ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2006

МЕХАНІКА

УДК 539.375

© 2006

А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова, М. В. Дудик

О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

The symmetric problem on the calculation of a prefracture zone at the end of a crack outlimiting the interface of elastic media is considered. The prefracture zone is modeled by lines of the displacement rupture located on the interface. An exact solution of the corresponding plane static problem of elasticity theory is constructed by the Wiener-Hopf method.

Пусть кусочно-однородное тело, находящееся в условиях плоской деформации, составлено из различных однородных изотропных упругих частей. Рассмотрим следующие два способа соединения этих частей в единое кусочно-однородное тело: 1) различные части соединены между собой однородным изотропным упругим связующим материалом, более хрупким, чем материалы данных частей; 2) различные части соединены между собой однородным изотропным упругопластическим связующим материалом.

Предположим, что на негладкую границу раздела двух сред выходит прямолинейная трещина, конец которой совпадает с угловой точкой этой границы. Рассматриваемая ниже задача считается симметричной относительно прямой, на которой расположена данная трещина.

Уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи конца трещины появляется зона предразрушения. Будем изучать лишь начальную стадию ее развития, считая внешние нагрузки достаточно малыми. Тогда размер зоны предразрушения будет значительно меньше длины трещины и всех других размеров рассматриваемого тела. Поскольку размер этой начальной зоны предразрушения мал, а напряженно-деформированное состояние исследуется лишь вблизи зоны, тело в рассматриваемой задаче можно считать кусочно-однородной плоскостью с границей раздела сред в форме сторон угла, которая на его биссектрисе содержит полубесконечную трещину, исходящую из вершины. На бесконечности главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды совпадают с главными членами разложений напряжений в асимптотические ряды во внешней задаче вблизи конца трещины и представляют собой решение задачи, аналогичной рассматриваемой, без зоны предразрушения, порождаемое наименьшим на интервале $]-1;0[$ корнем ее характеристического уравнения.

Эта однородная задача теории упругости рассматривалась в [1]. Произвольная постоянная, входящая в упомянутое ее решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Согласно широко практикуемой в настоящее время гипотезе локализации [2, 3], начальные зоны предразрушения вблизи концов трещин и других угловых точек — концентраторов напряжений представляют собой тонкие слои материала — узкие полоски, исходящие из концентраторов. Следуя гипотезе локализации и учитывая свойства связующих материалов, будем считать, что как в случае упругого, так и в случае упругопластического связующего материала начальная зона предразрушения представляет собой пару узких полосок, исходящих из конца трещины и расположенных на границе раздела сред.

При этом в первом случае предполагается, что в задаче теории упругости, которая соответствует тому этапу процесса деформирования, когда зона предразрушения еще не появилась, на границе раздела сред вблизи конца трещины нормальное напряжение является растягивающим (условие Т). Ограничение на параметры задачи, обеспечивающее выполнение указанного условия, устанавливается ниже. Если это напряжение сжимающее, то полоски-зоны не будут развиваться вдоль границы раздела сред. В такой ситуации их развития следует ожидать в других направлениях. Однако соответствующая задача о расчете зоны предразрушения в данной работе не рассматривается.

Так как в случае упругого связующего материала преимущественные деформации в зоне предразрушения развиваются по механизму отрыва, полоску-зону будем моделировать линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной связующего материала (эта постоянная должна определяться экспериментально). В случае упругопластического связующего материала преимущественные деформации в зоне предразрушения развиваются по механизму сдвига и поэтому полоску-зону будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно заданной постоянной связующего материала.

Таким образом, в каждом из случаев осуществлен переход от общей симметричной задачи о расчете зоны предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела двух сред, к соответствующей статической задаче теории упругости для кусочно-однородного клиновидного тела с разрезами, в которой на бесконечности реализуется заданная асимптотика, позволяющая учесть влияние внешнего поля на напряженно-деформированное состояние рассматриваемого бесконечного тела.

В случае упругого связующего материала граничные условия исследуемой задачи теории упругости с учетом симметрии можно записать так:

$$\theta = \pi - \alpha, \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \qquad \theta = -\alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \tag{1}$$

$$\theta = 0, \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \qquad \langle u_r \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \sigma_\theta = \sigma; \qquad \theta = 0, \qquad r > l, \qquad \langle u_\theta \rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = 0, \qquad r \to \infty, \qquad \sigma_\theta = C g_1 r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{3}$$

Здесь $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$ (трещина находится в клине с углом раствора $2(\pi - \alpha)$ и упругими постоянными E_1, ν_1); $\langle a \rangle$ — скачок a; l — длина линии разрыва; σ, $C > 0$ — заданные постоянные; $\lambda(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \in]-1; 0[$, $g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$ — известные функции; $e_0 = E_1/E_2$.

