КОНТАКТНА МЕХАНІКА

ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Колективна монографія

За загальною редакцією
Р. М. Мартиняка

Видавець Вікторія Кундельська
Львів 2022

УДК 539.3
М 29

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода
д-р фіз.-мат. наук, доц. Й.З. Піскозуб
д-р техн. наук, ст. дослідник М.М. Ткачук

Мартиняк Р.М.

М 29 Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова, В.І. Острик, М.С. Слободян, В.І. Кузьменко, О.В. Приходько, Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова, В.П. Силованюк, Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко, О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк, О.В. Максимук, Ю.В. Сачук, А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека, Т.С. Нагірний, К.А. Червінка, А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Фень-ків; за заг. ред. Р.М. Мартиняка // Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с . – URL: https://www.researchgate.net/publication/366177313

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

Монографія присвячена математичному моделюванню та розробленню аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Для наукових та інженерних працівників, які спеціалізуються в галузі механіки деформівного твердого тіла, контактної механіки і трибології.

Іл. 224. Табл. 23. Бібліогр. 395 назв.

УДК 539.3

© Мартиняк Р.М., 2022
© Автори розділів, 2022
© Видавець Вікторія Кундельська, 2022

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 9

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ 12

РОЗДІЛ 1. Відшарування і руйнування гнучкого підсилення півплощини за сталого й циклічного навантажень
М.М. Кундрат 14

1.1. Гранична рівновага півбезмежної пластини з підсиленням 14
1.1.1. Формулювання задачі та її розв'язок 15
1.1.2. Відшарування за деформаційним критерієм 18
1.1.3. Автономність зон біля кінців підсилення 21
1.1.4. Розрив підсилення 21
1.2. Матеріал контактної межі крихкий 26
1.3. Термопружна задача для півплощини з підсиленням 29
1.4. Пластина з періодичною системою підсилень 31
1.4.1. Формулювання задачі та її розв'язування 31
1.4.2. Відшарування підсилень 34
1.4.3. Контактні напруження 36
1.4.4. Розривання підсилення 38
1.5. Відшарування підсилення за циклічного навантаження 39
1.5.1. Формулювання задачі 39
1.5.2. Статичне навантаження 40
1.5.3. Циклічне навантаження 45
Список використаних джерел 46

РОЗДІЛ 2. Прямі та обернені плоскі контактні задачі за односторонньої взаємодії пружних тіл
Н.А. Гук, Н.Л. Козакова 48

2.1. Моделювання контакту тіл за наявності односторонніх зв'язків та тертя з використанням варіаційних принципів 48
2.2. Числовий метод розв'язання контактної задачі та ітераційний алгоритм 58
2.3. Дослідження поведінки двошарової системи за наявності односторонніх зв'язків та тертя під дією нормального навантаження 63
2.4. Задача ідентифікації додаткового зовнішнього навантаження для запобігання відшарування шарів 70
2.4.1. Математична модель оберненої задачі 71
2.4.2. Метод і алгоритм розв'язання задачі ідентифікації 72
2.4.3. Числовий аналіз задачі ідентифікації 74
Список використаних джерел 77

РОЗДІЛ 3. Фрикційний контакт берегів тріщини у пружному тілі
В.І. Острик 79
3.1. Контакт берегів прямолінійної тріщини у пружній площині за складного навантаження і різних умов контакту 80
3.2. Міжфазна тріщина у кусково-однорідній площині 86
3.2.1. Напівнескінченна тріщина 86
3.2.2. Скінченна тріщина 91
3.2.3. Взаємодія двох напівнескінченних тріщин 94
3.3. Міжфазна кругова тріщина у кусково-однорідному просторі 97
3.4. Міжфазна напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній смузі 99
3.4.1. Закрита тріщина 99
3.4.2. Часткове розкриття тріщини 103
3.4.3. Необмежена область розкриття тріщини 105
3.5. Тріщина на межі поділу кругового включення і матриці 106
Список використаних джерел 109

РОЗДІЛ 4. Згин та розтяг пластини з круговим отвором та системою прямолінійних тріщин за смугового контакту їх берегів
М.С. Слободян 115
4.1. Формулювання задачі 115
4.2. Побудова розв'язку задачі про згин пластини 117
4.3. Побудова розв'язку плоскої задачі 124
4.4. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі 130
4.5. Числовий аналіз задачі 131
4.5.1. Згин і розтяг пластини з отвором та однією прямолінійною тріщиною 131
4.5.2. Згин пластини з отвором та двома прямолінійними тріщинами 134
Список використаних джерел 137

РОЗДІЛ 5. Контактні задачі для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні
В.І. Кузьменко 140
5.1. Формулювання контактних задач теорії пластичності за складного навантаження 140
5.2. Квазіваріаційна нерівність 142
5.3. Числове розв'язання квазіваріаційної нерівності 145
5.4. Обкочування роликом мікронерівностей на поверхні смуги 147
5.5. Активне навантаження та розвантаження. Залишкова форма поверхні 154
5.6. Обернені задачі утворення мікрорельєфу заданого профілю 159
Список використаних джерел 166

РОЗДІЛ 6. Математичне моделювання фрикційного і безфрикційного контакту пружних шорстких тіл
О.В. Приходько 168

6.1. Моделювання нормальної і тангенціальної контактної податливості шорстких поверхонь 169
6.2. Крайові умови контактних задач для шорстких тіл 176
6.2.1. Контактні задачі без урахування тертя 179
6.2.2. Контактні задачі з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування 180
6.3. Зведення контактних задач до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь 183
6.4. Дискретизація інтегральних рівнянь контактної задачі 187
6.4.1. Контактні задачі без урахування тертя 187
6.4.2. Контактні задачі з урахуванням тертя 188
6.5. Ітераційні процеси для розв'язування дискретизованих рівнянь 191
6.5.1. Контактні задачі без урахування тертя 191
6.5.2. Контактні задачі з урахуванням тертя 191
Список використаних джерел 193

РОЗДІЛ 7. Задачі про контакт пружних шорстких тіл без тертя та зі зчепленням і проковзуванням
О.В. Приходько 194

7.1. Розв'язування контактних задач без урахування тертя 194
7.1.1. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір 194
7.1.2. Задача про контакт пружних куль зі шорсткими поверхнями 195
7.1.3. Задача про стискування пружних циліндрів 198
7.2. Розв'язування контактних задач з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування 199
7.2.1. Задача про вдавлювання пружної кулі в шорсткий пружний півпростір 199
7.2.2. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування 203
7.2.3. Задача про вдавлювання прямокутного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування 206
Список використаних джерел 209

РОЗДІЛ 8. Деякі просторові контактні задачі з урахуванням тертя і шорсткості
Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова 211
8.1. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору з лінійним законом деформування шорсткості 211
8.1.1. Формулювання задачі 211
8.1.2. Метод розв'язання 214
8.1.3. Аналіз результатів числових досліджень 218
8.2. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору за степеневого закону деформування шорсткості 220
8.2.1. Метод розв'язання 221
8.2.2. Числові результати 224
8.3. Статична задача про контакт в умовах часткового проковзування 226
8.3.1. Формулювання задачі 226
8.3.2. Метод розв'язання 228
8.3.3. Аналіз числових результатів 230
Список використаних джерел 233

РОЗДІЛ 9. Нелінійні моделі контактної взаємодії в транстропних тілах із залікованими тріщинами
В.П. Силованюк 235
9.1. Основні співвідношення теорії пружності транстропного тіла 235
9.2. Задача про поверхню розриву переміщень і напружень в транстропному тілі 237
9.3. Нелінійна модель заповненої тріщини в транстропному тілі 243
9.4. Плоска деформація транстропного тіла із залікованою тріщиною 245
9.5. Заліковування еліпсоїдальної тонкої порожнини-тріщини в транстропному тілі 249
9.6. Ефект розклинювання, що супроводжує заліковування тріщини ін'єктуванням 252
Список використаних джерел 256

РОЗДІЛ 10. Втискування кругового штампа у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі
Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко 257
10.1. Формулювання задачі 258
10.2. Зведення задачі до одновимірної та її розв'язання 260
10.3. Виведення сингулярного інтегрального рівняння 263
10.4. Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння 265
10.5. Встановлення моменту сили та осадки штампу 278
Список використаних джерел 279

РОЗДІЛ 11. Локальне зношування пружних півпросторів із виступами
О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк 281

11.1. Метод дослідження локального зношування тіл з поодиноким виступом на основі моделі фрикційно-втомного руйнування 282
11.2. Аналітичні розв'язки задач про зношування тіл із виступами різної форми 285
11.3. Зносо-контактна задача для тіл із регулярною системою виступів ... 291
11.4. Зносо-контактна задача для тіл з хвилястою поверхнею 296
Список використаних джерел 300

РОЗДІЛ 12. Контактні задачі з урахуванням зношування матеріалу
О.В. Максимук, Ю.В. Сачук 303

12.1. Зношування півплощини штампами канонічної форми 303
12.2. Зношування півплощини, захищеної шаром Вінклера 313
Список використаних джерел 319

РОЗДІЛ 13. Міжфазні розрізи між пластинкою з отвором і ребром жорсткості
А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека 322

13.1. Моделювання контактної взаємодії для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра .. 323
13.2. Напружена посадка замкненого пружного ребра в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки 329
13.3. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності симетричного міжфазного розрізу 337
13.4. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності двох симетричних міжфазних розрізів 344
Список використаних джерел 351

РОЗДІЛ 14. Приповерхнева неоднорідність густини та шорсткість поверхні у моделі локально неоднорідного пружного тіла
Т.С. Нагірний, К.А. Червінка 354

14.1. Густина та шорсткість поверхні тіла 354
14.1.1. Геометрична неоднорідність профілю реальної поверхні 354
14.1.2. Густина на поверхні тіла 356
14.2. Базові положення модельного опису 357
14.2.1. Балансові рівняння 357
14.2.2. Визначальні співвідношення 358
14.2.3. Ключова система рівнянь 360
14.3. Приповерхнева неоднорідність густини у півпросторі 361

14.4. Шорсткість поверхні та стан гетерогенного пружного шару 363
Список використаних джерел 368

РОЗДІЛ 15. Модель Комніноу міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів
А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М.Феньків 370

15.1. Розподіл напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактом берегів, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу 371
15.2. Наслідки контактної моделі міжфазної тріщини та межі її застосовності 376
15.3. Параметри маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу 380
Список використаних джерел 386
Додаток 389

ПЕРЕДМОВА

В колективній монографії «Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь» відображено сучасні результати українських вчених в галузі моделювання та розроблення аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, порушення контакту, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних дефектів і тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Авторами моногрфії є співробітники інститутів НАН України в Києві, Львові і Сумах, національних університетів і коледжів Дніпра, Запоріжжя, Луцька, Львова, Одеси, Рівного й Умані, незалежні дослідники, а також українські вчені, які працюють в університетах Великої Британії і Польщі.

