вісей цієї СВ відносно нерухомої ІСВ визначається трьома кутами, так що разом з трьома координатами вектора $\vec{R}(X,Y,Z)$ ми маємо всього 6 координат. Це означає, що тверде тіло являє собою механічну систему з шістьма ступенями вільності.

Нескінчено мале переміщення твердого тіла складається з нескінчено малого паралельного переносу тіла і нескінчено малого повороту навколо центру інерції. Враховуючи, що радіус-вектор довільної точки *P* твердого тіла відносно ІСВ дорівнює

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \qquad (1)$$

де $\vec{r}'(x,y,z)$ – радіус-вектор цієї точки у рухомій СВ, жорстко зв'язаній з тілом, знайдемо нескінчено мале її переміщення точки як суму:

$$d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{r}' = d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$$

(тут $d\vec{\varphi}$ визначається як вектор, величина якого дорівнює куту повороту, а напрям співпадає з напрямком вісі обертання). Поділивши цю рівність на час *dt*, протягом якого відбулось переміщення, і ввівши швидкості: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ – швидкість точки *P* відносно даної ІСВ; $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – швидкість центра інерції твердого тіла відносно ІСВ, яка є швидкістю поступального руху твердого тіла; $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega}$ – *кутова швидкість* обертання тіла, напрям якої співпадає з напрямком вісі обертання, отримаємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}' \text{ або } \vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]. \qquad (2)$$

Отже, швидкість $\vec{\upsilon}$ будь-якої точки може бути виражена через поступальну швидкість тіла і кутову швидкість його обертання.

Нехай тепер жорстко зв'язана з тілом система координат вибрана так, що її початок координат знаходиться не в центрі інерції *O*, а в іншій точці O_1, причому $\overrightarrow{OO_1} = \vec{a}$. Позначимо через $\vec{V}_1$ швидкість точки O_1, а кутову швидкість її обертання через $\vec{\Omega}_1$. Тоді відносно цього початку координат радіус-вектор точки *P* дорівнює

$$\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{a}. \qquad (3)$$

Підставимо (3) в (2):

$$\vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{a}\right] + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}_1\right]. \qquad (4)$$

З іншого боку, за визначенням $\vec{V}_1$ і $\vec{\Omega}_1$ аналогічно до (2) повинно бути:

$$\vec{\upsilon} = \vec{V}_1 + \left[\vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_1\right]. \qquad (5)$$

Порівнюючи (4) і (5), знаходимо, що $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}$ та

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{a}\right]. \qquad (6)$$

Отже, кутова швидкість, з якою обертається жорстко зв'язана з тілом система координат, не залежить від вибору початку цієї СК. Всі такі

системи обертаються в заданий момент часу навколо паралельних одна одній вісей з однаковою за величиною кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$, що дозволяє назвати $\vec{\Omega}$ кутовою швидкістю обертання твердого тіла як цілого.

Із (6) випливає, що якщо швидкості $\vec{V}$ і $\vec{\Omega}$ (в даний момент часу) взаємно перпендикулярні при деякому виборі координат, то вони (тобто $\vec{V}_1$ і $\vec{\Omega}_1$) будуть взаємно перпендикулярні і при їх визначенні по відношенню до будь-якого іншого початку O_1 (*для доказу потрібно* (6) *скалярно помножити на* $\vec{\Omega}$). З (2) видно, що у цьому випадку швидкості $\vec{\upsilon}$ всіх точок тіла лежать в одній і тій же площині, яка перпендикулярна до $\vec{\Omega}$ (*для доказу потрібно* (2) *скалярно помножити на* $\vec{\Omega}$). При цьому завжди можна вибрати такий початок O_1, швидкість якого буде дорівнювати нулю ($\vec{V}_1 = 0$), так що рух твердого тіла (в даний момент) являтиме собою чисте обертання навколо вісі, що проходить через O_1. Цю вісь називають *миттєвою віссю обертання*.

21. Кінетична енергія твердого тіла. Тензор інерції.

Для визначення кінетичної енергії твердого тіла подамо його як дискретну систему матеріальних точок. Тоді його кінетична енергія дорівнює

$$T = \sum_a \frac{m_a \upsilon_a^2}{2} \equiv \sum \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

де підсумовування проводиться по всім точкам тіла. Тут і нижче для спрощення запису формул будемо опускати індекси a, які нумерують ці точки. Підставивши в (1) швидкість точки твердого тіла (20.2)

$$\vec{\upsilon} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right], \qquad (2)$$

отримаємо

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]\right)^2 =$$

$$= \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right] + \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]^2 = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (3)$$

Швидкості $\vec{V}$ і $\vec{\Omega}$ однакові для всіх точок твердого тіла, тому їх

можна винести за знак суми у 1-му доданку (3):

$$T_1 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 = \frac{1}{2}\vec{V}^2 \sum m = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} = T_{пост}, \qquad (4)$$

де $\mu = \sum m$ – маса тіла. Таким чином, T_1 є кінетичною енергією поступального руху твердого тіла.

У T_2 у змішаному добутку векторів виконаємо циклічні перестановки:

$$T_2 = \sum m\left(\vec{V} \cdot \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]\right) = \sum m\left(\vec{\Omega} \cdot \left[\vec{r}' \times \vec{V}\right]\right) =$$
$$= \sum m\left(\vec{r}' \cdot \left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right]\right) = \left[\vec{V} \times \vec{\Omega}\right] \cdot \sum m\vec{r}'.$$

Далі приймемо, що початок рухомої системи координат співпадає з центром інерції O (п.20, рис.) і тому $\vec{R}_C = 0$. Тоді з визначення радіус-вектора центра інерції $\vec{R}_C = \frac{\sum m\vec{r}'}{\sum m}$ випливає, що $\sum m\vec{r}' = 0$ і відповідно T_2=0. Отже, за такого вибору початку O системи координат умови другий доданок в (3) обертається в нуль.

У 3-му доданку в кінетичній енергії тіла (3) розкриємо квадрат векторного добутку:

$$\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]^2 = \Omega^2 r'^2 \sin^2\theta = \Omega^2 r'^2\left(1 - \cos^2\theta\right) = \vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r}'^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'\right)^2;$$

тоді цей доданок, що містить кутову швидкість обертання твердого тіла як цілого і є кінетичною енергією обертального руху тіла, можна подати у вигляді:

$$T_3 = T_{оберт} = \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]^2 = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r}'^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'\right)^2\right). \qquad (5)$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху та кінетичної енергії обертального руху з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ навколо вісі, що проходить через центр інерції:

$$T = T_{пост} + T_{оберт} = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}^2 \cdot \vec{r}'^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'\right)^2\right). \qquad (6)$$

Використання формули (5) для $T_{оберт}$ є незручним для практичних розрахунків, адже передбачає умовного розбиття тіла на мікрочастинки і підсумовування вкладу кожної з них у суму (5). Для уникнення цієї процедури перепишемо $T_{оберт}$ в тензорних позначеннях, тобто через компоненти векторів, що входять в (6), за допомогою наступних подань:

$$\vec{r}'(x,y,z)=\vec{r}'(x_1,x_2,x_3)\to x_i,\quad \vec{\Omega}(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)\to\Omega_i\ \ (i=1,\ 2,\ 3);$$

$$\vec{r}'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sum_{l=1}^{3}x_l^2\equiv x_l^2;\ \ \vec{\Omega}^2=\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2=\Omega_i^2;$$

$$\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{r}'\right)=\Omega_1x_1+\Omega_2x_2+\Omega_3x_3\equiv\Omega_ix_i.$$

Тут і далі для спрощення записів будемо використовувати домовленість про підсумовування: *за однаковими індексами, які повторюються у виразі двічі, здійснюється підсумовування, а знак суми опускається*. Тоді кінетична енергія обертального руху можна подати у вигляді:

$$T_{оберт}=\sum\frac{m}{2}\left(\Omega_i^2x_l^2-\Omega_ix_i\cdot\Omega_kx_k\right).$$

Використаємо далі тотожність $\Omega_i=\delta_{ik}\Omega_k$, де δ_{ik} – так званий символ Кронекера, який дорівнює $\delta_{ik}=\begin{cases}0,\ \text{якщо } i\neq k,\\ 1,\ \text{якщо } i=k,\end{cases}$. Тоді

$$T_{оберт}=\sum\frac{m}{2}\left(\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2-\Omega_i\Omega_kx_ix_k\right)=\frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\cdot\sum m\left(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k\right).$$

В останній формулі для $T_{оберт}$ вдалося відокремити множники, які або містять лише компоненти кутової швидкості, або лише розподіл маси в тілі. Останній множник є особливою характеристикою властивостей тіла називається *тензором інерції*:

$$I_{ik}=\sum m\left(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k\right);\qquad(7)$$

з його допомогою кінетична енергія обертального руху набуде вигляду (пам’ятаємо про підсумовування за повторюваними індексами):

$$T_{оберт} = \frac{I_{ik}}{2}\Omega_i\Omega_k . \qquad (8)$$

Тензор інерції є симетричним: $I_{ik}=I_{ki}$. Він є адитивною величиною – момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин. Його компоненти в явному вигляді дорівнюють:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Якщо тверде тіло розглядати як суцільне, то у визначенні (7) слід зробити заміну суми інтегралом по об'єму ($m \to \rho(\vec{r}')dV$, $\sum \to \int ...dV$, де $\rho(\vec{r}')$ – густина тіла), подаючи тензор інерції наступним чином:

$$I_{ik} = \int \rho(\vec{r}')(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)dV . \qquad (10)$$

Тензор інерції можна привести до діагонального вигляду шляхом відповідного вибору напрямків вісей координат. Ці напрямки називаються *головними вісями інерції*, а відповідні значення компонентів тензора – *головними моментами інерції* I_1, I_2, I_3. При такому виборі вісей кінетична енергія обертального руху тіла виражається дуже просто:

$$T_{оберт} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \qquad (11)$$

Використання головних вісей інерції суттєво полегшує обчислення кінетичної енергії тіла (і не тільки її), оскільки для багатьох тіл достатньо простої будови були виконані розрахунки головних моментів інерції, які приведено у відповідних довідниках. У свою чергу, знаходження головних вісей інерції дуже спрощується, якщо тіло має ту чи іншу симетрію. Нехай система має площину симетрії, наприклад, частинки розташовані в одній площині, тоді, вибравши вісі x_1, x_2 в цій площині, а x_3 – перпендикулярно до неї, отримаємо (з урахуванням, що для всіх частинок x_3=0): $I_1 = \sum mx_2^2$, $I_2 = \sum mx_1^2$, $I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2)$, так що $I_3 = I_1 + I_2$.

Якщо тіло має вісь симетрії, то центр інерції лежить на цій вісі. З нею співпадає одна з головних вісей інерції, а дві інші – перпендикулярні до неї. Прикладом є система частинок, розташованих вздовж однієї прямої лінії. Якщо вибрати цю пряму в якості вісі x_3, то для всіх частинок $x_1 = x_2 = 0$, і тому $I_1 = I_2 = \sum m x_3^2,\ I_3 = 0.$ Таку систему називають *ротатором*; вона має, на відміну від довільного тіла, лише 2 (а не 3) обертальних ступеня вільності, які відповідають обертанню навколо вісей x_1 і x_2; обертання ж прямої навколо самої себе, очевидно, не має змісту.

Тіло, у якого всі три головні моменти інерції різні ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$), називається *асиметричною дзиґою*. Якщо два головних моменти інерції однакові: $I_1 = I_2 \neq I_3$, то тіло називають *симетричною дзиґою*. В цьому випадку вибір напрямків головних вісей у площині x_1x_2 довільний. Якщо ж всі три головних моменти співпадають: $I_1 = I_2 = I_3$, то тіло називають *кульовою дзиґою*. У цьому випадку довільним є вибір всіх трьох головних вісей інерції.