Как показали расчеты, функция $g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2)$ при фиксированных α, ν_1, ν_2 будет положительной, если выполняется следующее неравенство:

$$0 < e_0 < e_0^0(\alpha, \nu_1, \nu_2) \tag{4}$$

($e_0^0 > 1$ — точка, в которой функция обращается в нуль). Будем считать, что e_0 удовлетворяет неравенству (4). Тогда в исходной задаче теории упругости для конечного тела $\sigma(r, 0) \to +\infty$ при $r \to 0$ и указанное выше условие Т будет выполнено.

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \sigma_\theta = \sigma - Cg_1 r^\lambda, \tag{5}$$

на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — аналогичная задача без линий разрыва. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения точного решения задачи используется метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [4, 5].

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (5), приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа первой задачи

$$\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{\sigma_1}{p+\lambda+1} = -A \operatorname{tg}(p\pi) G(p) \Phi^-(p),$$

$$A = \frac{(1+\kappa_1)[1+\kappa_1+(1+\kappa_2)e]}{2[\kappa_1+(1+\kappa_1\kappa_2)e+\kappa_2 e^2]}, \qquad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = 2[\kappa_1+(1+\kappa_1\kappa_2)e+\kappa_2 e^2][a_0(p)+a_1(p)e]\cos p\pi,$$

$$G_2(p) = [1+\kappa_1+(1+\kappa_2)e][b_0(p)+b_1(p)e+b_2(p)e^2]\sin p\pi,$$

$$a_0(p) = (1+\kappa_1)(\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)[\sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha],$$

$$a_1(p) = 2(1+\kappa_2)(\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha)[\sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)\{(1+\kappa_1)^2 - 4[\kappa_1\sin^2 p(\pi-\alpha) + p^2\sin^2\alpha]\}, \tag{6}$$

$$b_1(p) = (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)\sin 2p\pi + 4(\kappa_2\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha)[\sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha] -$$
$$- (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)\{(1+\kappa_1)(1+\kappa_2) - 4[\kappa_1\sin^2 p(\pi-\alpha) + p^2\sin^2\alpha]\},$$

$$b_2(p) = -4(\kappa_2\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha)[\sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha],$$

$$\kappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}, \qquad e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0, \qquad \sigma_1 = -Cg_1 l^\lambda,$$

$$\Phi^-(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l, 0)\rho^p d\rho, \qquad \Phi^-(p) = \frac{\mathrm{E}_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа).

Подобные уравнения решены, например, в [6, 7].

На основе решения уравнения (6) получаем следующую формулу, служащую для определения длины зоны предразрушения:

$$l = L\left(\frac{C}{\sigma}\right)^{-1/\lambda}, \qquad L = \left[\frac{\sqrt{\pi} g_1 \Gamma(\lambda+1) I_1}{2\Gamma(\lambda+3/2) I_2}\right]^{-1/\lambda},$$
$$I_1 = \exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2+1}dt\right], \qquad I_2 = \exp\left[\frac{\lambda+1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln G(it)}{t^2+(\lambda+1)^2}dt\right] \tag{7}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

В случае упругопластического связующего материала имеет место формула (7), где σ следует заменить на τ (τ — заданная постоянная), g_1 — на $|g_2|$ (g_2 — известная функция, аналогичная g_1),

$$a_0 = (1+\kappa_1)(\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha],$$
$$a_1 = 2(1+\kappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha].$$

1. *Каминский А. А., Дудик М. В., Дякон В. Н.* О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Теорет. и прикл. механика. — Харьков: Основа. — 2001. — Вып. 32. — С. 103–108.
2. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1968. — 246 с.
3. *Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения // Пробл. прочности. — 1973. — № 2. — С. 3–18.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Ленинград: Наука, 1967. — 402 с.
6. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред // Прикл. механика. — 1995. — **31**, № 6. — С. 86–91.
7. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Там же. — 1999. — **35**, № 1. — С. 63–68.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
Уманский государственный педагогический университет им. Павла Тычины

Поступило в редакцию 02.11.2005