В монографії досліджено граничну рівновагу тіла з нерозтягливим гнучким підсиленням вільного краю. З'ясовано вплив навантаження на розвиток локалізованих зон передруйнування. Визначено критичну довжину підсилення, за якої відбувається зміна характеру руйнування. Модельна схема застосована до аналізу процесу відшарування підсилення. Знайдено аналітичні залежності робочої довжини підсилення від амплітуди навантаження та кількості циклів за циклічного навантаження.

Змодельовано контактну поведінку двошарової системи за наявності односторонніх зв'язків та тертя на лінії розмежування матеріалів. Задачу сформульовано з урахуванням геометричної та конструктивної нелінійності у вигляді крайової задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей, що описують явища зчеплення, фрикційного проковзування та відриву шарів. Сформульовано і розв'язано обернену задачу для ідентифікації додаткового силового навантаження, що запобігає відшаруванню в системі.

Розглянуто фрикційне проковзування та часткове зчеплення берегів прямолійної тріщини в однорідній площині. За моделлю Комніноу вивчено фрикційний контакт берегів міжфазної прямолінійної тріщини у кусково-однорідній площині та смузі, кругової тріщини на межі поділу матеріалів у кусково-однорідному просторі та криволінійної тріщини на межі матриці та кругового включення.

Сформульовано задачу про згин з розтягом безмежної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких гладко контактують по смузі сталої ширини. Використовуючи метод комплексних потенціалів, її зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для похідних від стрибків переміщень та кутів повороту на берегах тріщин. Досліджено поведінку контактного зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль за різних параметрів задач.

Розглянуто клас контактних задач для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні та отримано числовий розв'язок задачі

поверхневого пластичного деформування обкочуванням роликом. Запропоновано формулювання та метод розв’язання обернених задач формування мікрорельєфу заданого профілю.

Змодельовано механічний контакт шорстких поверхонь з урахуванням нормальних і зсувних деформацій мікронерівностей. Сформульовано статичні контактні задачі для пружних шорстких тіл у вигляді систем рівностей та нерівностей для невідомих розподілів контактних напружень на поверхні можливого дотику. Описано алгоритм чисельного розв’язування систем нелінійних інтегральних рівнянь. Розв’язано задачі про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір, про контакт пружних куль та про стискування пружних циліндрів за відсутності тертя; з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування отримано розв’язок задачі про контакт пружної кулі з пружним півпростором та задач про вдавлювання циліндричного і прямокутного штампів у шорсткий півпростір.

Розглянуто просторову квазістатичну контактну задачу про ковзання з тертям квадратного в плані штампа по межі шорсткого півпростору і статичну задачу про вдавлювання з тертям такого штампа в шорсткий півпростір за наявності зон зчеплення і проковзування. Задачі розв’язано, поєднуючи метод ітерацій та метод механічних квадратур. Досліджено вплив початкових параметрів (коефіцієнтів шорсткості і висоти прикладання горизонтальної сили) на контактні характеристики і форму початково невідомої ділянки контакту, областей зчеплення і проковзування.

Побудовано модель деформування трансверсально-ізотропних тіл, що містять заліковані ін'єктуванням тріщини. В основу моделі покладені умови взаємодії матеріалу заповнювача із основним матеріалом, що враховують нелінійність деформування тонких прошарків ін'єкційного матеріалу. В результаті проблема зведена до розв'язування системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь відносно переміщень поверхонь тріщини. Отримано аналітичні розв'язки рівнянь для залікованих тріщин нормального відриву.

Розвинуто метод розв’язання контактної задачі про втискування кругового штампа позацентровою силою у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі. Знайдені момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа, та заглиблення штампа.

Сформульовано контактні задачі про зношування тіл з виступами за повного налягання поверхонь, використовуючи модель фрикційного втомного руйнування. Враховано, що стирання відбувається не на всій поверхні контакту, а лише на привершинних ділянках виступів, де питома сила тертя перевищує певне порогове значення. Розвинуто метод розв’язування задач цього класу, що полягає у зведенні їх до сингулярних інтегральних рівнянь на товщину зношеного матеріалу. Побудовано аналітичні розв’язки зносоконтакних задач для тіл з поодинокими виступами різної форми, для тіл з періодично розташованими виступами та тіл з хвилястими поверхнями.

Досліджено контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною з урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблена методика розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Розглянуто контакт жорстких штампів канонічної форми з пружною півплощиною, захищеною покриттям, за його зношування. Відповідне інтегро-диференціальне рівняння розв'язано, використовуючи поліноми Чебишова. Визначено розподіл контактного тиску, область контакту та величину зношування в різні моменти часу.

Досліджено напружений стан на межі поділу матеріалів нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра великої кривини при їх гладкому з'єднанні методом пресової посадки або за наявності одного чи двох міжфазних розрізів, береги яких у процесі деформації не контактують, при з'єднанні зварюванням (склеюванням). Математичні моделі таких задач побудовано у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь, числова реалізація яких проведена методами механічних квадратур і колокації. При визначенні початкових параметрів статично невизначеного підсилювального ребра використано метод сил.

Локально градієнтний підхід у термомеханіці використано до побудови математичних моделей, що враховують геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла. Порівняно із існуючими моделями, введено додатковий параметр, що описує шорсткість поверхні, та досліджено його вплив на приповерхневу неоднорідність густини і напружень та міцність тонкої плівки.

В рамках моделі Комніноу досліджено напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу біматеріального тіла. Виявлено існування інтервалів кутів зламу межі розділу і коефіцієнтів тертя берегів тріщини, для яких контакт берегів не забезпечує усунення осциляційної особливості напружень і переміщень, притаманних моделі повністю розкритої міжфазної тріщини. За допомогою методу Вінера–Гопфа отримано розв'язок задачі про параметри маломасштабної області контакту берегів тріщини, що взаємодіють за законом сухого тертя.

Львів, грудень 2022 р. Ростислав Мартиняк

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Вайсфельд Н.Д. − доктор фізико-математичних наук, професор, Королівський коледж, Лондон, Об'єднане Королівство – King's College, London, United Kingdom

Гук Н.А. – доктор фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Дейнека О.Ю. – кандидат технічних наук, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

Дудик М.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

Д'яченко Н.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

Камінський А.О. – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Козакова Н.Л. – кандидат фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Козачок О.П. – кандидат фізико-математичних наук, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Кузьменко В.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Кундрат М.М. – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

Максимук О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Мартиняк Р.М. – доктор фізико-математичних наук, професор, Львів, Україна

Нагірний Т.С. – доктор фізико-математичних наук, професор, Зеленогурський університет, Зелена Гура, Польща – University of Zielona Góra, Zielona Góra, Poland

Острик В.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

Приходько О.В. – кандидат фізико-математичних наук, Відокремлений структурний підрозділ «Запорізький металургійний фаховий коледж Запорізького національного університету», Запоріжжя, Україна

Сачук Ю.В. – кандидат фізико-математичних наук, КЗВО «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради, Луцьк, Україна

Силованюк В.П. – доктор технічних наук, професор, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

Слободян М.С. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Сяський А.О. – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

Сяський В.А. – кандидат технічних наук, доцент, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

Феньків В.М. − Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

Фесенко Г.О. − кандидат фізико-математичних наук, доцент, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

Червінка К.А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Шашкова Є.В. – магістр математики, Київ, Україна

Шевцова Н.В. – кандидат технічних наук, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

РОЗДІЛ 15

МОДЕЛЬ КОМНІНОУ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків

Дослідження кусково-однорідних тіл з тріщиною на плоскій межі розділу двох різних матеріалів, започатковані у 60-х роках минулого століття Вільямсом [43], Інглендом [24], Ердоганом [25], Райсом і Сі [38] та іншими, привели до передбачення фізично неможливого взаємного перетину берегів тріщин внаслідок просторових осциляцій переміщень з'єднаних матеріалів біля вершин. Подальші дослідження показали, що осцилюючі особливості біля вершин повністю розкритої міжфазної тріщини не зникають при урахуванні таких додаткових чинників, як кривина фронту міжфазної тріщини [44], відмінність конфігурацій кусково-однорідних тіл і навантаження від плоских [14], анізотропність з'єднаних матеріалів [37]. Проблема осциляційної поведінки параметрів напружено-деформованого стану в околі вершини міжфазної тріщини є також актуальною в задачах термопружності [6, 32], у дослідженнях п'єзоелектричних біматеріалів з електропроникною або електроізольованою тріщиною [27].