Вияснимо тепер, як відрізняються компоненти тензора інерції відносно іншого початку системи координат O_1, який перебуває на відстані $\vec{a}$ від центра інерції O. Врахуємо, що між радіус-векторами частинок тіла має місце співвідношення $\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{a}$ (п. 20), яке у тензорній формі має вигляд $x_i = x_i^{(1)} + a_i$. Також врахуємо, що в системі координат з початком O у центрі інерції має місце співвідношення $\sum m\vec{r}' = 0$, якому відповідає умова $\sum m x_i = \mu X_c = 0$. Виконаємо тепер розрахунок компонентів тензора інерції відносно початку системи координат O_1:

$$I_{ik}^{(1)} = \sum m\left(x_l^{(1)2}\delta_{ik} - x_i^{(1)}x_k^{(1)}\right) = \sum m\left\{\left(x_l - a_l\right)^2\delta_{ik} - \left(x_i - a_i\right)\left(x_k - a_k\right)\right\} =$$

$$= \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - \cancel{2x_l a_l\delta_{ik}} + a_l^2\delta_{ik} - x_i x_k - a_i a_k + \cancel{x_i a_k} + \cancel{x_k a_i}\right) =$$

$$= \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) + \sum m\left(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k\right) = I_{ik} + \mu\left(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k\right).$$

Отже, доведено так звану *теорему Штейнера*, яка зв'язує між собою компоненти тензора інерції відносно різних початків координат:

$$I_{ik}^{(1)} = I_{ik} + \mu\left(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k\right). \qquad (12)$$

22. Момент імпульсу твердого тіла

Величина моменту імпульсу залежить від вибору точки, відносно якої його визначають. В механіці твердого тіла найбільш раціональним вибором такої точки початку рухомої системи координат є центр інерції тіла. Нижче момент імпульсу тіла обчислюється саме відносно його центра інерції. В цьому випадку швидкість поступального руху тіла як цілого $\vec{V} = 0,$ швидкість окремих точок тіла $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right],$ а момент імпульсу тіла $\vec{M}$ визначаємо як суму моментів імпульсу окремих частинок $\vec{r}' \times \vec{p}$, тобто

$$\vec{M} = \sum \left[\vec{r}' \times \vec{p}\right] = \sum m\left[\vec{r}' \times \vec{\upsilon}\right] = \sum m\left[\vec{r}' \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right]\right].$$

Враховуючи далі відому формулу векторної алгебри для подвійного векторного добутку $\left[\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]\right] = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$, отримаємо

$$\vec{M} = \sum m\left\{\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'^2 - \vec{r}' \cdot \left(\vec{r}' \cdot \vec{\Omega}\right)\right\}. \qquad (1)$$

Формула (1) є незручною для практичного використання у розрахунках моменту імпульсу тіла, тому, подібно до п. 21, здійснимо в (1) перехід до тензорних позначень:

$$\vec{\Omega} \to \Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k, \quad \vec{r}'^2 = x_l^2, \quad \vec{r}' \cdot \vec{\Omega} = x_k\Omega_k.$$

Тоді *i*-та проекція рівності (1) дорівнюватиме:

$$M_i = \sum m\left\{\Omega_i x_l^2 - x_i x_k \Omega_k\right\} = \Omega_k \sum m\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right),$$

Звідки, враховуючи визначення тензора інерції (21.7), знайдемо:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \qquad (2)$$

Таким чином, розрахунок компонентів моменту імпульсу за формулою (2) суттєво спрощується порівняно з (1), оскільки зводиться до добутку незалежних величин: загальних характеристик тіла I_{ik} і кутової швидкості його обертання як цілого Ω_k.

Оскільки в правій частині рівності (2) передбачається підсумову-

вання по індексу k, що пробігає значення 1, 2, 3, то в загальному випадку кожна компонента моменту імпульсу M_i виражається через всі 3 компоненти кутової швидкості. Цього не буде, якщо вісі координат направити вздовж головних вісей; тоді замість (2) отримаємо

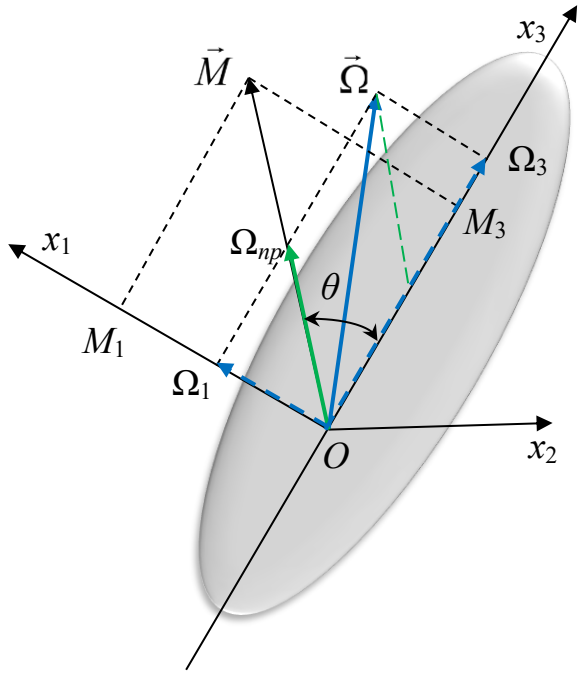
$$M_1 = I_1\Omega_1,\ M_2 = I_2\Omega_2,\ M_3 = I_3\Omega_3\,. \qquad (3)$$

Формули (2) або (3) показують, що в загальному випадку вектори $\vec{M}$ і $\vec{\Omega}$ не паралельні один одному. Виняток складає кульова дзиґа: так як для неї головні моменти інерції $I_1 = I_2 = I_3 = I$, то

$$\vec{M} = I\,\vec{\Omega}\ \ (\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{\Omega})\,. \qquad (4)$$

У випадку, коли у довільного тіла відмінна від нуля лише одна із компонент кутової швидкості, так що тіло здійснює обертальний рух навколо однієї з головних вісей твердого тіла, наприклад x_1, тоді $\vec{\Omega}(\Omega,0,0)$, а тому $\vec{M}\,(I_1\Omega,0,0)$, тобто $\vec{M} = I_1\vec{\Omega}$ і вектор моменту імпульсу також паралельний кутовій швидкості: $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{\Omega}$.

Розглянемо тепер вільне обертання тіла за відсутності зовнішніх сил. У цьому випадку для нього виконується закон збереження моменту імпульсу: $\vec{M} = const$. Для кульової дзиґи з формули (4) закон збереження моменту імпульсу призводить до висновку, що і її кутова швидкість залишається сталою: $\vec{\Omega} = const$. Отже, загальним випадком вільного обертання кульової дзиґи є просто рівномірне обертання навколо постійної вісі.



Закон збереження імпульсу є достатнім і для розгляду більш складного вільного обертання симетричної дзиґи. Скориставшись довільністю у виборі напрямків головних вісей інерції x_1 і x_2 (перпендикулярних до вісі симетрії x_3), виберемо вісь x_2 перпендикулярною до площини, яка визначається сталим вектором $\vec{M} = const$ і миттєвим положенням вісі x_3 (див. рис.).

Тоді M_2=0, а з формул (3) видно, що і Ω_2=0. Це означає, що напрямки $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ і вісі дзиґи x_3 в кожен момент часу лежать в одній площині (див. рис.). Але звідси, у свою чергу, випливає, що швидкості всіх точок на вісі дзиґи $\vec{\upsilon} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}']$ в кожен момент часу перпендикулярні до даної площини. Це означає, що вісь дзиґи рівномірно обертається навколо сталого напрямку $\vec{M}$, описуючи навколо нього конус. Описане явище називають *регулярною прецесією* дзиґи. Одночасно з прецесією сама дзиґа обертається навколо власної вісі з кутовою швидкістю Ω_3.

Кутові швидкості обох цих обертань цих обертань легко виразити через величину моменту імпульсу M і кут нахилу θ вісі дзиґи до напрямку $\vec{M}$. Кутова швидкість обертання дзиґи навколо своєї вісі є просто проекцією Ω_3 вектора $\vec{\Omega}$ на цю вісь:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M \cos\theta}{I_3}.$$

Для визначення ж кутової швидкості прецесії $\Omega_{пр}$ потрібно розкласти вектор $\vec{\Omega}$ за правилом паралелограма на складові вздовж x_3 і вздовж $\vec{M}$. З них перша не приводить ні до якого переміщення самої вісі дзиґи, а тому друга і дає розшукувану кутову швидкість прецесії. Із побудови на малюнку ясно, що $\Omega_1 = \Omega_{пр} \sin\theta$, а оскільки $\Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M \sin\theta}{I_1}$, то отримаємо $\Omega_{пр} = \frac{M}{I_1}$.

23. Рівняння руху твердого тіла

Так як тверде тіло у загальному випадку має шість ступенів вільності, то загальна система рівнянь руху повинна складатись з 6 незалежних рівнянь. Їх можна представити у вигляді, що визначає похідні по часу векторів імпульсу і моменту імпульсу тіла.

Перше з цих рівнянь отримується просто шляхом підсумовування рівнянь руху $\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ для кожної зі складових частинок тіла, де $\vec{p}$ – імпульс частинки, а $\vec{f}$ – діюча на неї сила. Ввівши повний імпульс тіла $\vec{P} = \sum \vec{p} = \mu \vec{V}$ і повну діючу на нього силу $\sum \vec{f} = \vec{F}$, отримаємо

$\dot{\vec{P}} = \sum \dot{\vec{p}} = \sum \vec{f} = \vec{F}$, тобто похідна повного імпульсу по часу дорівнює сумі всіх сил, що діють на кожну частинку тіла:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \qquad (1)$$

Фактично ж у силу $\vec{F}$ входять лише зовнішні сили, так як внутрішні сили взаємодії між частинами тіла згідно з 3-м законом Ньютона взаємно скорочуються.

Для знаходження похідної $\frac{d\vec{M}}{dt}$ моменту імпульсу тіла по часу виберемо «нерухому» систему відліку так, щоб у даний момент часу центр інерції був у стані спокою відносно неї ($\vec{V} = 0$), і тому $\vec{\upsilon} = \vec{\Omega} \times \vec{r}'$. Отримане таким чином рівняння в силу принципу відносності Галілея буде справедливе і у будь-якій іншій ІСВ. Момент імпульсу тіла в такій системі відліку дорівнюватиме

$$\vec{M} = \sum \vec{r}' \times \vec{p}' = \sum m[\vec{r}' \times \vec{\upsilon}],$$

а його похідна по часу

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m\left[\vec{r}' \times \vec{\upsilon}\right] = \sum m\left[\frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\upsilon}\right] + \sum m\left[\vec{r}' \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right] =$$

$$= \sum m\left[\vec{\upsilon} \times \vec{\upsilon}\right] + \sum\left[\vec{r}' \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \sum[\vec{r}' \times \vec{f}].$$

Величину $[\vec{r}' \times \vec{f}]$ називають *моментом сили* $\vec{f}$, яка діє на окрему частинку тіла. Визначимо повний момент сил як суму моментів всіх сил, що діють на тіло:

$$\vec{K} = \sum[\vec{r}' \times \vec{f}]. \qquad (2)$$

Тоді рівняння для похідної повного моменту імпульсу по часу матиме вигляд:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}. \qquad (3)$$

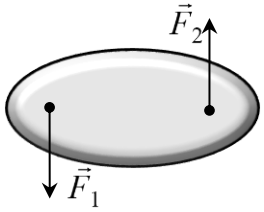
При цьому в рівняння (3) слід враховувати лише моменти зовнішніх сил, так як сили взаємодії частинок тіла між собою дають моменти, які

взаємно скорочуються.

Момент сили, як і момент імпульсу, залежить, взагалі кажучи, від вибору початку координат, відносно якого він визначений. В (2) і (3) моменти сил визначаються відносно центра інерції тіла *O*. При переносі початку координат *O* на вектор $\vec{a}$ у точку O_1 (див. рис. у п.20) в (2) потрібно зробити заміну $\vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{a}$, тому

$$\vec{K} = \sum[\vec{r}' \times \vec{f}] = \sum[\vec{r}_1 \times \vec{f}] + \sum[\vec{a} \times \vec{f}] = \vec{K}_1 + [\vec{a} \times \vec{F}]. \qquad (4)$$

Ця формула встановлює правило перетворення моменту сил при переході до іншого початку системи координат. Звідси, зокрема, випливає, що якщо рівнодійна прикладених сил дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), тоді $\vec{K} = \vec{K}_1$, тобто момент сил не залежить від вибору координат. Такий випадок має місце, якщо до тіла прикладена *пара сил* , рівних за величиною і протилежних за напрямком ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, див. рис.).



Рівняння обертального руху (3) спрощуються, якщо момент імпульсу можна подати у вигляді $\vec{M} = I\vec{\Omega}$. Умови такого подання приведені у п. 22. Тоді рівняння (3) набуде вигляду

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{K}, \text{ або } I\vec{\varepsilon} = \vec{K}, \qquad (5)$$

де $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$ – кутове прискорення тіла. У загальному випадку проекції моменту імпульсу зв’язані з проекціями кутової швидкості рівністю (22.2): $M_i = I_{ik}\Omega_k$, так що основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла перепишеться у вигляді:

$$I_{ik}\frac{d\Omega_k}{dt} = K_i \text{ або } I_{ik}\varepsilon_k = K_i \qquad (7)$$

(по індексу *k* передбачається підсумовування).

24. Умови рівноваги твердих тіл. Дотик твердих тіл

Із рівнянь руху твердого тіла (23.1), (23.3) випливають умови його рівноваги, які формулюються у вигляді рівності нулю діючих на нього повної сили і повного моменту сил:

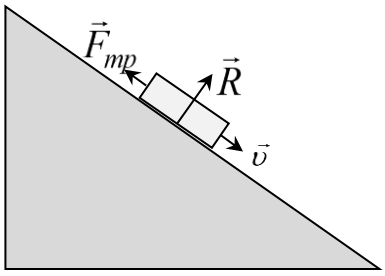
$$\vec{F} = \sum \vec{f} = 0, \quad \vec{K} = \sum \vec{r} \times \vec{f} = 0, \tag{1}$$

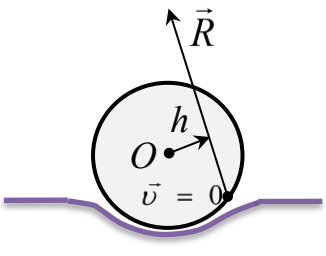
де підсумовування здійснюється за всіма прикладеними до тіла зовнішніми силами $\vec{f}$, а $\vec{r}$ – радіус-вектори точок прикладання сил; при цьому точка (початок координат), відносно якої визначаються моменти, може бути вибрана довільним чином: як показано у п. 23, при $\vec{F} = 0$ значення повного моменту сил $\vec{K}$ не залежить від цього вибору.