Осцилюючі особливості моделей повністю розкритої міжфазної тріщини зумовили певні труднощі із коректним застосуванням до них критеріїв лінійної механіки руйнування [28]. Вирішення цієї проблеми було запропоновано М. Комніноу [16, 17], яка допустила існування біля вершин міжфазної тріщини області контакту берегів. Дослідження Ю.О. Антіпова та ін. [1, 10], В.І. Острика і А.Ф. Улітка [8], P. Anderson [9], C. Atkinson [12], B. Audoly [13], M. Comninou [16, 17], M. Comninou, J. Dundurs [18], J. Dundurs, A. K. Gautesen [23], D. Leguillon [33] та інших дійсно підтвердили зникнення осциляцій переміщень та збереження степеневого характеру сингулярності напружень внаслідок контакту берегів для міжфазних тріщин у випадку їх розташування на плоскій межі розділу двох різних ізотропних матеріалів. Контактна модель також успішно використовувалась в дослідженнях тріщин на плоскій межі розділу різних анізотропних, п'єзоелектричних, електропровідних і діелектричних матеріалів у різних поєднаннях [26, 27, 29, 30, 40].

Але чи є контактна модель типу М. Комніноу бездоганною? Чи завжди вона забезпечує усунення осциляційної особливості, притаманної розкритій міжфазній тріщині? Для відповіді на дане питання у цьому розділі розглядається випадок міжфазних тріщин, розташованих на ламаній лінії розмежування двох різних матеріалів. Вони часто зустрічаються у будові сучасних промислових виробів, композитів з гранульованими наповнювачами, гірських порід тощо, проте визначенню напружено-деформованого стану в

околі вершин таких тріщин досі не приділялось достатньо уваги. Зокрема, P. S. Theocaris і E. E. Gdoutos [39], використовуючи метод комплексних потенціалів Мусхелішвілі, отримали характеристичні рівняння для показників сингулярності напружень в рамках першої, другої та змішаної основних задач теорії пружності для міжфазної тріщини з вершиною у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних однорідних матеріалів, не беручи до уваги можливий контакт берегів. За певних припущень показники сингулярності напружень у вищезгаданих умовах можуть бути визначені за результатами досліджень [15, 19, 34-36] локальних полів напружень в околі спільної вершини багатоклинової гетерогенної системи.

В [4, 21] було виконано аналіз поля напружень біля кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, від якої поширюється розкрита міжфазна тріщина. У згоді з результатами [39] встановлено, що у досить широкому інтервалі кутів зламу показник сингулярності напружень в околі кутової точки є комплексним. Як і у випадку міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це призводить до просторових осциляцій переміщень берегів тріщини з їх взаємним перекриттям.

Як зазначено вище, альтернативою моделі розкритої міжфазної тріщини є модель тріщини типу М. Комніноу з контактуючими берегами. У зв'язку з цим актуальним є дослідження локального поля напружень і переміщень біля кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, де розташована міжфазна тріщина, береги якої взаємодіють за законом сухого тертя. Завдання полягає у знаходженні в умовах плоскої деформації області можливого застосування контактної моделі М. Комніноу міжфазної тріщини, яка дозволяє усунути фізично неможливі просторові осциляції переміщень берегів тріщини біля кутової точки ламаної межі двох різних матеріалів, а також асимптотичних виразів для компонент тензора напружень біля вершини тріщини, необхідних при подальшому використанні для визначення граничних станів кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною, дослідження параметрів зон передруйнування в околі вершин тощо.

15.1. Розподіл напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактом берегів, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі теорії пружності для кусково-однорідного ізотропного тіла дослідимо поведінку напружень біля вершини міжфазної тріщини, яка збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу двох різних пружних однорідних ізотропних матеріалів. Матеріали характеризуються модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно. Припускаємо, що частина берегів тріщини довжиною s перебуває у контакті з тертям за законом Кулона. Коефіцієнт тертя берегів тріщини та кут зламу межі розділу дорівнюють відповідно μ і α. Локальна структура привершинної області зображена на рис. 15.1.

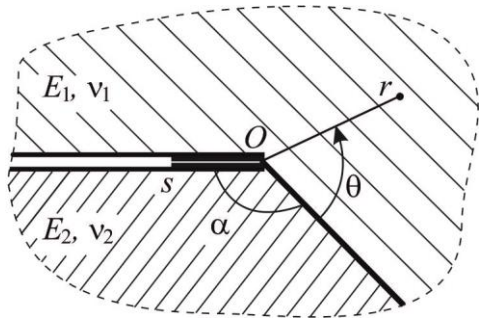


Рис. 15.1

Згідно із загальними положеннями про поведінку напружень поблизу кутових точок пружних тіл (на відстанях $r \ll s$), зводимо вихідну задачу до однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею розділу матеріалів у формі прямолінійних сторін кута, на одній з яких розташована півнескінченна тріщина з контактуючими берегами, вершина якої збігається з вершиною кута зламу. Виберемо полярну систему координат (r,θ) з початком O у вершині кута зламу межі розділу матеріалів і полярною віссю вздовж лінії з'єднання матеріалів. Врахувавши контакт берегів тріщини і умову неперервності напружень і переміщень на лінії з'єднання матеріалів, приходимо до крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\sigma_\theta^1(r,0)=\sigma_\theta^2(r,0),\quad \tau_{r\theta}^1(r,0)=\tau_{r\theta}^2(r,0),$$
$$u_\theta^1(r,0)=u_\theta^2(r,0),\quad u_r^1(r,0)=u_r^2(r,0),$$
$$\sigma_\theta^1(r,\beta)=\sigma_\theta^2(r,-\alpha),$$
$$\tau_{r\theta}^1(r,\beta)=\tau_{r\theta}^2(r,-\alpha)=-\mu\sigma_\theta^1(r,\beta),$$
$$u_\theta^1(r,\beta)=u_\theta^2(r,-\alpha)\quad(\beta=2\pi-\alpha), \tag{15.1}$$

де верхні індекси відповідають номеру матеріалу, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ – окружні нормальні та дотичні компоненти тензора напружень, u_r, u_θ – компоненти вектора переміщень.

Оскільки досліджуване тіло є з'єднанням двох пружних клинів, скористаємося методом Віггардта – Вільямса [41, 42] розкладання розв'язків рівнянь теорії пружності за власними функціями та подамо напруження і похідні від переміщень у кожному з матеріалів у вигляді:

$$\sigma_\theta^n(r,\theta)=r^\lambda[a_1^n\sin(\lambda+2)\theta+a_2^n\sin\lambda\theta+a_3^n\cos(\lambda+2)\theta+a_4^n\cos\lambda\theta],$$
$$\tau_{r\theta}^n(r,\theta)=-\frac{r^\lambda}{(\lambda+2)}[a_1^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta+$$

$$+a_2^n\lambda\cos\lambda\theta - a_3^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - a_4^n\lambda\sin\lambda\theta],$$

$$\sigma_r^n(r,\theta) = -\frac{r^\lambda}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta +$$

$$+a_2^n(\lambda-2)\sin\lambda\theta + a_3^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + a_4^n(\lambda-2)\cos\lambda\theta],$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta^n(r,\theta)}{\partial r^2} = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{\lambda r^{\lambda-1}}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\times\cos(\lambda+2)\theta + a_2^n(\lambda+4-4\nu_n)\cos\lambda\theta -$$

$$-a_3^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - a_4^n(\lambda+4-4\nu_n)\sin\lambda\theta],$$

$$\frac{\partial u_r^n(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{r^\lambda}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta +$$

$$+a_2^n(\lambda-2+4\nu_n)\sin\lambda\theta + a_3^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + a_4^n(\lambda-2+4\nu_n)\cos\lambda\theta], \quad (15.2)$$

де n=1 для $0 \le \theta \le \beta$ і n=2 для $-\alpha \le \theta \le 0$. Задовольняючи граничні умови (15.1) за допомогою формул (15.2), приходимо до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j^n (j=1÷4), нетривіальний розв'язок якої вимагає рівності нулю її детермінанта. Ця умова приводить до характеристичного рівняння задачі для визначення показника λ у функціональній залежності напружень від відстані r до вершини тріщини, яке після розрахунку детермінанта і його алгебраїчних перетворень набуває вигляду:

$$D(\lambda) \equiv D_1(\lambda) + \mu D_2(\lambda) = 0, \quad (15.3)$$

$$D_1(\lambda) = (1-e)[0,5(1+\kappa_1)D_{11}t_1 - 0,5e(1+\kappa_2)D_{12}t_3 + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)d_3] +$$
$$+e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{13},$$

$$D_2(\lambda) = (1-e)\{(1+\kappa_1)D_{21}t_1 - e(1+\kappa_2)[D_{22}t_3 - (1+\kappa_1)d_4] + 2(1-e)^2 t_1 t_3\} +$$
$$+e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{23},$$

$$D_{11}(\lambda) = (1-e)d_5 + (1+\kappa_1)\sin 2(\lambda+1)(2\pi-\alpha),$$

$$D_{12}(\lambda) = e(1+\kappa_2)\sin 2(\lambda+1)\alpha + (1-e)d_2,$$

$$D_{13}(\lambda) = \sin^2\lambda\pi[(1+\kappa_1)d_7 - e(1+\kappa_2)d_9];$$

$$D_{21}(\lambda) = (1-e)d_6 - (1+\kappa_1)t_2,$$

$$D_{22}(\lambda) = e(1+\kappa_2)t_4 + (1-e)d_1,$$

$$D_{23}(\lambda) = \sin^2\lambda\pi[(1+\kappa_1) - e(1+\kappa_2)]d_8;$$

$$d_1 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + 3t_4, \quad d_2 = (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha,$$

$$d_3 = \left[(\lambda+1)^2\sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta\right]\sin 2(\lambda+1)(\alpha-\pi) -$$
$$-2(\lambda+1)\sin^2\lambda\pi\sin 2\alpha\cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha),$$

$$d_4 = 2\Big[(\lambda+1)^2\sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta\Big]\sin^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) -$$

$$-4\sin^2\lambda\pi\Big[(\lambda+1)\sin^2\alpha\cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta\Big],$$

$$d_5 = (\lambda+1)\sin 2\alpha - \sin 2(\lambda+1)\beta, \quad d_6 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + 3t_2,$$

$$d_7 = (\lambda+1)\sin\alpha\cos\alpha - \sin(\lambda+1)\alpha\cos(\lambda+1)\beta,$$

$$d_8 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta,$$

$$d_9 = (\lambda+1)\sin\alpha\cos\alpha + \cos(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta.$$

$$t_1 = (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda+1)\beta,$$

$$t_3 = (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\beta, \quad t_4 = \sin^2(\lambda+1)\alpha,$$

$$e = \frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

У випадку $\alpha=\pi$ рівняння (15.3) з точністю до несуттєвих множників зводиться до відомого результату М. Комніноу [16]

$$\cos\lambda\pi + \mu\beta_D\sin\lambda\pi = 0$$

($\beta_D = \dfrac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)}$ – так званий другий параметр Дандерса), якому відповідає показник сингулярності напружень $\lambda = -\pi^{-1}\operatorname{arcctg}|\mu\beta_D|$.

Для кожного із знайдених коренів λ_i рівняння (15.3) вважатимемо один з коефіцієнтів a_j^n відомим і рівним заданій сталій, а саме: $a_4^2(\lambda_i) \equiv C_i$. Це дозволяє визначити решту коефіцієнтів, виразивши їх через C_i, та отримати шукані формули для локального поля напружень і переміщень біля вершини тріщини, які подамо у вигляді суперпозиції частинних розв'язків задачі з $\lambda_i > -1$:

$$\sigma_\theta(r,\theta) = \sum_i C_i F_1(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta}(r,\theta) = \sum_i C_i F_2(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i},$$

$$\sigma_r(r,\theta) = \sum_i C_i F_3(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i},$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta(r,\theta)}{\partial r^2} = \sum_i C_i F_4(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i-1}, \quad \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r} = \sum_i C_i F_5(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i}$$

$$F_m(\lambda,\theta) = \begin{cases} F_m^1(\lambda,\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi - \alpha, \\ F_m^2(\lambda,\theta), & -\alpha \le \theta \le 0; \end{cases} \quad (m = 1 \div 5)$$

$$F_1^n(\lambda,\theta) = \tilde{a}_1^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)\sin\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)\cos\lambda\theta,$$

$$F_2^n(\lambda,\theta) = -\tilde{a}_1^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta - \tilde{a}_2^n(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\cos\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta + \\ + \tilde{a}_4^n(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\sin\lambda\theta,$$

$$F_3^n(\lambda,\theta) = -[\tilde{a}_1^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)\frac{\lambda-2}{\lambda+2}\sin\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta + \\ + \tilde{a}_4^n(\lambda)\frac{\lambda-2}{\lambda+2}\cos\lambda\theta],$$

$$F_4^n(\lambda,\theta) = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{\lambda}{\lambda+2}[\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda+4-4\nu_n)\cos\lambda\theta - \\ - \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda+4-4\nu_n)\sin\lambda\theta],$$

$$F_5^n(r,\theta) = -\frac{1+\nu_n}{E_n(\lambda+2)}[\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda-2+4\nu_n)\sin\lambda\theta + \\ + \tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda-2+4\nu_n)\cos\lambda\theta]. \qquad (15.4)$$

Функції $\tilde{a}_j^n(\lambda)$ подано у Додатку. Отже, формули (15.4) з точністю до сталих C_i, які залежать від конфігурації кусково-однорідного тіла і прикладених навантажень, повністю визначають поле напружень і переміщень в околі кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. У множниках C_i закладена можливість урахування зовнішнього навантаження і будови конкретного кусково-однорідного тіла. На множник C_1 накладається умова $C_1F_1(\lambda_1,-\alpha)<0$, що відповідає дії стискального нормального напруження на береги тріщини і забезпечує їх контакт.

Отриманий розв'язок дозволяє оцінити довжину області контакту берегів за відстанню від вершини до точки, в якій нормальне напруження на берегах тріщини перетворюється в нуль. Обмежуючись у розвиненні $\sigma_\theta(r,2\pi-\alpha)$ двома першими доданками, знаходимо

$$s \approx \left(-\frac{C_1F_1(\lambda_1,2\pi-\alpha)}{C_2F_1(\lambda_2,2\pi-\alpha)}\right)^{1/(\lambda_2-\lambda_1)}. \qquad (15.5)$$

Оскільки знайдений вище розв'язок описує локальне поле напружень, використання отриманої оцінки довжини контактної зони обмежено вимогою, що розміри зони повинні бути значно меншими порівняно з довжиною тріщини або будь-якими іншими актуальними довжинами (відстанями від вершини тріщини до найближчої межі конкретного тіла, до найближчої точки прикладання зовнішніх сил тощо).

15.2 Наслідки контактної моделі міжфазної тріщини та межі її застосовності

З (15.2) випливає, що поведінка напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами носитиме сингулярний характер, якщо рівняння (15.3) матиме корені у смузі $-1<\mathrm{Re}\,\lambda<0$ (корені з дійсною частиною $\mathrm{Re}\,\lambda\le -1$ є неприйнятними, оскільки зумовлюють нескінчені переміщення при $r\to 0$). Якщо найменший з цих коренів, λ_1, є дійсним, особливість напружень буде степеневою. У випадку ж комплексного λ_1 на степеневу сингулярність з показником $\mathrm{Re}\,\lambda_1<0$ накладатимуться осциляції за радіальною координатою, що призводить до залежності напружень від відстані за законом $\sigma_{ik}\sim r^{\mathrm{Re}\,\lambda_1}\cos(\mathrm{Im}\,\lambda_1\cdot\ln r+\varphi)$ (φ – деяка стала); аналогічний осцилюючий множник з'являється у виразі для переміщень, зумовлюючи фізично неприпустимий взаємний перетин берегів тріщини.

Нижче подано результати числових розрахунків характеристик напруженого стану біля вершини тріщини та їх аналіз для з'єднання матеріалів з модулями Юнга, які задовольняють умову $E_1<E_2$. Отримані висновки переносяться на випадок $E_1>E_2$ шляхом одночасних замін $E_1\leftrightarrow E_2$, $\nu_1\leftrightarrow\nu_2$, $\mu\to-\mu$, $\alpha\to 2\pi-\alpha$.

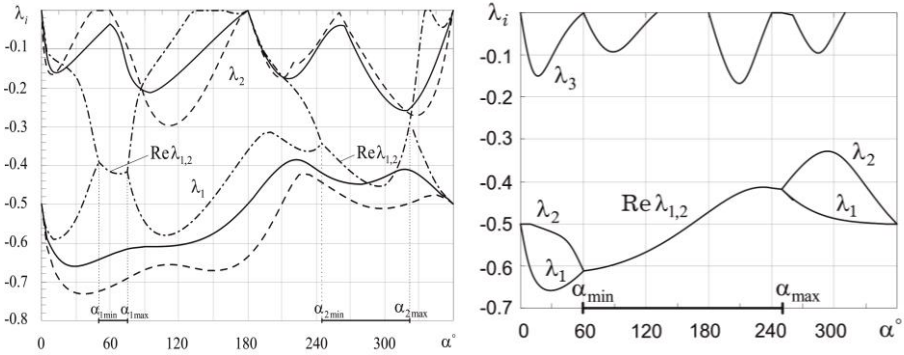
Чисельний аналіз рівняння (15.3) виявив, що коренів у смузі $-1<\mathrm{Re}\,\lambda<0$ може бути 1 або 2. На рис. 15.2 *а* показані залежності показників сингулярності λ_1, λ_2 у разі $E_1/E_2=0{,}1$, $\nu_1=\nu_2=0{,}3$ для $\mu=0$ (суцільна лінія), $\mu=2$ (штрихована лінія) і $\mu=-2$ (штрих-пунктирна лінія). Знак μ визначається напрямком відносних зсувних переміщень берегів тріщин, від якого залежить не лише показник сингулярності напружень, але й розмір області контакту. Останній висновок випливає з результатів досліджень контактної моделі міжфазної тріщини на плоскій межі розділу [8, 23], які для внутрішньої тріщини за дії зсувних навантажень прогнозують біля різних вершин тріщини співрозмірну та дуже малу порівняно з тріщиною контактні зони. В подальшому акцент робитимемо переважно на конфігурації тіла з параметрами $E_1<E_2$ і $\mu<0$ (рис. 15.1), за яких очікуються значні розміри області контакту.

На рис. 15.2 для частинного випадку пружних характеристик з'єднаних матеріалів $E_1/E_2=0{,}1$, $\nu_1=\nu_2=0{,}3$ подано залежність від кута зламу межі розділу показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини за наявності (*а*) та відсутності (*б*) контакту берегів. Розрахунки показника сингулярності для випадку *б*) виконано за результатами робіт [21, 39].

Як показано в [21, 39], показники сингулярності напружень біля вершин повністю розкритої міжфазної тріщини на певних інтервалах кутів зламу межі розділу ($\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$) (ділянка на рис. 15.2 *б* позначена $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$) мають комплексні значення, яким відповідають фізично некоректні осциляції переміщень берегів тріщини [21, 39]. Внаслідок контакту берегів у випадку $\mu\ge 0$ (рис. 15.2 *а*,

суцільна та штрихована лінії) показник сингулярності λ_1 виявляється дійсним для всіх кутів зламу, тому напруження біля вершини тріщини мають виключно степеневу особливість, а осциляції переміщень і напружень відсутні. Отже, використання контактної моделі типу М. Комніноу у випадку $\mu \geq 0$, $E_1/E_2<1$ дозволяє уникнути труднощів класичної моделі повністю розкритої міжфазної тріщини.