Якщо ми маємо справу з системою твердих тіл, які дотикаються одне до одного, то у рівновазі умови (1) повинні виконуватись для кожного тіла окремо. При цьому в число сил повинні входити також і сили, що діють на дане тіло з боку інших дотичних з ним тіл. Ці сили прикладені у точках дотику і називаються *силами реакції*. Очевидно, що для кожних двох тіл взаємні сили реакції рівні за величиною і протилежні за напрямком згідно із третім законом Ньютона.

В загальному випадку величини і напрямки реакцій визначаються в результаті сумісного розв'язку системи рівнянь рівноваги (1) для всіх тіл. Але в деяких випадках напрямки сил реакції можна встановити з умов задачі. Так, при ковзанні одного тіла по поверхні іншого сили реакції напрямлені по нормалі до поверхні.

Якщо тіла, що дотикаються, рухаються одне відносно одного, то крім сил реакції з'являються також дисипативні сили – сили тертя. Можливі два типи руху тіл, що дотикаються – *ковзання* і *кочення*. При ковзанні реакції перпендикулярні до дотичних поверхонь, а сили тертя напрямлені по дотичним до них.





Чисте кочення характеризується тим, що в точках дотику немає відносного руху тіл; другими словами, тіло, що котиться, в кожен

момент часу ніби закріплене у точці дотику. При цьому напрямок сили реакції довільний, тобто не обов'язково перпендикулярний до поверхонь дотику. Тертя ж при коченні проявляється у вигляді додаткового моменту сил, які перешкоджають коченню.

Якщо при ковзанні тертя настільки мале, що ним можна зовсім знехтувати, то поверхні тіл називають абсолютно гладкими. Навпаки, якщо властивості поверхні допускають лише чисте кочення тіл без ковзання, а тертям при коченні можна знехтувати, то поверхні називаються абсолютно шорсткими.

Дотик тіл зменшує число їх ступенів вільності. Раніше це враховувалося шляхом уведення узагальнених координат q_i, які відповідають реальному числу ступенів вільності. Проте, при коченні такий вибір координат може виявитись неможливим. Це пов'язано з тим, що при коченні тіла по нерухомій поверхні швидкість точки дотику поверхні дорівнює нулю, внаслідок чого відповідні в'язі виявляються неголономними (п. 3) і ними не можна скористатись для зменшення числа незалежних координат. У такому випадку рекомендується складання рівнянь руху дотичних тіл, в якому сили реакції вводяться явним чином. Суть цього методу, який складає зміст так званого принципу Даламбера, полягає в тому, що для кожного з дотичних тіл записуються рівняння руху

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}, \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{f}, \tag{2}$$

причому в число діючих сил $\vec{f}$ включаються також і сили реакції. Ці сили заздалегідь невідомі й самі визначаються разом з рухом тіла в результаті розв'язку рівнянь. Цей метод придатний як при голономних, так і при неголономних в'язах.

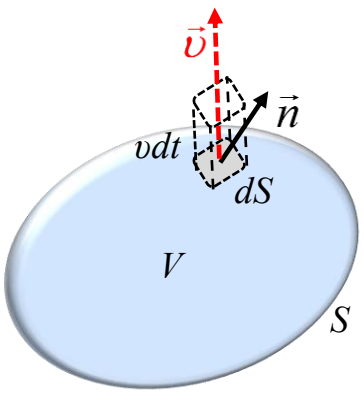
ТЕМА 3.2. ОСНОВИ ГІДРОДИНАМІКИ

25. Вступ у гідродинаміку. Рівняння неперервності

Вивчення руху рідин (газів) складає зміст гідродинаміки (аеродинаміки). При цьому рідина або газ розглядається як суцільне середовище. Це означає, що будь-який малий елемент об'єму вважається все-таки досить великим, що містить ще дуже велике число молекул. В той-же час нескінченно малий об'єм, який називається точкою рідини, є малим порівняно з об'ємом тіла, але великим порівняно з середнім об'ємом, що припадає на одну молекулу.

Математичний опис стану рухомої речовини визначається за допомогою функцій, що задають розподіл швидкості рідини $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(\vec{r},t)$ і деяких її термодинамічних величин, наприклад тиску $p = p(\vec{r},t)$ і густини $\rho = \rho(\vec{r},t)$. Цих двох термодинамічних величин достатньо, щоб визначити інші термодинамічні функції з рівняння стану. Відмітимо, що залежність $\vec{\upsilon}$, p, ρ від вектора $\vec{r}$ відноситься до певних точок простору, а не до певних частинок рідини.

Виведемо рівняння, яке виражає закон збереження речовини в гідродинаміці. Для цього виділимо деякий об'єм V простору. Кількість рідини (маса) в ньому дорівнює $m = \int_V \rho dV$. Через елемент поверхні dS за час dt витікає маса



$$\rho dV = \rho \cdot \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dS \cdot dt = \left[d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS \right] = \rho \vec{\upsilon} d\vec{S} dt .$$

В цій формулі і в подальшому для спрощення записів формально введено вектор елемента площі поверхні $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, модуль якого дорівнює площі dS, а напрямок співпадає з напрямком зовнішньої нормалі до елемента поверхні; зрозуміло, що такий вектор не можна ввести для довільної поверхні, оскільки вона не має однозначно визначеної нормалі. Інтегруючи отриманий вираз по всій поверхні S, знаходимо кількість рідини $\oint_S \rho \vec{\upsilon} d\vec{S} \cdot dt$, яка витікає з об'єму V

за час *dt.* Тоді за одиницю часу витікає відповідно $\oint_S \rho\vec{\upsilon}d\vec{S}$. З іншого боку, зміна маси в об'ємі V за одиницю часу дорівнює $\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$. Прирівнюючи ці вирази, отримаємо закон збереження речовини в інтегральній формі

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho\vec{\upsilon}d\vec{S}\,. \qquad (1)$$

Знак «–» в (1) враховує, що при витіканні рідини через поверхню маса рідини зменшується.

Перетворимо поверхневий інтервал в (1) справа за допомогою теореми Остроградського – Гауса в інтеграл по об'єму

$$\oint_S \rho\vec{\upsilon}d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\rho\vec{\upsilon}dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV,\ \int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{\upsilon}\right)dV = 0\,,$$

звідки

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{\upsilon} = 0\,. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається *рівнянням неперервності*. Воно виражає закон збереження речовини у диференціальній формі. Вектор $\vec{j} = \rho\vec{\upsilon}$ називається *густиною потоку* рідини. Його напрямок співпадає з напрямком руху рідини, а абсолютна величина визначає кількість рідини, що протікає за одиницю часу через одиницю площі, перпендикулярної до швидкості.

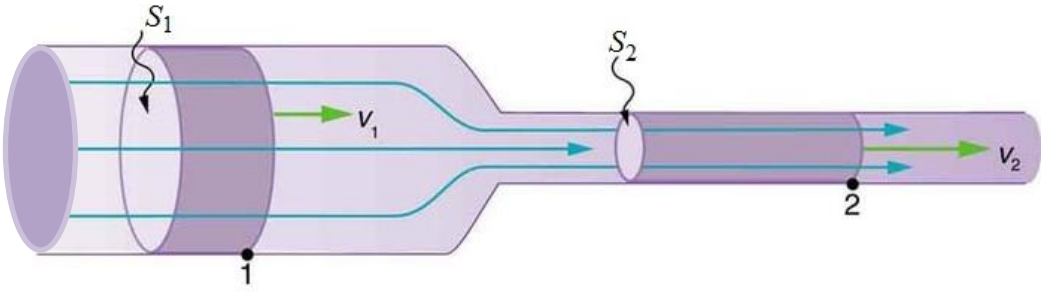
Рідину, густина якої залишається незмінною при зміні тиску в ній, називають *нестисливою*. Для нестисливої рідини (ρ=*const*) із закону збереження речовини в інтегральній формі (1) випливає проста формула

$$\oint_S \rho\vec{\upsilon}d\vec{S} = 0 \ \Rightarrow \sum_i\left(\pm\upsilon_i S_i\right) = 0\,, \qquad (3)$$

де підсумовування здійснюється по всім елементарним поверхням S_i, що обмежують виділений об'єм, υ_i – проекція швидкості рідини на нормаль до *i*-ї ділянки поверхні; знаки «+» або «–» розрізняють відносний

напрямок руху рідини і зовнішньої нормалі. Зокрема, з (3) при течії рідини по трубі змінного перерізу (див. рис.), матимемо

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 = ... = const. \qquad (4)$$

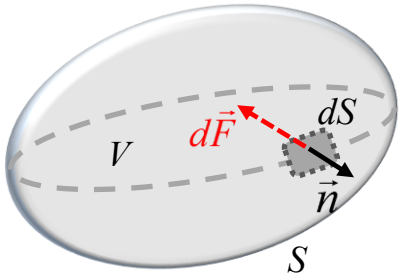


Наслідком цієї формули є те, що швидкість рідини при проходженні вузького перерізу буде більша, ніж при проходженні широкого перерізу, у оберненому відношенні площ перерізів:

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

26. Рівняння Ейлера

Виділимо в рідині деякій об'єм V. На елементарну ділянку поверхні рідини dS з боку оточуючої частини рідини діє сила гідростатичного тиску, напрямлена всередину рідини у напрямку, протилежному зовнішній нормалі до поверхні: $d\vec{F} = -\vec{n} \cdot p dS = \left[d\vec{S} = \vec{n} dS \right] = -p d\vec{S}$. Інтегруючи цю силу по всій поверхні S, що обмежує об'єм V, знаходимо повну силу, що діє на рідину в даному об'ємі: $\vec{F} = -\oint_S p d\vec{S}$. За допомогою перетворення, що використовується при виведенні формули Остроградського – Гаусса, зведемо цей вираз до інтегралу по об'єму: $\vec{F} = -\oint_S p d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} p dV = -\int_V \text{grad}\, p dV$. Звідси знаходимо силу, яка діє на одиницю об'єму рідини: $\vec{f} = d\vec{F} / dV = -\text{grad}\, p$. Враховуючи, що маса одиниці рідини дорівнює її густині, виводимо з 2-го закону Ньютона рівняння руху одиниці об'єму рідини:



$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\text{grad}\, p. \qquad (1)$$

Але похідна $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ в рівнянні (1) визначає не зміну швидкості рідини в даній нерухомій точці, а зміну швидкості певної рухомої в просторі частинки рідини. Цю похідну необхідно виразити через величини, що відносяться до нерухомих у просторі точок. Для цього врахуємо, що зміна швидкості $d\vec{\upsilon}$ даної частинки рідини за час *dt* складається з двох частин: по-перше, із зміни швидкості в даній точці простору за час *dt*, і по-друге, із різниці швидкостей (в один і той же момент часу) у двох точках, розділених переміщенням $d\vec{r}$, пройденим досліджуваною частинкою рідини за час *dt*. Перша з цих величин дорівнює $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt$, де тепер похідна $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}$ береться при сталих координатах x, y, z, тобто, в заданій точці простору. Друга частина зміни швидкості дорівнює

$$\vec{\upsilon}\left(x+dx, y+dy, z+dz\right)-\vec{\upsilon}\left(x, y, z\right)=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}dz=\left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}.$$

Загальна зміна швидкості дорівнює

$$d\vec{\upsilon}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt+\left(d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}dt+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}dt;$$

поділивши обидві частини рівності на *dt*, отримаємо

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}. \qquad (2)$$

Підставивши співвідношення (2) в (1), знайдемо

$$\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\rho\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\operatorname{grad}p$$

або

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p. \qquad (3)$$

Це і є розшукуване рівняння руху рідини, яке називається *рівнянням Ейлера*. Воно є одним із основних рівнянь гідродинаміки.

Якщо рідина перебуває в полі тяжіння, то на кожну одиницю її

об’єму діє додаткова сила тяжіння $\rho\vec{g}$, де $\vec{g}$ – прискорення сили тяжіння. Ця сила повинна бути додана до правої сторони рівняння (1), так що (3) набуває вигляду:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\vec{g}\,. \qquad (4)$$

При виведенні рівнянь руху не враховувались процеси дисипації енергії, які можуть мати місце в рухомій рідині внаслідок внутрішнього тертя (в’язкості) в рідині і теплообміну між різними її ділянками. Тому все викладене тут відноситься тільки до таких рухів рідин і газів, при яких несуттєві процеси теплопровідності і в’язкості. Про такий рух говорять як про рух *ідеальної рідини*.

27. Рівняння Бернуллі

В ідеальній рідині відсутність теплообміну між окремими ділянками рідини та між рідиною і оточуючими тілами означає, що рух відбувається *адіабатично*, тобто, без теплообміну: $\delta Q=0$. Оскільки за другим законом термодинаміки $\delta Q=TdS$, де S – ентропія, то відсутність теплообміну означає, що $dS=0$, або $S=const$, тобто, адіабатичний рух рідини можна назвати ізоентропійним.

Нехай s – ентропія одиниці маси рідини, тоді для адіабатичного руху рідини матимемо $s=const$. Скористаємось термодинамічним співвідношенням для ентальпії h одиниці маси рідини, яке визначає її зміну в нескінчено малому процесі:

$$dh=Tds+\upsilon dp\,, \qquad (1)$$

де $\upsilon=1/\rho$ – питомий об’єм (об’єм одиниці маси), T – абсолютна температура. Оскільки $s=const$, $ds=0$, то $dh=\frac{1}{\rho}dp$ і тому, відповідно, $\operatorname{grad}h=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$. Тоді рівняння (26.3) набуде вигляду:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=-\operatorname{grad}h\,. \qquad (2)$$

За допомогою (2) можна тепер отримати ще одну форму рівняння Ейлера, якщо скористатись такою формулою векторного аналізу:

$$\operatorname{grad}\frac{\upsilon^2}{2}=\left[\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}\right]+\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\,.$$

Враховуючи її, перепишемо (2) у вигляді:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}-\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}=-\operatorname{grad}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{3}$$

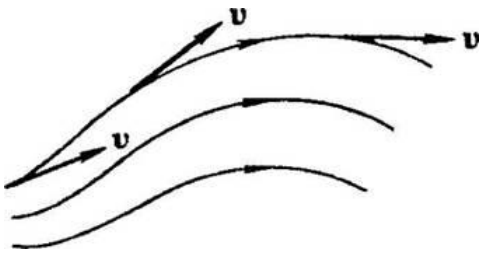
Застосуємо ротор до виразу (3) та, врахувавши відому тотожність $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=0,$ отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\upsilon}-\operatorname{rot}\left[\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}\right]=0, \tag{4}$$

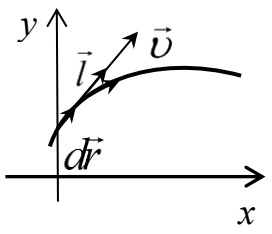
яке містить тільки швидкість.

Рівняння гідродинаміки значно спрощуються у випадку стаціонарного плину рідини. Під *стаціонарним* розуміють такий плин, при якому в кожній точці рідини швидкість залишається сталою з часом: $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=0$. Тоді рівняння (3) матиме вигляд:

$$\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}=\operatorname{grad}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{5}$$



Введемо поняття *лінії потоку* як лінії, дотичні до яких вказують напрямок вектора швидкості у точці дотику в даний момент часу. Розглянемо нескінчено малу ділянку лінії потоку у формі відрізка $d\vec{r}$, напрямленого вздовж дотичної $\vec{l}$, а отже, вздовж вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ в заданій точці рідини. Із паралельності векторів $d\vec{r}$ і $\vec{\upsilon}$ випливає диференціальне рівняння ліній потоку:



$$\frac{dx}{\upsilon_x}=\frac{dy}{\upsilon_y}=\frac{dz}{\upsilon_z}. \tag{6}$$

При стаціонарному русі рідини лінії потоку залишаються незмінними в часі і співпадають з траєкторіями частинок рідини. При нестаціонарному русі таке співпадання не має місця.

Помножимо рівняння (5) скалярно на одиничний вектор $\vec{l}$ дотичної до лінії потоку і врахуємо, що $\vec{l}$ і $\vec{\upsilon}$ паралельні, а векторний добуток $\left[\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}\right]$ є вектором, перпендикулярним до $\vec{\upsilon}$, а отже, і до $\vec{l}$. Тому добуток $\vec{l}\cdot\left[\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}\right]=0$ як скалярний добуток ортогональних векторів, а отже, з (5) маємо

$$\vec{l}\cdot\left[\vec{\upsilon}\times\operatorname{rot}\vec{\upsilon}\right]=\vec{l}\cdot\operatorname{grad}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=0.$$

Але з векторного аналізу відомо, що скалярний добуток градієнта на одиничний вектор дорівнює похідній у напрямку цього вектора. Отже, $\frac{\partial}{\partial l}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=0$. Звідси випливає, що величина $h+\frac{\upsilon^2}{2}$ є сталою вздовж лінії потоку:

$$h+\frac{\upsilon^2}{2}=const. \qquad (7)$$

Значення сталої є різним для різних ліній потоку. Рівняння (7) називається *рівнянням Даниїла Бернуллі* (1738 р.).

Якщо плин рідини відбувається у полі тяжіння, то до правої частини рівняння (3) необхідно додати також прискорення сили тяжіння $\vec{g}$. Виберемо напрямок сили тяжіння в якості напрямку вісі *z*, причому додатні значення *z* відраховуються вертикально вгору. Тоді косинус кута між $\vec{l}$ і $\vec{g}$ дорівнює $-\frac{dz}{dl}$, так що проекція $\vec{g}$ на напрямок $\vec{l}$ є $-g\frac{dz}{dl}$. Тому замість рівняння (7) маємо: $\frac{\partial}{\partial l}\left(h+\frac{\upsilon^2}{2}+gz\right)=0$, звідки замість рівняння (7) отримаємо:

$$h+\frac{\upsilon^2}{2}+gz=const. \qquad (8)$$

Це є узагальненням рівняння Бернуллі для рідини у полі тяжіння.

Для нестисливої рідини густина ρ=*const*. Помножимо (8) на ρ і врахуємо, що $h = p/\rho$, відповідно $p = h\rho$. Тоді замість (6) отримаємо більш вживану форму рівняння Бернуллі

$$p + \frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g z = const\,. \tag{9}$$

28. Потік імпульсу у рідині

Імпульс одиниці об'єму рідини дорівнює $\rho\vec{\upsilon}$. Знайдемо швидкість його зміни:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{\upsilon} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{\upsilon} + \rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}.$$

Перейдемо в цій рівності до тензорних позначень:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = \frac{\partial\rho}{\partial t}\upsilon_i + \rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}. \tag{1}$$

Скористаємось далі рівнянням неперервності (25.2), написавши його у вигляді

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\vec{\upsilon} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\upsilon_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\upsilon_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho\upsilon_z\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k,$$

та перепишемо рівнянням Ейлера (26.3) $\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$ у тензорній формі:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} = -\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \;\Rightarrow\; \frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} = -\left(\upsilon_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\upsilon_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Підставимо ці вирази в (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = -\upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_i}\rho\upsilon_k - \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho\upsilon_k\upsilon_i = .$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta_{ik}p + \rho\upsilon_i\cdot\upsilon_k\right) \tag{2}$$

Введемо тензор

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k\,. \tag{3}$$

Тоді рівняння (2) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (4)$$

Це рівняння є *тензорною формою рівняння Ейлера*.

Для вияснення фізичного смислу тензора Π_{ik} проінтегруємо рівняння (4) по деякому об'єму: $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i dV = -\int\limits_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$. Інтеграл справа перетворимо в інтеграл по поверхні:

$$\int\limits_V \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = -\oint\limits_S \Pi_{ik} dS_k$$

(тут використано правило перетворення інтегралу по замкнутій поверхні в інтеграл по об'єму, яке можна сформулювати так: воно здійснюється заміною елемента поверхні dS_k оператором $dV\frac{\partial}{\partial x_k}$, який повинен бути застосованим до всього підінтегральному виразу: $dS_k \to dV\frac{\partial}{\partial x_k}$).

В результаті отримаємо

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i dV = -\oint\limits_S \Pi_{ik} dS_k\ . \qquad (5)$$

Зліва в (5) стоїть зміна *i*-ї компоненти імпульсу, що вибуває за одиницю часу із заданого об'єму. Тому інтеграл справа по поверхні дорівнює кількості відповідної проекції імпульсу, що виходить за одиницю часу через оточуючу об'єм поверхню. Отже, $\Pi_{ik}dS_k$ є *i*-тою компонентою імпульсу, що проходить через елемент dS_k поверхні, а Π_{ik} означає *i*-ту компоненту імпульсу об'єму, що протікає за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярну до вісі x_k. У зв'язку з цим тензор Π_{ik} є *тензором густини потоку імпульсу*.

Остаточно зауважимо, що отримані в попередніх параграфах рівняння руху ідеальної рідини можна трактувати як диференціальні форми законів збереження – маси (рівняння неперервності (25.2)), енергії (рівняння Бернуллі (27.9), імпульсу (рівняння Ейлера (26.4) або (27.4)).

29. Рівняння руху в'язкої рідини

Дослідимо вплив на рух рідини процесів дисипації енергії, пов'язаних з наявністю внутрішнього тертя і теплопровідності. Для отримання рівнянь руху в'язкої рідини необхідно ввести додаткові члени в рівняння руху ідеальної рідини. Що стосується рівняння неперервності, то це рівняння буде однаковим як для ідеальної, так і для в'язкої рідини. Рівняння ж Ейлера має бути зміненим.

Як було показано в п. 28, рівняння Ейлера може бути подано у вигляді формули, що означає зміну імпульсу одиниці об'єму:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\upsilon_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (1).$$

Тензор густини потоку імпульсу ідеальної рідини Π_{ik} дорівнює (28.3):

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k; \qquad (2)$$

він відповідає чисто оборотному переносу імпульсу, пов'язаному з механічним переносом різних ділянок рідини з одного місця на інше і з діючими в рідині силами тиску. В'язкість рідини проявляється у наявності ще додаткового, необоротного, переносу імпульсу з місць з більшою швидкістю в місця з меншою швидкістю. Тому рівняння руху в'язкої рідини можна отримати, додавши до ідеального потоку (2) деякий поки що не визначений додатковий член $-\sigma'_{ik}$, який враховує необоротний, в'язкий перенос імпульсу в рідині. Тому тензор густини потоку імпульсу в'язкої рідини подамо у вигляді:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma'_{ik} \equiv \rho\upsilon_i\upsilon_k - \sigma_{ik}. \qquad (3)$$

Тут введено тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}, \qquad (4)$$

який називається *тензором напружень*, тоді як σ'_{ik} *– в'язким тензором напружень*. Тензор напружень σ_{ik} визначає ту частину потоку імпульсу, яка не зв'язана з безпосереднім переносом імпульсу разом з масою рухомої речовини.

Встановимо загальний вигляд σ'_{ik}, виходячи з наступних міркувань. Тензор σ'_{ik} відмінний від нуля тільки при відносному русі шарів рідини. Оскільки це означає, що різні шари рідини рухаються з різними швидкостями, то існує ненульовий градієнт швидкості $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ і тому тензор σ'_{ik} повинен залежати від похідних швидкості по координатам. Якщо градієнти швидкості не дуже великі, то можна вважати, що обумовлений в'язкістю перенос імпульсу залежить тільки від перших похідних швидкості. Саму залежність σ'_{ik} від похідних $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ можна в тому ж наближенні вважати лінійною. Незалежні від $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ доданки повинні бути відсутні у виразі для σ'_{ik}, тому що σ'_{ik} повинен дорівнювати 0 при $\vec{\upsilon} = const$. Із розгляду треба також виключити ситуацію, коли градієнт швидкості відмінний від нуля внаслідок рівномірного обертання. Найбільш загальним видом тензора другого рангу, який задовольняє приведеним умовам, є

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}. \qquad (5)$$

Тут η і ζ є незалежні від швидкості додатні величини, які називаються *коефіцієнтами в'язкості*. Вони є характеристиками рідини, які залежать від її складу і температури.

Підставивши (5) в (3), а (3) в (1), отримаємо найбільш загальний вигляд рівняння руху в'язкої рідини

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l}\right). \qquad (6)$$

Рівняння (6) суттєво спрощуються, якщо в'язкість не залежить від координат, і тоді його можна представити у векторному вигляді:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon}\right) = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\vec{\upsilon} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\upsilon}. \qquad (7)$$

Це – так зване *рівняння Нав'є – Стокса* для в'язкої рідини. Воно спрощується для нестисливої рідини, тобто коли $\rho = const$. Тоді з рівняння неперервності $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{\upsilon} = 0$ випливає $\operatorname{div} \rho\vec{\upsilon} = 0$ і $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0$. В результаті замість (7) отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\upsilon} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{\upsilon}. \qquad (8)$$

Ми бачимо, що в нестисливій рідині в'язкість описується всього одним коефіцієнтом. Оскільки рідину практично можна вважати нестисливою, важливим є саме коефіцієнт в'язкості η. Відношення $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ називають *кінематичною в'язкістю*, а в'язкість η *– динамічною в'язкістю* (також ζ інколи називають другою в'язкістю).