Проте, для $\mu<0$ існують інтервали кутів зламу ($\alpha_{1\min}$, $\alpha_{1\max}$), ($\alpha_{2\min}$, $\alpha_{2\max}$), на яких показники сингулярності можуть набувати комплексно спряжених значень λ_1, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, які зумовлюють фізично некоректні осциляції переміщень (штрих-пунктирна лінія, ділянка $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$ на графіку для $\mu = -2$ (рис. 15.2 *а*)). Отже, для кутів зламу межі розділу, що попадають у ці інтервали, контактна модель міжфазної тріщини типу М. Комніноу стає неефективною.



а) *б)*

Рис. 15.2

Як видно з порівняння рис. 15.2 *а* і рис. 15.2 *б*, показники сингулярності λ_1 біля вершин тріщини з контактуючими берегами та розкритої тріщини для більшості значень кутів зламу виявляються близькими між собою та до значення –0,5, яке відповідає тріщині в однорідному матеріалі. Водночас показники λ_2 досить суттєво відрізняються, тому відповідно до їх значень передбачається значно менший вплив λ_2 на напружений стан біля вершин у випадку закритої тріщини, ніж розкритої.

У табл. 15.1 подано інтервали ($\alpha_{1\min}$; $\alpha_{1\max}$), ($\alpha_{2\min}$; $\alpha_{2\max}$) кутів зламу межі розділу (в градусах), яким відповідають комплексні показники сингулярності біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами ($\nu_1=\nu_2=0{,}3$). Ширина інтервалів залежить від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів і коефіцієнта тертя та прямує до нуля за зближення пружних характеристик матеріалів і зменшення (за модулем) коефіцієнта тертя. Для моделі повністю розкритої тріщини аналогічний інтервал кутів зламу подано в табл. 15.1 значеннями $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$. В моделі міжфазної тріщини з контактуючими берегами інтервали кутів зламу ($\alpha_{1\min}$; $\alpha_{1\max}$), ($\alpha_{2\min}$; $\alpha_{2\max}$) для

значень коефіцієнтів тертя, для яких такі інтервали існують, є значно вужчими порівняно з інтервалом (α_{min}; α_{max}).

Таблиця 15.1

E_1/E_2	0,1		0,3		0,5		0,7		0,9	
μ	–1	–2	–1	–2	–2	–3	–3	–4	–12	–13
(α_{1min};α_{1max})	–	(46; 77)	–	(57; 84)	–	(55; 91)	–	(73;76)	–	(64;84)
(α_{2min};α_{2max})	(264; 317)	(242; 322)	(274; 305)	(252; 312)	(267; 305)	(267; 305)	–	(268; 304)	(277; 296)	(272; 300)
(α_{min};α_{max})	(61; 252)		(75; 258)		(82; 262)		(86; 266)		(89; 268)	

Для кожної пари параметрів біматеріального з'єднання (E_1/E_2, α) існує граничний коефіцієнт тертя μ_c такий, що при $\mu<\mu_c$ ($|\mu|>|\mu_c|$) показники сингулярності будуть комплексними. На рис. 15.3 показана залежність граничного коефіцієнта тертя μ_c від кута зламу межі розділу для $\nu_1=\nu_2=0{,}3$ і відношень модулів Юнга з'єднаних матеріалів $E_1/E_2=0{,}1$ (штрихована лінія), $E_1/E_2=0{,}5$ (суцільна лінія), $E_1/E_2=0{,}9$ (штрих-пунктирна лінія). Бачимо, що $|\mu_c|$ зростає зі зближенням пружних характеристик з'єднаних матеріалів.

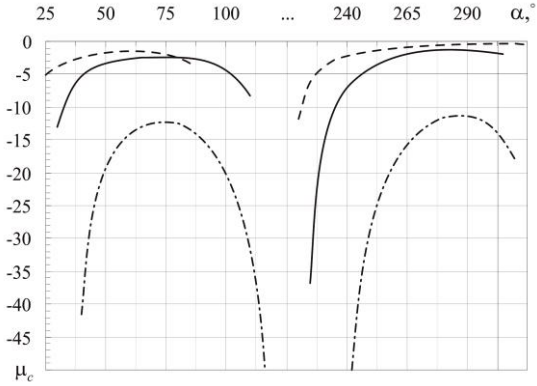
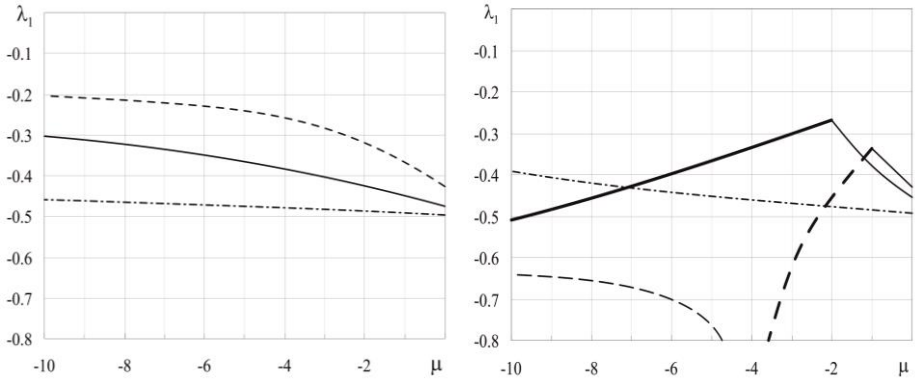


Рис. 15.3

Графіки залежності показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини від коефіцієнта тертя, подані на рис. 15.4 для кутів зламу межі розділу α=200° (*а*) і α=300° (*б*) ($\nu_1=\nu_2=0{,}3$; $E_1/E_2=0{,}1$ – штрихована лінія, $E_1/E_2=0{,}5$ – суцільна лінія, $E_1/E_2=0{,}9$ – штрих-пунктирна лінія), демонструють послаблення концентрації напружень при збільшенні коефіцієнта тертя (за модулем). Ця закономірність порушується у випадку комплексних показників сингулярності (рис. 15.4 *б*, ділянки графіків, виділені жирним), але ці випадки вимагають перегляду в рамках інших моделей міжфазної тріщини.



а) ***б***)

Рис. 15.4.

Наведений вище розв'язок задачі про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, вершина якої збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу матеріалів, та аналіз виконаних за його результатами числових розрахунків дозволяє зробити такі висновки. Врахування контакту берегів дозволяє усунути можливі просторові осциляції переміщень берегів, які передбачає модель розкритої міжфазної тріщини. Проте, в рамках розглянутого варіанту моделі М. Комніноу тріщини з контактуючими берегами виявлено можливість існування невеликих інтервалів кутів зламу межі розділу, для яких, залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини, все ж отримуємо комплексні показники сингулярності, що зумовлюють осциляції переміщень берегів.

Отже, модель міжфазної тріщини з контактом берегів не дає остаточного вирішення проблеми осцилюючої сингулярності. Розв'язання цієї проблеми вбачається нами в урахуванні утворення зони передруйнування в околі вершини тріщини, що становить суть комплексної моделі міжфазної тріщини [22, 31]. Заслуговують на увагу й інші чинники, урахування яких здатне усунути фізично некоректні осциляції переміщень берегів тріщини, зокрема, зчеплення берегів тріщини без проковзування [20], неідеальність з'єднання матеріалів [11] тощо.

Знайдені у підрозділі 15.1 вирази для полів напружень і переміщень в околі вершини міжфазної тріщини можуть бути використані в механіці руйнування для дослідження параметрів маломасштабних зон передруйнування і граничних навантажень у кусково-однорідних тілах з ламаною межею розділу матеріалів. З цією метою може бути використана модель Леонова – Панасюка, успішна реалізація якої для випадку розкритої тріщини на ламаній межі розділу здійснена у [21].

15.3. Параметри маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу

Оцінка розмірів маломасштабної контактної зони (15.5), отримана у підрозділі 15.1 за результатами дослідження напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних матеріалів, є наближеною і потребує уточнення. Це уточнення можна виконати за прикладом праці [5], в якій за допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу, за наявності тертя берегів та урахування навантаження через коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини. У зв’язку з цим в умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок розмірів маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу двох різних пружних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2, коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 і кутом зламу межі розділу α. Контактну зону моделюємо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона з коефіцієнтом тертя μ. На розрізі передбачається стискальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення.

Вважаючи довжину контактної зони s значно меншою порівняно з довжиною тріщини L та іншими суттєвими розмірами тіла, будемо розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченним розрізом на одній зі сторін зламу межі розділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті (Рис. 15.1). Малість контактної зони дозволяє сформулювати умову на нескінченості у вигляді вимоги можливості зшивання розшукуваного розв'язку з асимптотичним розв’язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про міжфазну тріщину без контакту берегів [3, 4]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{15.6}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \tag{15.7}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha): \quad \begin{cases} r \le s, \ \langle u_\theta \rangle = 0, \\ r \ge s, \ \sigma_\theta = 0; \end{cases} \tag{15.8}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha), \ r \to \infty: \ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = -\frac{4(1-\nu_1^{\,2})}{E_1} \times$$

$$\times \sum_i (2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') r^{\lambda_i'} + o(1/r), \tag{15.9}$$

де K_i – коефіцієнти інтенсивності напружень біля вершини тріщини за відсутності контакту берегів, λ_i' – відповідні показники сингулярності

напружень, які є коренями характеристичного рівняння $(-1<\operatorname{Re}\lambda_i'<0)$ [3, 4]:

$$D_0(-\lambda-1)=0, \tag{15.10}$$

$$D_0(p)=(1+\kappa_1)^2\Delta_1+e^2(1+\kappa_2)^2\Delta_2-4(1-e)^2\Delta_1\Delta_2-2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\Delta_3+$$
$$-4(1-e)(1+\kappa_1)\Delta_1\sin^2 p(2\pi-\alpha)+4(1-e)e(1+\kappa_2)\Delta_2\sin^2 p\alpha,$$
$$\Delta_1=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p\alpha,\ \Delta_2=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p(2\pi-\alpha),$$
$$\Delta_3=p^2\sin^2\alpha+\sin p\alpha\sin p(2\pi-\alpha)\cos 2p\pi.$$