Рівняння руху в'язкої рідини мають ще бути доповнені граничними умовами. Вони випливають з наступних міркувань. Між поверхнею твердого тіла і всякою в'язкою рідиною завжди існують сили молекулярного зчеплення, які приводять до того, що прилеглий до твердої стінки шар рідини повністю затримується, ніби прилипаючи до неї. Відповідно до цього гранична умова до рівнянь руху в'язкої рідини полягає у вимозі обертання в нуль швидкості рідини на нерухомих твердих поверхнях:

$$\vec{\upsilon}\,|_S = 0. \qquad (9)$$

ТЕМА 4. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

30. Постулати спеціальної теорії відносності

В основу спеціальної теорії відносності (СТВ) покладено два постулати, сформульовані Ейнштейном у 1905 році:

1) Принцип відносності Ейнштейна: Всі фізичні явища в усіх інерціальних системах відліку (ІСВ) при однакових початкових умовах протікають однаково. Це означає, що рівняння, які описують фізичні явища будь-якої природи, однакові у всіх ІСВ.

2) Принцип сталості швидкості світла: Світло у вакуумі завжди поширюється з постійною швидкістю c=2,998·10^8 *м/с*, незалежно від стану руху випромінюючого тіла.

Механіка Ньютона виходить з припущення про миттєву передачу взаємодій від одного тіла до іншого. В дійсності в природі миттєвих взаємодій не існує. Отже, слід припускати існування граничної швидкості поширення взаємодій. Ця гранична швидкість дорівнює швидкості світла c.

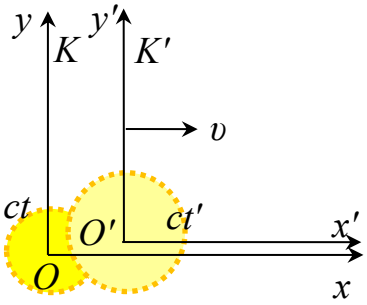
З другого постулату випливає, що швидкість поширення взаємодій однакова у всіх ІСВ, тобто є універсальною сталою, що суперечить класичному закону додавання швидкостей (6.2). Отже, постулати СТВ вимагають перегляду ньютонівської концепції поглядів на простір і час. Так, в класичній механіці час є абсолютним, тобто властивості часу вважають незалежними від системи відліку (час однаковий у всіх системах відліку). Це означає, що якщо дві події є одночасними для одного спостерігача, то вони є одночасними і для будь-якого іншого. Але поняття абсолютного часу суперечить ейнштейнівському принципу сталості швидкості світла, бо з поняття абсолютного часу випливає, зокрема, класичний закон додавання швидкостей.

Постулати СТВ вносять фундаментальні зміни в основні фізичні поняття. Ця обставина привела Ейнштейна до висновку, що рівняння Ньютона потребують уточнення. До Ейнштейна піддавалося сумніву рівняння Максвела, які не задовольняли вимозі інваріантності по відношенню до перетворень Галілея. Ейнштейн здійснив таку видозміну

законів механіки, при якій і самі рівняння механіки, і рівняння електродинаміки виявились інваріантними по відношенню до одних і тих же перетворень координат і часу, що відповідають переходу від однієї ІСВ до іншої.

31. Перетворення Лоренца

Оскільки постулати СТВ суперечать перетворенням Галілея, то постає задача про знаходження узгоджених з постулатами СТВ перетворень систем відліку. Для її розв'язання розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K', які рухаються одна відносно одної зі сталою швидкістю $\vec{v}$ вздовж вісей x і x'. Вважатимемо, що у початковий момент часу за годинниками обох ІСВ ($t=t'=0$) їхні початки координат O і O' співпадають.



Нехай певний кінематичний процес вивчається спостерігачем, який рухається разом з ІСВ K' і описує його за допомогою величин x', y', z'. Необхідно знайти таку систему перетворень цих величин, яка призводить до правильного опису цього процесу в змінних x, y, z, що використовується спостерігачем, який рухається разом з ІСВ K. В якості пробного процесу доцільно вибрати процес, який однаково виглядає в обох ІСВ. Таким процесом, у відповідності з постулатами СТВ, може служити поширення світла. У зв'язку з цим розглянемо поширення фронту сферичної світлової хвилі з центра координат обох систем відліку з моменту $t=t'=0$, коли вони співпадали. Тоді рівняння фронту хвилі у цих ІСВ матимуть вигляд:

$$\text{ІСВ } K:\ x^2+y^2+z^2=c^2t^2;\quad \text{ІСВ } K':\ x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2.$$

Звідси знаходимо:

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2.$$

При паралельних напрямках вісей координат матимемо $y=y'$, $z=z'$, тому

$$c^2t^2-x^2=c^2t'^2-x'^2. \qquad (1)$$

Зв'язок між x, t та x', t' передбачається лінійним. Враховуючи, що рівномірне переміщення початку O' ІСВ K' відносно початку O в ІСВ K здійснюється за законом $x_{O'} = \upsilon t$, має виконуватись наступна пропорційність: $x' \sim x - \upsilon t$. Це дозволяє подати зв'язок між x, t та x', t' у вигляді:

$$x' = \alpha\left(x - \upsilon t\right), \quad t' = \beta x + \gamma t\,. \tag{2}$$

де сталі коефіцієнти α, β, γ повинні залежати від модуля швидкості. Підставивши (2) в (1) і прирівнявши відповідні коефіцієнти при x^2, t^2, xt у правій і при x'^2, t'^2, $x't'$ у лівій частинах (1), знаходимо

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{-\dfrac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), отримаємо розшукуваний зв'язок між координатами в K' і K:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad t' = \frac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z\,. \tag{4}$$

Формули (4) називають *перетвореннями Лоренца*. Це є формули переходу від координат і часу в ІСВ K до координат і часу в ІСВ K', що рухається в додатному напрямку осі x зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Для зворотного переходу від K до K' достатньо врахувати, що знак швидкості K відносно K' буде зворотнім, і відповідні перетворення матимуть вигляд:

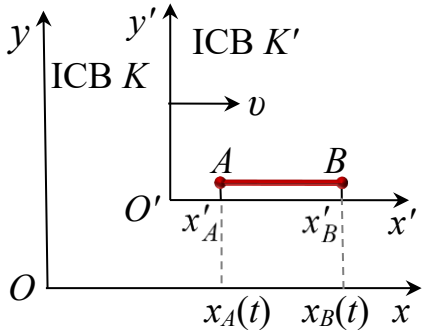
$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad t = \frac{t' + \dfrac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad y = y', \quad z = z'\,. \tag{5}$$

При $\upsilon > c$ формули (4)-(5) стають некоректними через від'ємний знак підкореневого виразу. Це відповідає факту, що рух зі швидкістю, більшою ніж швидкість світла, неможливий. Неможливе навіть використання ІСВ, що рухається зі швидкістю світла, так як при цьому у формулах (4)-(5) знаменник перетворюється в 0.

32. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца

а) Відносність довжини відрізка. З перетворень Лоренца випливає, що лінійний розмір тіла, яке рухається відносно ІСВ, зменшується в напрямку руху. Ця зміна повздовжнього розміру тіла при його русі називається *лоренцевим скороченням*. Для доказу такого наслідку СТВ розглянемо наступний мисленнєвий експеримент.

Нехай в системі відліку K' вздовж вісі x' розміщено нерухомий стержень AB довжиною l_0, яку можна визначити як різницю координати кінців стержня $x'_B,\ x'_A$:



$$l_0 = x'_B - x'_A.$$

Довжина l цього ж стержня в системі відліку K, відносно якої він рухається вздовж вісі Ox зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, дорівнює різниці значень координат кінців стержня, *виміряних в один і той же момент часу* t: $l = x_B(t) - x_A(t)$. Тоді з формул Лоренца отримуємо:

$$l_0 = x'_B - x'_A = \frac{x_B - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{x_A - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

або

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} < l_0. \qquad (1)$$

Таким чином, робимо висновок, що розмір тіла в напрямку руху скорочується пропорційно "релятивістському кореню" $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$. Що стосується поперечних розмірів тіла, то згідно з перетвореннями Лоренца вони не змінюються під час руху: $\Delta y' = \Delta y,\ \Delta z' = \Delta z$. Звідси випливає, що об'єм тіла V у ІСВ K, відносно якої тіло рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, зменшується пропорційно довжині:

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \qquad (2)$$

б) Відносність проміжків часу. Покажемо, що тривалість проміжку часу між будь-якими двома подіями також залежить від вибору ІСВ. Нехай в рухомій ІСВ K' дві події відбуваються в одній і тій же нерухомій відносно K' точці A ($x'_1 = x'_2 = x'$) в моменти часу t'_1 і t'_2, а проміжок часу між ними $\tau_0 = t'_2 - t'_1$. Відносно ІСВ K точка A рухається з тією ж швидкістю υ, що й система K'. Тому в ІСВ K події 1 і 2 відбуваються в різних точках з координатами x_1, x_2, причому $x_2 - x_1 = \upsilon\tau$, де $\tau = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями 1 і 2 за двома годинниками в ІСВ K. Скористаємось перетворенням Лоренца:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Звідси випливає співвідношення проміжків часу між одними й тими ж подіями в різних ІСВ:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Отже, в рухомій ІСВ K' час протікає повільніше, ніж у нерухомій ІСВ K ($\tau > \tau_0$). При цьому проміжок часу між двома подіями виявляється найменшим у тій ІСВ, відносно якої обидві події відбуваються в одній і тій же точці. Час τ_0, що вимірюється годинником, який рухається разом з даним об'єктом, називають *власним часом* даного об'єкта.

Передбачувані СТВ кінематичні явища є реальними і залежать лише від стану руху досліджуваних тіл, але вони помітні лише при швидкостях, близьких до швидкості світла. Одним з підтверджень цих явищ є сповільнення часу життя елементарних частинок, які народжуються в атмосфері Землі при поширенні космічних променів (див. п.42). У 1971 році Д.Хафале та Р.Кітінг безпосередньо підтвердили сповільнення часу під час подорожі навколо Землі на комерційних авіалайнерах, порівнюючи покази двох надзвичайно точних атомних годинників, один з яких перебував на літаку. Виміряна різниця складала десятки наносекунд і узгоджувалась з передбаченнями СТВ.

33. Релятивістський закон додавання швидкостей

Знайдемо зв'язок між значеннями швидкості, виміряної в нерухомій ІСВ K і в рухомій ІСВ K'. Для цього подамо перетворення Лоренца у диференціальній формі:

$$dx' = \frac{dx - \upsilon dt}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};\ dy' = dy;\ dz' = dz;\ dt' = \frac{dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

Поділивши ці вирази на dt, отримаємо:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx-\upsilon dt)/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{dx-\upsilon dt}{dt-\frac{\upsilon}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt}-\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x-\upsilon}{1-\frac{\upsilon u_x}{c^2}};$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\left(dx-\frac{\upsilon}{c^2}dt\right)/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon u_x}{c^2}};\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon u_x}{c^2}}\ . \qquad (1)$$

Тут u'_x, u'_y, u'_z – компоненти швидкості в ІСВ K', а u_x, u_y, u_z – компоненти швидкості в ІСВ K. Формули (1) зв'язують проекції швидкостей тіла в ІСВ K з проекціями швидкості тіла в ІСВ K'. Формули зворотних перетворень знаходимо заміною $\upsilon \to -\upsilon$:

$$u_x = \frac{u'_x+\upsilon}{1+\frac{\upsilon u'_x}{c^2}},\ u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon u'_x}{c^2}},\ u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon u'_x}{c^2}}\ . \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) називають *релятивістським законом додавання швидкостей*.

Нехай в ІСВ K' тіло рухається вздовж вісі x: $u'_x = u',\ u'_y = u'_z = 0$. Тоді з (2) випливає, що

$$u_x \equiv u = \frac{u'+\upsilon}{1+\frac{\upsilon u'}{c^2}},\ \ u_y = u_z = 0. \qquad (3)$$

Користуючись формулою (3), визначимо швидкість світла в ІСВ

K, якщо в ІСВ K' вона (u') дорівнює c: $u = \dfrac{c+\upsilon}{1+\dfrac{\upsilon c}{c^2}} = c,$ тобто в ІСВ K швидкість світла теж дорівнює c, як це вимагає 2-й постулат СТВ.

Отриманий закон додавання швидкостей пояснює негативний результат *досліду Майкельсона* (п. 42), в якому при вимірюванні швидкості світла в напрямку руху Землі і в протилежному напрямку були отримані однакові значення. Він пояснює також явище *аберації зірок*, яке полягає в тому, що при спостереженні променю світла з двох систем відліку, які рухаються одна відносно одної, цей промінь буде спостерігатись під різними кутами до деякого спільного в цих двох системах напрямку.

34. Інтервал та інші інваріанти СТВ

Згідно з висновками п. 32, СТВ змінила уявлення про довжину і проміжки часу. Вони втратили притаманний їм у класичній механіці абсолютний характер. В СТВ вони є відносними, залежними від швидкості руху тіла або зв'язаних з ними ІСВ.