Функція $F(\lambda)$, визначена за результатами робіт [3, 4], має вигляд:

$$F(\lambda)=\frac{e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)F_1(\lambda)+eF_2(\lambda)}{(1+\kappa_1)(\lambda+2)\Delta_0(\lambda)},$$
$$F_1(\lambda)=(1+\kappa_1)\psi_1+2(1-e)(\psi_2-\psi_1)+e(1+\kappa_2)(\psi_4-\psi_1),$$
$$F_2(\lambda)=2e(1+\kappa_2)t_3[(e-1)\psi_6-e(1+\kappa_2)]+4e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)\psi_1+$$
$$+4(1-e)^2t_3\psi_5-(1+\kappa_1)[(1+\kappa_1)-4(1-e)t_2]\psi_5,$$
$$\psi_1=\lambda\sin\alpha\sin(2\lambda\pi+\alpha)+\cos 2\lambda\pi-\cos(\lambda+2)\alpha\cos\lambda(2\pi-\alpha),$$
$$\psi_2=(\lambda^2+3\lambda+2)\sin^2\alpha\cos 2(\lambda+1)(\pi-\alpha),$$
$$\psi_3=(\lambda+1)^2\sin^2\alpha+\sin(\lambda+1)\alpha\cos 2\lambda\pi\sin(\lambda+1)(2\pi-\alpha),$$
$$\psi_4=\lambda\sin^2\alpha+\cos^2 2\lambda\pi-\cos(\lambda+2)\alpha\cos\lambda\alpha,$$
$$\psi_5=2\lambda(\lambda+2)\sin^2\alpha-2\sin\lambda\alpha\sin(\lambda+2)\alpha+$$
$$+(1+\kappa_2)[\lambda\sin^2\alpha+1-\cos\lambda\alpha\cos(\lambda+2)\alpha],$$
$$\psi_6=(1+\kappa_2)\cos 2(\lambda+1)\alpha+4\sin^2(\lambda+1)\alpha,$$
$$\Delta_0=2(e-1)t_3[2(e-1)t_5+e(1+\kappa_2)\sin(\lambda+2)\alpha]-$$
$$-(1+\kappa_1)t_5[4(e-1)t_2+(1+\kappa_1)]+e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)t_6,$$
$$t_5=\lambda\cos(\lambda+1)\alpha\sin\alpha-\sin\lambda\alpha,$$
$$t_6=\lambda\sin\alpha\cos(\lambda+1)\alpha+\cos 2\lambda\pi\sin\lambda(2\pi-\alpha);$$

решта позначень введено у підрозділі 15.1.

Коефіцієнти інтенсивності напружень K_i в (15.9) через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла не пов'язані безпосередньо з суто відривними чи зсувними модами навантаження. Надалі вважаємо K_i заданими за умовою задачі і такими, що забезпечують стискальні напруження на берегах тріщини в області контакту $(\sigma_\theta(r,2\pi-\alpha)=\sigma_\theta(r,-\alpha)<0$ при $r<s)$.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (15.6)-(15.9) шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (15.8) використовуємо умову

$$\theta=(2\pi-\alpha)\bigcup(-\alpha),\ r<s:\ \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle=\frac{4(1-\nu_1{}^2)}{E_1}\sum_i(2\pi)^{\lambda_i'}K_iF(\lambda_i')r^{\lambda_i'},\qquad(15.11)$$

а на нескінченності $\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\sim o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без контактної зони, розв'язок якої відомий [3, 4], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і крайових умов (15.6)-(15.7) інтегральне перетворення Мелліна виду $f^*(p,\theta)=\int\limits_0^\infty f(r,\theta)\,r^p dr$ (p – комплексний параметр перетворення), та використавши другу умову в (15.8) і умову (15.11), зводимо першу задачу до функціонального рівняння для трансформант напружень і градієнтів переміщень у смузі $-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 – достатньо малі позитивні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p)-\sum_i\frac{(2\pi)^{\lambda_i'}K_iF(\lambda_i')s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'}=-G_0(p)\frac{B\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi}\Phi^-(p),\qquad(15.12)$$

$$\Phi^+(p)=\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)}\int_1^\infty\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho s\\ \theta=2\pi-\alpha\cup-\alpha}}\rho^p d\rho,\ \Phi^-(p)=\int_0^1\sigma_\theta(\rho s,2\pi-\alpha)\rho^p d\rho;$$

$$G_0(p)=\frac{2D(-1-p)}{D_0(p)}\frac{\sin(p-\lambda)\pi}{B(1+\kappa_1)\sin p\pi},\quad B=\frac{1+\kappa_1+e(1+\kappa_2)}{2(1+\kappa_1)}$$

(λ і $D(x)$ визначені у підрозділі 15.1). Розв'язок рівняння (15.12) шукаємо за допомогою методу Вінера – Гопфа [7].

Функція $G_0(it)$ має парну додатну дійсну і непарну уявну частини, які при $t\to\pm\infty$ прямують до 1 і 0 відповідно, тому індекс функції $G_0(p)$ по уявній вісі дорівнює 0 і справедлива факторизація за формулою [2]:

$$G_0(p)=\frac{G_0^+(p)}{G_0^-(p)}\ (\operatorname{Re}p=0),\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G_0^+(p),&\operatorname{Re}p<0,\\ G_0^-(p),&\operatorname{Re}p>0.\end{cases}\qquad(15.13)$$

Відношення тригонометричних функцій у правій частині рівняння (15.12) виразимо за допомогою гамма-функцій Ейлера [7]:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi}=\frac{p}{(p-\lambda)Q^+(p)Q^-(p)},\ Q^\pm(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1\mp p\pm\lambda)}.\qquad(15.14)$$

Використовуючи (15.13) і (15.14), перепишемо (15.12) у вигляді:

$$\frac{\Phi^+(p)Q^+(p)}{pG_0^+(p)}-\sum_i\frac{(2\pi)^{\lambda_i'}K_iF(\lambda_i)s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'}\left[\frac{Q^+(p)}{pG_0^+(p)}+\frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i')G_0^+(-1-\lambda_i')}\right]=$$

$$= -\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i')G_0^+(-1-\lambda_i')} -$$

$$- \frac{B\Phi^-(p)}{(p-\lambda)G_0^-(p)Q^-(p)} \quad (\mathrm{Re}\, p = 0). \qquad (15.15)$$

Ліва частина рівняння (15.15) є аналітичною функцією у півплощині $\mathrm{Re}\, p < 0$, а права – у півплощині $\mathrm{Re}\, p > 0$. Тому, згідно з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині змінної p і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (15.15) на нескінченості.

За допомогою формули Стірлінга отримаємо $Q^{\pm}(p) \sim e^{\pm\lambda}(\mp p)^{\mp\lambda}$, а з (15.13) випливає, що $\lim\limits_{p\to\infty} G_0^{\pm}(p) = 1$. Врахуємо також, що у відповідності із загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\sigma_\theta(r, 2\pi-\alpha\cup-\alpha) \sim M_1(s-r)^{-1-\lambda} \quad (r\to s-0),$$

$$\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Big|_{\theta=2\pi-\alpha\cup-\alpha} \sim M_2(r-s)^{-1-\lambda} \quad (r\to s+0),$$

де M_1, M_2 – деякі сталі. Тоді за теоремою абелевого типу [7] знаходимо, що на нескінченості мають місце асимптотики

$$\Phi^-(p) \sim M_1\Gamma(-\lambda)s^{-1-\lambda}p^{\lambda} \quad (p\to\infty,\ \mathrm{Re}\, p > 0),$$

$$\Phi^+(p) \sim M_2\Gamma(-\lambda_0)s^{-1-\lambda}(-p)^{\lambda} \quad (p\to\infty,\ \mathrm{Re}\, p < 0). \qquad (15.16)$$

Підставляючи знайдені вище асимптотики $Q^{\pm}(p)$, $G_0^{\pm}(p)$ та $\Phi^{\pm}(p)$ в (15.15), виявляємо, що функції в її лівій і правій частинах на нескінченості перетворюються в нуль. Отже, за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. В результаті, прирівнюючи обидві частини рівняння (15.15) до нуля, отримаємо його точний розв'язок:

$$\Phi^+(p) = \frac{pG_0^+(p)}{Q^+(p)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i) s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \left[\frac{Q^+(p)}{pG_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i')G_0^+(-1-\lambda_i')}\right]$$

$$(\mathrm{Re}\, p < 0),$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{(p-\lambda)G_0^-(p)Q^-(p)}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i) s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i')G_0^+(-1-\lambda_i')}$$

$$(\mathrm{Re}\, p > 0). \qquad (15.17)$$

З (15.17) випливає, що при $p \to \infty$

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{e^{-\lambda} p^{\lambda}}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i') G_0^+(-1-\lambda_i')} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \qquad (15.18)$$

Порівнюючи (15.16) з (15.18), знаходимо:

$$M_1 = -\frac{e^{-\lambda} s^{1+\lambda}}{B\Gamma(-\lambda)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i') G_0^+(-1-\lambda_i')}.$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження перетворюється в 0 (при $r > s$ тріщина розкрита), тому повинно бути $M_1 = 0$, що приводить до трансцендентного рівняння для визначення довжини контактної зони:

$$\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^+(-1-\lambda_i')}{(1+\lambda_i') G_0^+(-1-\lambda_i')} = 0. \qquad (15.19)$$

(Таке ж саме рівняння отримується при аналізі асимптотики $\Phi^+(p)$ для $p \to \infty$, $\operatorname{Re} p < 0$). У цьому рівнянні для підвищення точності можна взяти довільну кількість доданків з коренями характеристичного рівняння (15.10), що задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_i' > -1$, проте для маломасштабної зони з $s \ll L$ можна обмежитись лише двома найбільшими за модулем показниками сингулярності λ_1', $\lambda_2' \sim -0,5$, що дозволяє отримати вираз для довжини контактної зони

$$s = \left[-\frac{(2\pi)^{\lambda_1'} K_1 F(\lambda_1') Q^+(-1-\lambda_1')}{(2\pi)^{\lambda_2'} K_2 F(\lambda_2') Q^+(-1-\lambda_2')} \frac{(1+\lambda_2') G_0^+(-1-\lambda_2')}{(1+\lambda_1') G_0^+(-1-\lambda_1')} \right]^{\frac{1}{\lambda_2'-\lambda_1'}}. \qquad (15.20)$$

Цей вираз годиться як для дійсних λ_1', λ_2', так і для комплексно спряжених $\lambda_1' = \bar{\lambda}_2'$. В останньому випадку в (15.20) використовуються комплексно спряжені коефіцієнти інтенсивності напружень $K_1 = \bar{K}_2$.