На перший погляд, створюється враження, що в СТВ всі величини є відносними, залежними від відносної швидкості тіл, які досліджуються. Насправді особливості СТВ, в яких чітко виявляється єдність простору і часу, розкриваються не лише в перетвореннях Лоренца, у яких час і довжина залежать від системи відліку, а й в особливому інваріанті теорії, який називають інтервалом.

Нехай в ІСВ K дві події відбулись в точці (x_1, y_1, z_1) в момент часу t_1 і точці (x_2, y_2, z_2) у момент часу t_2 відповідно. *Інтервалом* між цими двома подіями називають величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}\,, \qquad (1)$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями; $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – відстань між точками, в яких

відбулися події. В іншій ІСВ K' ці події характеризуються іншими наборами координат і часу : (x_1', y_1', z_1', t_1'), (x_2', y_2', z_2', t_2'). Тому в ІСВ K' інтервал між подіями дорівнює:

$$s_{12}' = \sqrt{c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2},\ \left(t_{12}' = t_2' - t_1',\ l_{12}' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} \right).$$

Користуючись формулами перетворень Лоренца, можна показати, що $s_{12}' = s_{12}$, тобто при переході від однієї ІСВ до іншої інтервал між двома подіями не змінюється – є *інваріантом*. В класичній механіці такими інваріантними є відстані і проміжки часу.

Розглянемо питання, чи існує така ІСВ K', в якій дві задані події відбуваються в одній і тій-же точці простору. Скористаємось інваріантністю інтервалу $\left(s_{12}'^2 = s_{12}^2\right)$, з якої випливає, що $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Якщо така ІСВ K' існує, то в ній $l_{12}' = 0$. Тоді

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0. \qquad (2)$$

Отже, ІСВ з такою властивістю існує, якщо $s_{12}^2 > 0$, тобто якщо інтервал s_{12} – дійсне число. Дійсні інтервали називають *часоподібними*. Таким чином, якщо інтервал між двома подіями часоподібний, то існує така ІСВ, в якій обидві події відбуваються в одному і тому ж місці. Час між такими двома подіями, які відбулись в даній ІСВ в одній і тій же точці, називають *власним часом* між цими подіями. З (2) випливає, що він дорівнює $\tau = s_{12} / c$ і також є інваріантом СТВ разом з інтервалом та швидкістю світла.

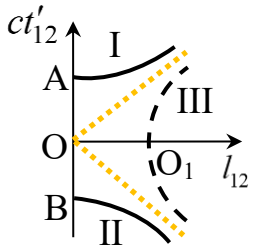
Вияснимо тепер, чи існує така ІСВ, в якій дві події відбулись би в один і той же момент часу? З рівності інтервалів в ІСВ K і K' знаходимо

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = \left[t_{12}' = 0 \right] = -l_{12}'^2 < 0.$$

Отже, така ІСВ існує, якщо квадрат інтервалу між подіями від'ємний, а сам інтервал між двома подіями уявний: $s_{12} = \pm i l_{12}'$. Такі уявні інтервали називають *просторово-подібними*.

Аналіз інтервалу між подіями дає відповідь на питання про наявність причинно-наслідкових зв'язків між ними. Дві події можуть бути причинно зв’язаними одна з одною тільки в тому випадку, якщо інтервал між ними часоподібний ($s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0$), що безпосередньо випливає з того, що ніяка взаємодія не може поширюватись з швидкістю, більшою за швидкість світла: $c > l_{12} / t_{12}$. Тільки для таких подій мають абсолютний зміст поняття „раніше” і „пізніше”, що є необхідною умовою для того, щоб мали зміст поняття причини і наслідку.

Із інваріантності інтервалу по відношенню до вибору ІСВ K' випливає, що у всіх ІСВ K' значення t'_{12} і l'_{12} для даних двох подій задовольняють рівнянню гіперболи: $c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12} = s_{12}^2 = const$.



Якщо $s_{12}^2 > 0$, то зв’язок між t'_{12} і l'_{12} в різних ІСВ K', що рухаються відносно нерухомої ІСВ K з усіма можливими швидкостями $\left(0 \le \upsilon < c\right)$, зображується графічно у вигляді двох віток гіперболи I і II. Таким чином, знак проміжку часу між подіями 1 і 2, зв’язаними часоподібним інтервалом, є абсолютний (не змінюється при переході від однієї ІСВ до іншої). Він не залежить від вибору ІСВ: в усіх ІСВ K' друга подія відбувається або завжди пізніше першої, тобто $t'_{12} > 0$ (вітка I), або завжди раніше першої, тобто $t'_{12} < 0$ (вітка II). Відстань l'_{12} відносна, причому завжди можна вказати таку ІСВ K', в якій $l'_{12} = 0$, тобто події 1 і 2 відбуваються в одному й тому ж місці (точки A і B на вітках гіперболи). Отже, двом подіям, зв’язаним причинно-наслідковим зв’язком, завжди повинен відповідати часоподібний інтервал, або в крайньому випадку, інтервал, що дорівнює нулю ($s_{12} = 0$ – нульовий інтервал). Це зумовлено тим, що сигнал, завдяки якому подія 1 (причина) обумовлює подію 2 (наслідок), не може поширюватись в просторі з швидкістю, більшою за швидкість світла в вакуумі: $l'_{12} \le ct'_{12}$.

Для подій, зв’язаних просторово-подібним інтервалом $\left(s_{12}^2 < 0\right)$, знак t'_{12} відносний: $t'_{12} > 0$ (верхня частина гіперболи III) в одних ІСВ

K', а в інших $t'_{12} < 0$ (нижня частина гіперболи III). Точка O_1 відповідає системі відліку K', в якій $t'_{12} = 0$, тобто події 1 і 2 відбуваються одночасно.

Поширенню світла відповідають прямі $l'_{12} = \pm ct'_{12}$ (пунктирна лінія на рисунку). В чотиривимірній СК вони зображувались би конусом з віссю t. Цей конус називають світловим конусом. Дві внутрішності цього конуса (I і II) відповідатимуть абсолютно минулим і абсолютно майбутнім подіям по відношенню до події O. Тобто, на події, що лежать всередині світлового конуса I (абсолютне майбутнє) можуть вплинути події з області II (абсолютне минуле), але ніколи не навпаки.

Область III можна було б назвати „абсолютно далекою" по відношенню до події O, тому що у будь-якій ІСВ K' подія O і інша подія з області III з'єднані просторово-подібним інтервалом ($s^2_{12} < 0$), тобто у будь-якій ІСВ ці події відбуваються в різних місцях простору ($l'_{12} > 0$ завжди). Поняття „одночасно", „раніше" і „пізніше" для цих подій відносні. Для будь-якої події з цієї області є такі ІСВ, де вона відбувається пізніше події O; є ІСВ, де вона відбувається раніше події O, і є одна ІСВ, де вона відбувається одночасно з O.

35. Чотиривимірний просторово-часовий многовид

Результати попередніх параграфів вказують на нерозривний зв'язок між простором і часом. Їх єдність привела Мінковського до думки розглядати простір і час як єдиний комбінований чотиривимірний многовид – *Простір-Час*, який ще називають *чотиривимірним світом Мінковського.* У цьому світі положення матеріальної точки в кожен момент часу визначається чотирма координатами – трьома просторовими x, y, z і четвертою часовою t. Сукупність чотирьох координат, що визначає положення матеріальної точки у певний момент часу, називається світовою точкою. Крива, яку описує світова точка у Просторі-Часі, називається *світовою лінією*. Відстань між двома нескінченно близькими світовими точками визначається інтервалом, квадрат якого

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \qquad (1)$$

Вираз для інтервалу, а отже, і відстань між світовими точками у Просторі-Часі інваріантні відносно перетворень Лоренца. Подібним інваріантом відносно перетворень Галілея є відстань між двома точками в звичайному тривимірному просторі $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Порівнявши ds^2 і dl^2, помічаємо відмінність в (1) знаків при c^2dt^2 і dx^2, dy^2, dz^2. Вона відображає відмінність в природі простору і часу. Сукупність знаків при координатах в елементі інтервалу ds^2 називається *сигнатурою*; в Просторі-Часі Мінковського згідно з (1) вона дорівнює (+, –, –, –). Сигнатура не змінюється при будь-яких дійсних перетвореннях координат, тому відмінність між часовою і просторовими координатами завжди зберігається, і тому завжди можна відрізнити часоподібну координату від просторових по знаку при dt^2 в (1).

36. Чотиривимірні вектори і тензори

Сукупність координат подій (t, x, y, z) можна розглядати як компоненти чотиривимірного радіус-вектора у чотиривимірному Просторі-Часі. Ці компоненти позначають через x^i, де індекс i пробігає значення від 0 до 3: $x^i\,(i = 0,1,2,3)$, причому

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z\,. \qquad (1)$$

Перетворення Лоренца в позначеннях (1) мають вигляд:

$$x^0 = \frac{x'^0 + \frac{\upsilon}{c}x'^1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\ x^1 = \frac{x'^1 + \frac{\upsilon}{c}x'^0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\ x^2 = x'^2,\ x^3 = x'^3. \qquad (2)$$

Квадрат довжини 4-вимірного радіус-вектора відповідає квадрату інтервалу:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = inv, \qquad (3)$$

який є інваріантом перетворень Лоренца.

Сукупність чотирьох величин $A^i(A^0, A^1, A^2, A^3)$ називають в СТВ *контраваріантним* 4-*вектором* A^i, якщо його компоненти при пере-

твореннях ІСВ перетворюються подібно компонентам 4-радіус-вектора (2):

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{\upsilon}{c} A'^1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{\upsilon}{c} A'^0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\ A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3. \qquad (4)$$

Компонента A^0 називається часовою, а компоненти A^1, A^2, A^3 – просторовими. По аналогії з (3) квадрат довжини 4-вектора A^i визначається за формулою

$$A^2 = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = inv. \qquad (5)$$

Квадрат 4-вектора може бути додатнім, від'ємним і нульовим; відповідно вектор називатиметься часоподібним, просторовоподібним або нульовим.

Наряду з контраваріантним вектором A^i з індексом вгорі для спрощення запису виразів типу (5) вводять *коваріантний* вектор A_i з індексами внизу. При цьому зв'язок між контраваріантними і коваріантними компонентами встановлюється правилом, за яким часові компоненти є однаковими, а просторові відрізняються знаком:

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3. \qquad (6)$$

Тоді квадрат довжини 4-вектора можна подати у вигляді

$$A^2 = A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = \sum_{i=0}^{3} A^i A_i \equiv A^i A_i .$$

У цьому виразі використано *домовленість про підсумовування*, згідно з якою по всякому індексу, який повторюється в даному виразі двічі – вгорі і внизу, передбачається підсумовування, а знак суми опускається, тобто $A^2 = A^i A_i$ (порівняйте з п. 21). Індекси, по яким здійснюється підсумовування, називаються *німими*.

Аналогічно квадрату 4-вектора визначається скалярний добуток 2-х різних векторів. *Скалярним добутком* векторів A^i і B_i називається інваріантна відносно перетворень Лоренца величина

$$A \cdot B = A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 .$$

Введемо також важливе в СТВ поняття 4-тензора. Контраваріантним 4-вимірним тензором 2-го рангу називають сукупність 16-ти величин $A^{ik}\ (i,k=0,1,2,3)$, які при перетвореннях координат перетворюються як добуток двох 4-векторів. Наряду з компонентами A^{ik} з індексами вгорі, які називаються контраваріантними, розглядаються коваріантні компоненти A_{ik} з індексами внизу, та змішані $A^{i}{}_{k}$. Зв'язок між різними видами компонент визначається правилом: *підняття або опускання часового індексу* (0) *не змінює, а підняття або опускання просторового індексу* (1,2,3) *змінює знак компоненти*. Наприклад,

$$A_{00}=A^{00}=A^{0}_{0};\ \ A_{01}=A^{0}_{1}=-A^{01}=-A_{0}{}^{1};\ \ A_{12}=-A^{1}{}_{2}=A^{12},\ \ldots\ .$$

Для зручності піднімання і опускання індексів вводиться так званий метричний тензор, коваріантні і контраваріантні компоненти якого однакові. Його можна представити у вигляді

$$g_{ik}=g^{ik}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{7}$$

(індекс i нумерує стрічки, а індекс k – стовпчики в порядку значень 0, 1, 2, 3). При цьому має місце співвідношення:

$$g_{ik}\cdot g^{kl}=\delta_i^k=\begin{cases}1,\ i\neq k\\0,\ i=k\end{cases} \tag{8}$$

де δ_i^k називається символом Кронекера, або одиничним тензором. За допомогою метричного тензора підняття і опускання індексів має вигляд:

$$A_i=g_{ik}A^k,\ A^i=g^{ik}A_k,\ A_{ik}=g_{im}g_{kl}A^{ml}\ . \tag{9}$$

Зокрема, $A_1=g_{1k}A^k=g_{10}A^0+g_{11}A^1+g_{12}A^2+g_{13}A^3=-A^1;\ A^0=g^{0k}A_k=$ $=g^{00}A_0=A_0$. У скалярному добутку векторів також можна використати метричний тензор:

$$A\cdot B=A^iB_i=g^{ik}A_kB_i=g_{ik}A^iB^k\ . \tag{10}$$

Особливого значення метричний тензор набуває у зв'язку з записом квадрата інтервалу

$$s^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = x_i x^i = g_{ik} x^i x^k . \qquad (11)$$

Якщо взяти дві нескінченно близькі події, з'єднані 4-радіус-вектором dx^i, то відстань між ними у просторі-часі визначається квадратом елемента інтервалу

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} = g_{ik} dx^i dx^k . \qquad (12)$$

Таким чином, метричний тензор g_{ik} визначає метричні властивості 4-вимірного Простору-Часу, що й обумовило його назву.

37. Релятивістська інваріантність

У відповідності з принципом відносності Ейнштейна всі фізичні процеси в усіх ІСВ протікають однаково, а це вимагає, щоб всі фундаментальні рівняння фізики в усіх ІСВ мали однакову форму, яка не змінюється при перетвореннях Лоренца, що відповідають переходам від однієї ІСВ до іншої. Це формальне вираження принципу відносності називають релятивістською інваріантністю. Зокрема, рівняння Максвела для електромагнітного поля є релятивістськи інваріантні, а от рівняння Ньютона цій вимозі вже не задовольняють, і тому мають бути видозмінені.

СТВ поставила і реалізувала задачу про знаходження релятивістської інваріантної форми фізичних законів. Розв'язання цих задач випливає з аналогії із класичною механікою. В класичній механіці всі закони формулюються або у вигляді скалярних рівностей типу $\alpha = \beta$, де α, β – скаляри, або векторних рівностей $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, де $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ – вектори. Перше з цих рівнянь містить зв'язок між скалярними величинами, які залишаються незмінними при повороті координатних вісей. Друге зв'язує між собою векторні величини, які змінюються при поворотах вісей – змінюються їх компоненти, але оскільки вони змінюються в обох векторах $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ однаково, то рівність $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ не порушується, вона не залежить від системи координат.

Перетворення Лоренца відповідають поворотам системи координат у Просторі-Часі. Виходячи з цієї геометричної інтерпретації і аналогії з класичною механікою, можна зробити висновок про релятивістськи інваріантну форму фізичних законів. А саме, для того, щоб деякий вираз був релятивістськи інваріантним, він повинен був мати вигляд $a=b$, де a і b – скаляри, або $a_i=b_i$, де a_i, b_i – 4-вимірні вектори, і в загальному випадку

$$a_{ik\ldots lm} = b_{ik\ldots lm}, \qquad (1)$$

де $a_{ik\ldots lm}$, $b_{ik\ldots lm}$ – 4-вимірні тензори довільного рангу. При перетвореннях 4-вимірної системи координат у Просторі-Часі всі величини, що входять в релятивістські рівняння виду (1), перетворюються за одним і тим же законом так, що вигляд рівнянь не змінюється. Ці умови інваріантності у 4-вимірному Просторі-Часі є безпосереднім аналогом умов інваріантності при повороті системи координат у реальному 3-вимірному просторі.

Один із способів знаходження таких релятивістськи інваріантних величин полягає у послідовному переході від більш простих величин, фізичний зміст яких добре відомий, до більш складних тензорів. Нам відомі такі інваріанти СТВ: швидкість світла c, елемент інтервалу ds, власний час $d\tau = \dfrac{ds}{c}$, диференціал 4-вимірного радіус-вектора dx^i. В наступних параграфах ми з цих величин утворимо інші релятивістськи інваріантні величини та знайдемо рівняння, яким вони задовольняють.

38. Чотиривимірні швидкість і прискорення

У класичній механіці швидкість визначається виразом

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1)$$

Але ця величина не є інваріантом в СТВ, тому що і час dt, і переміщення $d\vec{r}$ не є інваріантами перетворень Лоренца. Проте, замінивши в (1) вектор $d\vec{r}$ на 4-вимірний нескінчено малий приріст 4-радіус-вектора dx^i, а dt на інваріантний час $d\tau = ds / c$, приходимо до визначення

релятивістськи інваріантного аналога швидкості (1) – чотиривимірного вектора швидкості

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}. \tag{2}$$

Враховуючи визначення компонент чотиривимірного радіус-вектора $dx^i(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = dx^i(cdt, dx, dy, dz)$ і власного часу $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$, знайдемо компоненти 4-швидкості:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad u^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

$$u^2 = \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad u^3 = \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

або

$$u^i\left(u^0, u^1, u^2, u^3\right) = u^i\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= u^i\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right), \tag{3}$$

де $\vec{\upsilon}$ – звичайна тривимірна швидкість частинки. При $\upsilon \ll c$ просторова частина 4-швидкості переходить у звичайну швидкість $\vec{\upsilon}$, а часова – у швидкість світла c.

Знайдемо квадрат чотиривимірного вектора швидкості :

$$u^2 = u^i u_i = u^0 u_0 + u^1 u_1 + u^2 u_2 + u^3 u_3 = u^{0^2} - u^{1^2} - u^{2^2} - u^{3^2} =$$

$$= \frac{c^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} - \frac{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{c^2 - \upsilon^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = c^2,$$

тобто, квадрат 4-вимірного вектора швидкості є інваріантом перетворень Лоренца:

$$u^i u_i = c^2 = inv. \tag{4}$$

Геометрично 4-швидкість u^i є дотичним вектором до світової лінії частинки.

Визначимо тепер чотиривимірне прискорення як похідну від 4-швидкості по власному часу:

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} \ . \tag{5}$$

Якщо продиференціювати формулу (4) по власному часу $d\tau$, то знайдемо:

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^i u_i\right) = \frac{du^i}{d\tau}\cdot u_i + u^i \frac{du_i}{d\tau} = w^i u_i + w_i u^i = 2w^i u_i = \frac{d}{d\tau}c^2 = 0 .$$

Отже, скалярний добуток 4-прискорення і 4-швидкості дорівнює 0, тобто, вектори 4-швидкості і 4-прискорення взаємно перпендикулярні у 4-вимірному Просторі-Часі.

39. Принцип найменшої дії в СТВ

В СТВ для дослідження динаміки руху матеріальних частинок можна виходити з принципу найменшої дії, який полягає в тому, що для будь-якої механічної системи існує такий інтеграл *S*, названий дією, який для дійсного руху має мінімум (п. 4).

Визначимо інтеграл дії для вільної частинки, тобто частинки, яка не перебуває під впливом яких-небудь зовнішніх сил. Для цього зауважимо, що:

1) дія *S* в СТВ при малих швидкостях $\upsilon << c$ повинна переходити в дію для вільної частинки класичної механіки:

$$S_{кл} = \int_{t_1}^{t_2} L_{кл} dt, \ \ L_{кл} = \frac{m\upsilon^2}{2}; \tag{1}$$

2) інтеграл дії повинен бути інваріантом відносно перетворень Лоренца. Отже, він повинен бути взятий від скаляра, причому скаляр повинен мати вигляд диференціала в першій степені. Єдиний скаляр, який можна співставити вільній частинці, є величина, пропорційна інтервалу *ds*. Позначивши коефіцієнт пропорційності через α, отримаємо для дії наступний вираз:

$$S = \int \alpha ds . \qquad (2)$$

Подамо елемент інтервалу через час: $ds = cd\tau = cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$, тоді

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt = \int_{t_1}^{t_2} Ldt . \qquad (3)$$

Отже, функція Лагранжа в СТВ має вигляд

$$L = \alpha c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} . \qquad (4)$$

При $\upsilon << c$ вираз (4) повинен переходити до вигляду (1): $L \to L_{кл}$. Розвинемо (4) в ряд за степенями υ / c. Нехтуючи членами вищих порядків, отримаємо:

$$L \approx \alpha c\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \alpha c - \frac{1}{2}\alpha c\frac{\upsilon^2}{c^2} .$$

Відкинувши в L сталий доданок αc і порівнюючи остаток з $L_{кл} = \frac{m\upsilon^2}{2}$, знайдемо значення коефіцієнта: $\alpha = -mc$. Отже, функція Лагранжа і дія для вільної частинки дорівнюють

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \quad S = -\int mcds = -\int_{t_1}^{t_2} mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt . \qquad (5)$$

40. Енергія і імпульс у релятивістській механіці

У класичній механіці імпульс і енергія визначаються через функцію Лагранжа формулами (8.4) і (8.1)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{d\vec{\upsilon}}, \; E = \Sigma\frac{\partial L}{\partial\vec{\upsilon}}\vec{\upsilon} - L = \vec{p}\vec{\upsilon} - L . \qquad (1)$$

Скористаємось ними в СТВ, взявши релятивістський вираз для функції Лагранжа (39.5), отримаємо для імпульсу:

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial\vec{\upsilon}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}\right) = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} . \qquad (2)$$

При малих швидкостях $\upsilon << c$ цей вираз переходить в класичний: $\vec{p} \cong m\vec{\upsilon} = \vec{p}_{кл}$.

Енергія частинки за формулою (1) дорівнює

$$E = \vec{p}\vec{\upsilon} - L = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (3)$$

Це найвідоміша *формула Ейнштейна*, яка пов'язує енергію тіла з його масою. З формули (3) випливає, що енергія частинки при $\upsilon = 0$ не обертається в нуль, а дорівнює

$$E_0 = mc^2. \qquad (4)$$

Її називають *енергією спокою.* Різниця між повною енергією (3) і енергією спокою (4) дає кінетичну енергію частинки в СТВ:

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - mc^2. \qquad (5)$$

При малих швидкостях $\upsilon << c$ ця формула переходить в ньютонівський вираз для кінетичної енергії: $T \approx mc^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{m\upsilon^2}{2} = T_{кл}$.

Знайдемо 4-вимірний аналог величин 3-вимірного імпульсу $\vec{p}$ і енергії E, оскільки вони не є релятивістськими інваріантами. По аналогії з ньютонівським виразом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ визначимо 4-вимірний імпульс як 4-вектор з компонентами

$$p^i = mu^i \quad (i = 0,1,2,3), \qquad (6)$$

де $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ – компоненти 4-швидкості. Враховуючи (38.3), знаходимо, що 4-імпульс має компоненти

$$p^i\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = p^i\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \qquad (7)$$

Такими чином, енергія і звичайний, 3-вимірний імпульс виявляються компонентами одного 4-вектора – 4-імпульса частинки, який ще називають 4-вектором енергії-імпульсу. Знайдемо квадрат його довжини, враховуючи формулу (38.4):

$$p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = mu^i \cdot mu_i = m^2 c^2 .$$

Таким чином, приходимо до співвідношення

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 . \qquad (8)$$

Формула (8) означає енергію частинки, виражену через імпульс, яка називається функцією Гамільтона. Отже, функція Гамільтона вільної частинки в СТВ має вигляд:

$$H = c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} . \qquad (9)$$

Якщо ж частинка перебуває у зовнішньому силовому полі з потенціальною енергією U в ньому, то функція Гамільтона набуває вигляду

$$H = c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} + U . \qquad (10)$$

Підкреслимо, що хоч ми говорили тут про частинку, її елементарність ніде не використовується. Тому отримані формули можна також використовувати і до будь-якого тіла, яке складається з багатьох частинок, причому під m слід розуміти масу тіла, а під υ – швидкість його руху як цілого. Зокрема, формула (4) справедлива і для любого нерухомого як ціле тіла. Але енергія нерухомого тіла включає в себе, крім енергії спокою частинок, з яких воно складається, також кінетичну енергію частинок і енергію їх взаємодії між собою. Другими словами, $mc^2 \neq \sum_a m_a c^2$ (m_a – маси частинок), а тому і $m \neq \sum_a m_a$. Отже, в СТВ не має місця закон збереження маси: маса складного тіла не дорівнює сумі мас його частин. Замість цього має місце тільки закон збереження енергії, в яку входить і енергія спокою частинок.

41. Рівняння релятивістської динаміки

Рівняння Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея, але не інваріантні відносно перетворень Лоренца. Тому для того, щоб задовольнити принцип відносності Ейнштейна, 2-й закон Ньютона потрібно замінити більш загальним законом. Прийнявши до уваги, що при $\upsilon << c$ (υ – швидкість відносного руху ІСВ) перетворення Лоренца пе-

реходять в перетворення Галілея, необхідно вимагати, щоб релятивістські інваріантні рівняння руху при $\upsilon << c$ переходили в ньютонівські рівняння:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{1}$$

Очевидним 4-вимірним узагальненням цих рівнянь є:

$$\frac{dp^i}{dt} = \mathscr{F}^i. \tag{2}$$

Отже, в СТВ вводиться 4-вектор сили $\mathscr{F}^i$, який дорівнює похідній 4-вектора енергії-імпульсу частинки по її власному часу. Цей вектор називають силою Мінковського. Прийнявши до уваги вирази для власного часу і компонент 4-імпульсу:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},\ \ p^i\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right),$$

представимо рівняння (2) у вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \mathscr{F}^0, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \vec{\mathscr{F}}.$$

Помноживши ці рівняння на $\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \mathscr{F}^0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},\ \ \frac{d}{dt}\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \vec{\mathscr{F}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Якщо визначити просторові компоненти сили Мінковського $\vec{\mathscr{F}}$ так, щоб вони були зв'язані з компонентами звичайної 3-вимірної сили $\vec{F}$ співвідношеннями

$$\vec{F} = \vec{\mathscr{F}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}, \tag{4}$$

то рівняння (3) приймуть вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\vec{F}\ \text{ або }\ \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \qquad (5)$$

Видно, що при $\upsilon << c$ рівняння (5) дійсно переходить в рівняння Ньютона.