Згідно з (15.19) і (15.20), довжина контактної зони при незмінній конфігурації зовнішнього навантаження не залежить від його модуля, який лінійно входить в коефіцієнти інтенсивності напружень. Виконаємо дослідження залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла у частинному випадку дії зосереджених сил з відривними нормальними компонентами *P* і дотичними *Q*, прикладених на відстані $a \ll L$ від вершини тріщини до її берегів. Конфігурацію навантаження задаємо відношенням *n*=*P*/*Q*. Коефіцієнти інтенсивності напружень K_i для цього випадку визначені в [3]. Результати числових розрахунків довжини контактної зони для окремих параметрів тіла і навантаження подані на рис. 15.5. В усіх розрахунках покладали $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

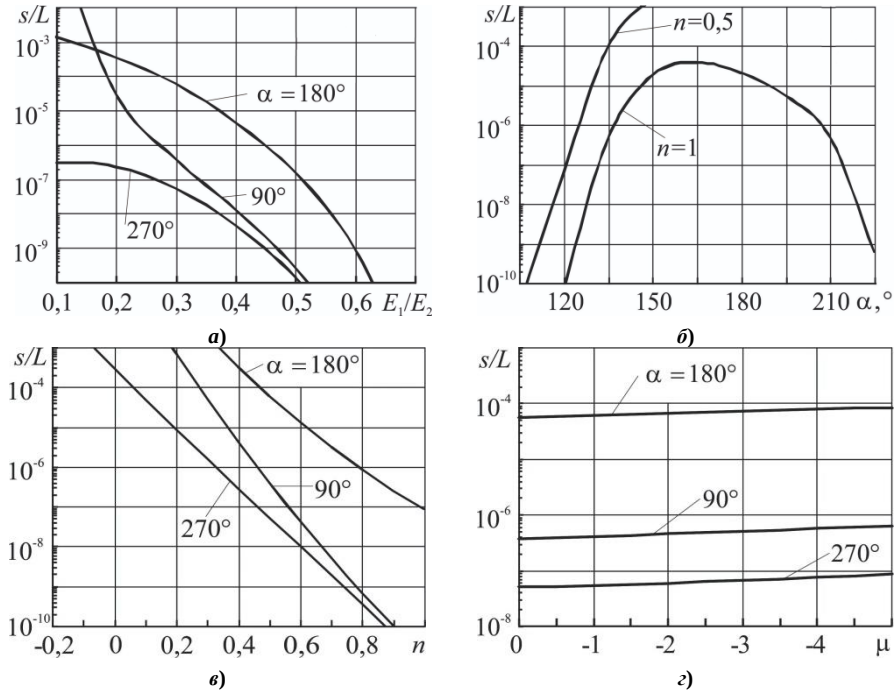


Рис. 15.5. *а*) n=0,5, μ=–0,5; *б*) E_1/E_2=0,1, μ=–0,5; *в*) E_1/E_2=0,3, μ=–0,5; *г*) E_1/E_2=0,3, n=0,5.

Довжина контактної зони стрімко зменшується при зближенні пружних характеристик з'єднаних матеріалів (рис. 15.5 *а*) та зі збільшенням відношення $n=P/Q$ розтягувальних зусиль до зсувних (рис. 15.5 *в*), набуваючи екстремально малих значень, для яких контактна модель міжфазної тріщини стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, однак у цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

Залежність розміру контактної зони від тертя менш виражена: її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя (рис. 15.5 *г*), що узгоджується з висновками праць [1, 5, 8]. Водночас, довжина області контакту берегів істотно залежить від кута зламу межі розділу з'єднаних матеріалів (рис. 15.5 *в*): в цій залежності виявили максимум при куті зламу, близькому до $\alpha \approx 170^0$.

Відповідно до визначення функції $\Phi^-(p)$ в (15.12), враховуючи знайдений розв'язок (15.17), знаходимо трансформанту нормального напруження на берегах тріщини. Застосувавши до даної трансформанти

зворотне перетворення Мелліна і теорему про лишки, отримаємо вираз для контактного напруження:

$$\sigma_\theta(r,2\pi-\alpha)=\sum_k\left[\frac{(1+\kappa_1)D_0(-1-\lambda_k)}{2D'(\lambda_k)}\left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda_k}\frac{(1+\lambda_k)G_0^+(-1-\lambda_k)}{Q^+(-1-\lambda_k)}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_i\frac{(2\pi)^{\lambda_i'}K_iF(\lambda_i,\alpha)s^{\lambda_i'}Q^+(-1-\lambda_i')}{(\lambda_i'-\lambda_k)(1+\lambda_i')G_0^+(-1-\lambda_i')}\right], \qquad (15.21)$$

де λ_k – корені рівняння (15.3), $D'(\lambda_k)\equiv\left.\frac{dD(-1-p)}{dp}\right|_{p=-1-\lambda_k}$. Вираз (15.21) узгоджується зі зробленим у підрозділі 15.2 висновком, що біля вершини тріщини зберігається концентрація напружень з попередньо визначеними показниками сингулярності λ_1, λ_2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Антипов Ю.А.* Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып. 2. – С. 290-306.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Дудик М.В.* Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 3. – С. 87–98.
4. *Дудик М.В., Решітник Ю.В., Феньків В.М.* Асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу матеріалів // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2020. – № 1. – С. 27–37.
5. *Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А.* Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 62–67.
6. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7. – 2017. – 168 с.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
8. *Остpик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К. : Наук. думка, 2006. – 328 с.
9. *Anderson P.* Small Scale Contact Conditions for the Linear-Elastic Interface Crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1988. – **55**. – P. 814–817.

10. *Antipov Y.A., Bardzokas D., Exadactylos G.E.* Interface edge crack in a bimaterial elastic half-plane // Int. J. Fracture. – 1997. – **88**, No. 3. – P. 281–304.
11. *Antipov Y.A., Avila-Pozos O., Kolaczkovski S.T., Movchan A.B.* Mathematical model of delamination cracks on imperfect interfaces // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 6665–6697.
12. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone // Int. J. Fract. – 1982. – **18**. – P. 161–177.
13. *Audoly B.* Asymptotic study of the interfacial crack with friction // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**, No. 9. – P. 1851–1864.
14. *Bercial-Velez J.P, Antipov Y.A., Movchan A.B.* High-order asymptotics and perturbation problems for 3D interfacial cracks // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – **53**. – P. 1128–1162.
15. *Carpinteri A., Paggi M.* Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems // Eng. Fract. Mech. – 2007. – **74**. – P. 59–74.
16. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.
17. *Comninou M.* The Interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631–636.
18. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // Journal of Elasticity. – 1980. – **10**, No. 2. – P. 203–212.
19. *Djoković J.M., Nikolić R.R., Ulewicz R., Hadzima B.* Interface crack approaching a three-material joint // Appl. Sci. – 2020. – **10**, No. 1, 416.
20. *Dorogoy A., Banks-Sills L.* Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**. – P. 2758–2773.
21. *Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V.* Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 2. – P. 121–135.
22. *Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, No. 1. – P. 31–50.
23. *Dundurs J., Gautesen A.K.* An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fract. – 1988. – **36**. – P. 151–159.
24. *England A.H.* A crack between dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 400–402.
25. *Erdogan F.* Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 403–410.
26. *Govorukha V.B., Loboda V.V.* Contact zone models for an interface crack in a piezoelectric material // Acta Mech. – 2000. – **140**. – P. 233–246.

27. *Govorukha V., Kamlah M., Loboda V., Lapusta Y.* Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks. Series: Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. – Luxembourg : Springer, 2017. – 236 p.
28. *Guz A.N.* On physically incorrect results in fracture mechanics // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 10. – P. 1041–1051.
29. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric biomaterials by consideration of various contact zone model // Arch. App. Mech. – 2000. – **70**. – P. 127–143.
30. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zone situated in an anisotropic biomaterials // Arch. App. Mech. – 1999. – **69**. – P. 317–335.
31. *Kamins'kyi A.O., Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 117–132.
32. *Kuo A.-Y.* Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – **57**, No. 2. – P. 359–364.
33. *Leguillon D.* Interface crack tip singularity with contact and friction // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIb. – 1999. – **327**, No. 5. – P. 437–442.
34. *Linkov A.M., Koshelev V.F.* Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**. – P. 5909–5930.
35. *Luo Y., Subbarayan G.* A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures // Eng. Fract. Mech. – 2007. – **74**. – P. 416–430.
36. *Pageau S.S., Gadi K.S., Biggers S.B., Joseph P.F.* Standardized complex and logarithmic eigensolutions for *n*-material wedges and junctions // Int. J. Eng. Fract. – 1996. – **77**. – P. 51–76.
37. *Qu J., Bassani J.L.* Cracks on Bimaterial and Bicrystal Interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – **37**. – P. 417–434.
38. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 418–423.
39. *Theocaris P.S., Gdoutos E.E.* Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 6. – P. 763–773.
40. *Wang S.S., Choi I.* The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials // J. Appl. Mech. – 1983. – **50**. – P. 169–178.
41. *Wieghardt K.* Über das spalten und zerreißen elastischer Körper // Z. Math. Phys. – 1907. – **55**. – S. 60–103.
42. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, No. 4. – P. 526–535.

43. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – **49**. – P. 199–204.
44. *Willis J.R.* The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1972. – **25**. – P. 367–385.

ДОДАТОК. Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами

$$\tilde{a}_1^2(\lambda)=\Delta_{12}(\lambda)B_1(\lambda)-\Delta_{22}(\lambda)B_2(\lambda)+\Delta_{32}(\lambda)B_3(\lambda),$$
$$\tilde{a}_2^2(\lambda)=-\Delta_{11}(\lambda)B_1(\lambda)+\Delta_{21}(\lambda)B_2(\lambda)-\Delta_{31}(\lambda)B_3(\lambda),$$
$$\tilde{a}_3^2(\lambda)=\Delta_{14}(\lambda)B_4(\lambda)+\Delta_{24}(\lambda)B_5(\lambda)+\Delta_{34}(\lambda)B_6(\lambda),$$
$$\tilde{a}_4^2(\lambda)=-\big(\Delta_{13}(\lambda)B_4(\lambda)+\Delta_{23}(\lambda)B_5(\lambda)+\Delta_{33}(\lambda)B_6(\lambda)\big);$$

$$\tilde{a}_1^1(\lambda)=\frac{1}{(1+\kappa_1)}\Big[\tilde{a}_1^2(\lambda)\big((1+\kappa_1)+\lambda(1-e)\big)+$$
$$+\tilde{a}_2^2(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\big((1+\kappa_1)+\lambda(1-e)-e(1+\kappa_2)\big)\Big],$$

$$\tilde{a}_2^1(\lambda)=\frac{1}{(1+\kappa_1)}\Big[-\tilde{a}_1^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e)-\tilde{a}_2^2(\lambda)\big(\lambda(1-e)-e(1+\kappa_2)\big)\Big],$$

$$\tilde{a}_3^1(\lambda)=\frac{1}{(1+\kappa_1)}\Big[\tilde{a}_3^2(\lambda)\big((1+\kappa_1)-(\lambda+2)(1-e)\big)+$$
$$+\tilde{a}_4^2(\lambda)\big((1+\kappa_1)-(\lambda+2)(1-e)-e(1+\kappa_2)\big)\Big],$$

$$\tilde{a}_4^1(\lambda)=\frac{1}{(1+\kappa_1)}\Big[\tilde{a}_3^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e)+\tilde{a}_4^2(\lambda)\big((\lambda+2)(1-e)+e(1+\kappa_2)\big)\Big];$$

$$\Delta_{11}(\lambda)=(\lambda+2)\big[\cos(\lambda+2)\alpha+\mu\sin(\lambda+2)\alpha\big],$$
$$\Delta_{12}(\lambda)=\lambda\cos\lambda\alpha+\mu(\lambda+2)\sin\lambda\alpha,$$
$$\Delta_{13}(\lambda)=(\lambda+2)\big[\sin(\lambda+2)\alpha-\mu\cos(\lambda+2)\alpha\big],$$
$$\Delta_{14}(\lambda)=\lambda\sin\lambda\alpha-\mu(\lambda+2)\cos\lambda\alpha;$$
$$\Delta_{21}(\lambda)=(1-e)(\lambda+2)\big[\cos\lambda\beta-\cos(\lambda+2)\alpha\big],$$
$$\Delta_{22}(\lambda)=\big[\lambda(1-e)-e(1+\kappa_2)\big]\big(\cos\lambda\beta-\cos\lambda\alpha\big),$$
$$\Delta_{23}(\lambda)=(1-e)(\lambda+2)\big[\sin\lambda\beta-\sin(\lambda+2)\alpha\big],$$
$$\Delta_{24}(\lambda)=(1-e)\big[(\lambda+2)\sin\lambda\beta-\lambda\sin\lambda\alpha\big]+e(1+\kappa_2)\big(\sin\lambda\alpha+\sin\lambda\beta\big);$$

$$\Delta_{31}(\lambda)=(1-e)\delta_{11}(\lambda)+(1+\kappa_1)\left[\sin(\lambda+2)\beta+\sin(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{32}(\lambda)=\frac{(1-e)-e(1+\kappa_2)}{\lambda+2}\delta_{11}(\lambda)+\frac{1+\kappa_1}{\lambda+2}\left[\lambda\sin(\lambda+2)\beta+(\lambda+2)\sin\lambda\alpha\right],$$

$$\Delta_{33}(\lambda)=(1-e)(\lambda+2)\delta_{12}(\lambda)+(1+\kappa_1)\left[\cos(\lambda+2)\beta-\cos(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{34}(\lambda)=\left[(\lambda+2)(1-e)+e(1+\kappa_2)\right]\delta_{12}(\lambda)+(1+\kappa_1)\left[\cos(\lambda+2)\beta-\cos\lambda\alpha\right];$$

$$B_1(\lambda)=(1-e)^2B_{11}(\lambda)-e(1+\kappa_2)(1-e)B_{12}(\lambda)+(1+\kappa_1)(1-e)B_{13}(\lambda)-$$
$$-e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)B_{14}(\lambda),$$

$$B_{11}(\lambda)=-(\lambda+2)\delta_{12}(\lambda)\delta_{13}(\lambda),\quad B_{12}(\lambda)=(\lambda+2)\left[\sin\lambda\alpha+\sin(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{13}(\lambda)=-\left[(\lambda+2)\sin\lambda\beta\delta_{22}(\lambda)+\cos(\lambda+2)\beta\delta_{23}(\lambda)\right]+\delta_{32}(\lambda),$$

$$B_{14}(\lambda)=\left(\sin\lambda\alpha+\sin\lambda\beta\right)\left[\cos(\lambda+2)\beta-\cos(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$B_2(\lambda)=(1-e)B_{21}(\lambda)+e(1+\kappa_2)B_{22}(\lambda)+(1+\kappa_1)B_{23}(\lambda),$$

$$B_{21}(\lambda)=(\lambda+2)\left[\delta_{23}(\lambda)+\mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{22}(\lambda)=(\lambda+2)\left[\sin(\lambda+2)\alpha-\mu\cos(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{23}(\lambda)=\left[\delta_{23}(\lambda)+\mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\cos(\lambda+2)\beta-\delta_{32}(\lambda);$$

$$B_3(\lambda)=(1-e)B_{31}(\lambda)+e(1+\kappa_2)B_{32}(\lambda),$$

$$B_{31}(\lambda)=(\lambda+2)\left[\left[\delta_{32}(\lambda)+\mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\sin\lambda\beta-\mu\delta_{32}(\lambda)\right],$$

$$B_{32}(\lambda)=(\lambda+2)\left(\sin\lambda\beta+\sin\lambda\alpha\right)\left[\sin(\lambda+2)\alpha-\mu\cos(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$B_4(\lambda)=(1-e)\left[\left[(1-e)\lambda-e(1+\kappa_2)\right]B_{41}(\lambda)+(1+\kappa_1)B_{42}(\lambda)\right]+$$
$$+e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)B_{43}(\lambda),$$

$$B_{41}(\lambda)=\delta_{11}(\lambda)\delta_{22}(\lambda),\quad B_{42}(\lambda)=\lambda\sin(\lambda+2)\beta\delta_{22}(\lambda)-\cos\lambda\beta\delta_{21}(\lambda)-\delta_{31}(\lambda),$$

$$B_{43}(\lambda)=\left[\sin(\lambda+2)\alpha+\sin(\lambda+2)\beta\right](\cos\lambda\beta-\cos\lambda\alpha);$$

$$B_5(\lambda)=(1-e)B_{51}(\lambda)+e(1+\kappa_2)B_{52}(\lambda)+(1+\kappa_1)B_{53}(\lambda),$$

$$B_{51}(\lambda)=\left[\lambda\delta_{22}(\lambda)-\mu\delta_{21}(\lambda)\right]\delta_{11}(\lambda),$$

$$B_{52}(\lambda)=\left[\cos(\lambda+2)\alpha+\mu\sin(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{11}(\lambda),$$

$$B_{53}(\lambda)=\left[\lambda\delta_{22}(\lambda)-\mu\delta_{21}(\lambda)\right]\sin(\lambda+2)\beta-\delta_{31}(\lambda);$$

$$B_6(\lambda)=(1-e)B_{61}(\lambda)-e(1+\kappa_2)B_{62}(\lambda),$$

$$B_{61}(\lambda)=(\lambda+2)\left[-\left[\lambda\delta_{22}(\lambda)-\mu\delta_{21}(\lambda)\right]\cos\lambda\beta+\mu\delta_{31}(\lambda)\right],$$

$$B_{62}(\lambda)=(\lambda+2)\left(\cos\lambda\beta-\cos\lambda\alpha\right)\left[\cos(\lambda+2)\alpha+\mu\sin(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$\delta_{11}(\lambda)=\lambda\sin(\lambda+2)\beta-(\lambda+2)\sin\lambda\beta,\quad \delta_{12}(\lambda)=\cos\lambda\beta-\cos(\lambda+2)\beta,$$

$$\delta_{13}(\lambda) = (\lambda+2)\sin(\lambda+2)\beta - \lambda\sin\lambda\beta;$$

$$\delta_{21}(\lambda) = \lambda\sin(\lambda+2)\alpha - (\lambda+2)\sin\lambda\alpha, \quad \delta_{22}(\lambda) = \cos\lambda\alpha - \cos(\lambda+2)\alpha,$$

$$\delta_{23}(\lambda) = (\lambda+2)\sin(\lambda+2)\alpha - \lambda\sin\lambda\alpha;$$

$$\delta_{31}(\lambda) = -(\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha,$$

$$\delta_{32}(\lambda) = (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha.$$