Вияснимо тепер зміст часової компоненти сили Мінковського $\mathcal{F}^0$. Для цього визначимо 4-вимірний скалярний добуток

$$\mathcal{F}^i u_i=\frac{dp^i}{dt}u_i=m\frac{du^i}{dt}u_i=mw^i u_i=[\text{п. 38}]=0.$$

З іншого боку,

$$\mathcal{F}^i u_i=\mathcal{F}^0 u_0+\mathcal{F}^1 u_1+\mathcal{F}^2 u_2+\mathcal{F}^3 u_3=$$
$$=\frac{\mathcal{F}^0 c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{\vec{\mathcal{F}}\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{\mathcal{F}^0 c}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{\vec{\mathcal{F}}\cdot\vec{\upsilon}}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=0,$$

звідки

$$\mathcal{F}^0=\frac{\vec{\mathcal{F}}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (6)$$

Отже, тепер можна написати всі компоненти сили Мінковського:

$$\mathcal{F}^i=\left(\frac{\vec{\mathcal{F}}\cdot\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right). \qquad (7)$$

Скалярний добуток 3-вимірних векторів $\vec{F}$ і $\vec{\upsilon}$ дає роботу сили $\vec{F}$ за одиницю часу, тобто потужність $\frac{dE}{dt}$. Отже, вираз (6) можна представити у вигляді:

$$\mathcal{F}^0=\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dE}{dt}, \qquad (8)$$

де $E=mc^2/\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ - енергія частинки.

Знайдемо тепер зв'язок між тривимірною силою $\vec{F}$ і прискоренням $\vec{w}$. Для цього рівняння (5) представимо у вигляді:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{\vec{\upsilon}}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{m\vec{\upsilon}\left(-\frac{2\vec{\upsilon}}{c^2}\cdot\dot{\vec{\upsilon}}\right)}{2\sqrt{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^3}} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\vec{w} + \frac{\vec{\upsilon}\cdot\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{w}\right)}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}\right). \qquad (9)$$

Звідси випливає, що в загальному випадку вектор сили і вектор прискорення непаралельні між собою.

Відмітимо, що релятивістські рівняння динаміки лежать в основі розрахунків при проектуванні сучасних прискорювачів елементарних частинок, в яких останні досягають швидкостей, досить близьких до швидкості світла, тому без урахування ефектів СТВ їх успішна робота стала б неможливою.

42. Експериментальне обґрунтування СТВ

1) Дослід Майкельсона (1881-1929 рр.) був поставлений для виявлення відмінностей величини швидкості світла у напрямку руху Землі і у протилежному напрямку. У збудованому ним інтерферометрі (рис. 1) промінь світла від джерела *S* розщеплюється в напівпрозорій пластині НП на 2 промені, які, відбившись від дзеркал Д$_1$ і Д$_2$, знову падають на напівпрозору пластину НП і після проходження інтерферують у С. Вигляд інтерференційної картини визначається різницею часу проходження світлом плечей l_1 і l_2. Враховуючи швидкість поширення Землі $\vec{\upsilon}$, знайдемо час проходження плечей T_1 і T_2. Для променя, що рухається вздовж напрямку руху Землі від пластини НП до дзер-

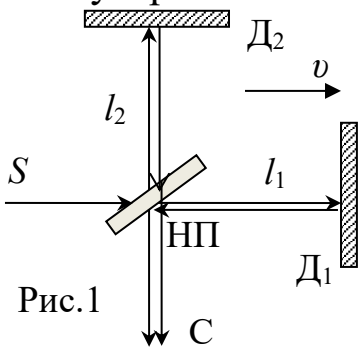


Рис.1

кала $Д_1$ і назад, згідно з класичним закон додавання швидкостей Галілея, отримаємо (див. рис. 1):

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{c-\upsilon} - \frac{l_2}{c+\upsilon} = \frac{2cl_1}{c^2-\upsilon^2}.$$

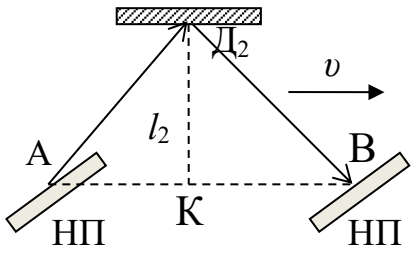


Рис. 2

У випадку другого променя, що поширюється перпендикулярно до напрямку руху Землі (рис.2), час його ходу від пластини НП до дзеркала $Д_2$ і назад дорівнюватиме

$$T_2 = \frac{2АД_2}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{(КД_2)^2 + (АК)^2} = \frac{2}{c}\sqrt{l_2{}^2 + \left(\frac{\upsilon T_2}{2}\right)^2}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно T_2, знайдемо

$$T_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}.$$

Отже, різниця ходу променів визначатиметься часом

$$\Delta T = |T_1 - T_2| = \left|\frac{2cl_1}{c^2-\upsilon^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\right|.$$

Якщо плечі l_1 і l_2 інтерферометра повернути на 90°, помінявши їх місцями, різниця часу ходу променів зміниться і дорівнюватиме:

$$\Delta T' = |T_1' - T_2'| = \left|\frac{2cl_2}{c^2-\upsilon^2} - \frac{2l_1}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}\right|,$$

а отже, $\Delta T \neq \Delta T'$. Зміна різниці часу ходу променів повинна була б привести до зміщення смуг в інтерференційній картині. Але ніякого зміщення смуг у досліді не спостерігалось, незважаючи на багаторічні удосконалення Майкельсоном інтерференційної установки.

З точки зору класичної фізики, на основі якої і були отримані попередні висновки, негативний результат досліду Майкельсона не мав пояснення. Тільки теорія відносності пояснила результат досліду Майкельсона на основі припущення про незалежність швидкості світла від стану руху джерела: оскільки швидкість поширення в усіх напрямках,

у відповідності з 2-им постулатом СТВ, є однаковою у всіх напрямках і дорівнює c, то час поширення обох променів не залежить від орієнтації плечей інтерферометра, а тому

$$T_1 = T_1' = \frac{2l_1}{c}, \quad T_2 = T_2' = \frac{2l_2}{c},, \text{ звідки } \Delta T = \Delta T'.$$

2) Час життя елементарних частинок

При поширенні в атмосфері Землі космічних променів – потоку високоенергетичних елементарних частинок, що прилітають з космосу – внаслідок каскаду ядерних взаємодій і перетворень виникають μ^+- та μ^-- мезони (мюони). Мюони є нестабільними частинками, які розпадаються при повільному русі за час $T_0 \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6} c$. Проте мюони, що утворюються космічними променями, пролітають зі швидкістю $\upsilon \approx c$ відстань порядку 20 км, що відповідає часові життя $T \approx 0{,}7 \cdot 10^{-4} c >> T_0$, який значно більший від T_0. Це можна пояснити, тільки якщо врахувати релятивістський ефект сповільнення часу: у власній системі відліку, пов'язаній з рухомим мюоном, час протікає повільніше, ніж у лабораторній системі, згідно з (32.3).

2) Релятивістський ефект Допплера

Так називають явище зміни частоти хвилі ν, випромінюваної джерелом, що рухається відносно спостерігача, порівняно з частотою ν_0 того ж джерела в системі відліку, в якій воно покоїться. Формула, що зв’язує ці частоти, має вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\upsilon}{c}\cos\alpha}, \qquad (1)$$

де α – кут між напрямком поширення хвилі і напрямком відносного руху джерела та спостерігача. При $\upsilon \ll c$ ця формула, якщо α не дуже близький до 90°, дає

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\cos\alpha \right).$$

Цей результат був відомий ще в класичній фізиці. Але при α=90° класична фізика дає $\nu = \nu_0$, тоді як в СТВ виявляється поперечний ефект Допплера

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{2c^2} \right).$$

4) Ефект Комптона, який полягає у тому, що при розсіянні рентгенівського випромінювання на вільних або слабозв'язаних електронах довжина розсіяної електромагнітної хвилі збільшується порівняно з довжиною падаючої хвилі. Теорія ефекту Комптона базується на поєднанні квантових уявлень про корпускулярну (фотонну) природу світла і релятивістських формул для енергії та імпульсу. На основі законів збереження енергії і імпульсу під час розсіяння фотона на електроні Комптон вивів формулу для зміни довжини хвилі фотона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right)$$

(h – стала Планка, m – маса спокою електрона, θ – кут розсіяння), яка ним же була успішно підтверджена експериментально.

5) Дефект мас в атомних ядрах. Відомо, що ядра атомів усіх хімічних елементів складаються з протонів і нейтронів. Маса протона в атомних одиницях $m_p \approx 1{,}0081213$, а маса нейтрона $m_n \approx 1{,}00893$. У кожному ядрі міститься Z протонів і $A–Z$ нейтронів, де Z – порядковий номер елементу в таблиці Мендєлєєва, A – його масове число. Отже, маса ядра повинна була б становити величину

$$M = Z\, m_p + (A–Z)\, m_n.$$

Проте експериментальними вимірюваннями мас ядер було встановлено, що насправді маса ядра менше від величини, обчисленої за даною формулою, на величину ΔM, яка називається дефектом мас. Наявність дефекту маси вказує на те, що при утворенні ядра з елементарних частинок виділилась енергія $E = \Delta M \cdot c^2$ і відповідно зменшилась

маса ядра. З іншого боку, для того, щоб зруйнувати ядро, треба затратити таку саму енергію, яка виділилась при його утворенні. Це явище використовується в уранових реакторах, в термоядерному синтезі.

6) Проєктування прискорювачів елементарних частинок і планування експериментів здійснюється з використанням рівнянь релятивістської динаміки (41.9), оскільки швидкості частинок в сучасних прискорювачах наближаються до швидкості світла у вакуумі.

7) Урахування релятивістського сповільнення часу в GPS, без якого визначення місцезнаходження було б неточним і накопичувало помилку до 10 км на добу.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бар’яхтар В.Г., Бар’яхтар І. В., Гермаш Л. П., Довгий С. О. Механіка. К.: “Наукова Думка”, 2011. 352с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. Ч. 1.: Статика. Кінематика: підручник. Київ: Знання, 2004. 599 с.
3. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки: підручник. Вид. 2-ге, переробл. і допов. Київ: Радянська школа, 1968. 372 с.
4. Гедеон В. Ф., М. І. Карбованець, Нодь Є. А. Класична механіка. Ч. 1.: навч. посіб. Ужгород: Говерла, 2025. 49 с. URI https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/69825
5. Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В. Класична механіка (курс лекцій). Умань: ПП «Жовтий», 2015. 160 с.
6. Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. Класична механіка: підручник для студентів фізичних спеціальностей університетів. Київ: Фізичний факультет КНУ ім. Шевченка, 2007. 399 с.
7. Єзерська О.В. Класична динаміка у ньютонівському та лагранжевому формалізмі : навчально-методичний посібник / О.В. Єзерська, О.С. Ковальов, З.О. Майзеліс, Т.С. Чебанова. Харків : Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 2019. 148 с. URI: https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/15821
8. Іро Гаральд. Класична механіка / Пер. з нім. Ґайда Р., Головач Ю. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. 464 с.
9. Ліщинський І.М. Класична механіка. Курс лекцій. Івано-Франківськ. 2020, 287 с.
10. Павловський М.А. Теоретична механіка. Київ: Техніка, 2002. 510 с.
11. Теоретична фізика. Класична механіка [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю.І. Джежеря, С. О. Решетняк, В. В. Хіст. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 142с. URI: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/72189
12. Федорченко А.М. Теоретична фізика. У 2-х т. Т. 1. Класична механіка і електродинаміка. Київ: Вища школа, 1992. 535 с. https://lib.in.ua/99924-pidruchnyk-klasychna-mehanika/

ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

Укладачі: М. В. Дудик, Ю. В. Решітник

Підписано до друку 11.12.2025 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офс. Гарнітура Times. Друк цифр.
Ум. друк. арк. 6,045 . Обл.-вид. арк. 4,94
Тираж 100 пр.

Інформація про видавця:
АНФ ГРУП, ТОВ
07400, Київська обл., м. Бровари, вул. Декабристів 46, к. 149
тел.: + 38 04594 72120, + 38 050 953 21 39
e-mail: anf-group@ukr.net
anf-group.com.ua
Свідоцтво про внесення
до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК No 4329 від 24.05.2012

